



FONDO PIZZOFALCONE
BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EM. III NAPOLI
B. Prov.
XI
464
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num. d'ordine



NOUVEAU COURS
DE
MATHÉMATIQUE,
À L'USAGE
DE L'ARTILLERIE ET DU GENIE,

Où l'on applique les parties les plus utiles de cette ſcience à la théorie & à la pratique des différens ſujets qui peuvent avoir rapport à la guerre.

NOUVELLE EDITION,

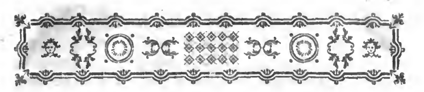
Corrigée & conſidérablement augmentée.

Par M. BELIDOR, Colonel d'Infanterie, Chevalier de l'Ordre Royal & Militaire de Saint Louis, Membre des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Pruſſe.



A PARIS,
Chez CH. ANT. JOMBERT, Imprimeur-Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, rue Dauphine.

M. DCC. LVII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.



PRÉFACE.

QUOIQUE le titre de cet Ouvrage me paroisse annoncer suffisamment ce que l'on s'y est proposé, & qu'il soit connu par plusieurs éditions, je ne me crois pas pour cela dispensé de rendre compte ici du Livre en général d'une maniere plus détaillée, & des additions considérables que j'y ai faites. Persuadé & convaincu, par une longue expérience, que les Officiers & les Ingénieurs militaires ne doivent pas étudier les Mathématiques de la même maniere qu'une personne qui voudroit s'y livrer entiérement, & en faire son étude principale, j'ai tâché de réunir dans un seul volume tout ce qui leur est absolument nécessaire, en joignant, autant qu'il m'a été possible, les applications des principes que je donne, à des exemples sensibles, & qui ont un rapport direct aux opérations qu'ils sont obligés de faire dans les places qu'ils ont à remplir. C'est sans doute à cela que je puis attribuer le succès qu'il a eu, & c'est pour le rendre encore plus intéressant que j'ai toujours travaillé sur le même plan. Presque toutes les additions que j'ai faites ont pour objet des questions ou des méthodes utiles dans la pratique, dont la précision doit être le but de toutes les études d'un Ingénieur. Si le goût des Mathématiques n'avoit pas fait des progrès aussi surprenans depuis une quarantaine d'année, j'aurois pu me contenter dans cette nouvelle édition de corri-

ger les fautes qui s'étoient glissées dans la premiere, & de donner des démonstrations plus rigoureuses & plus élégantes de certaines propositions, sans rien ajouter de nouveau; mais eu égard aux connoissances que l'on exige actuellement des Ingénieurs, j'ai fait toutes les additions qui m'ont paru absolument nécessaires pour rendre cet Ouvrage complet dans son genre. Une théorie abrégée, mais rigoureusement démontrée d'un petit nombre de principes & des premiers élémens de chaque partie des Mathématiques, analogue à l'art de la guerre, & à tout ce qui en dépend; c'est à quoi doivent se borner les études d'un habile Militaire. S'il veut après cela donner dans toutes les autres sciences étrangeres à sa profession, quoique dépendantes des Mathématiques, il ne fait que décorer son esprit, sans se rendre plus utile à l'état, qui ne peut tirer aucun secours de ces vérités sublimes, destinées plutôt à faire briller le génie dans une assemblée de Sçavans, qu'à rendre des services importans au Prince dans des occasions dangereuses.

Cet Ouvrage est divisé en seize Livres. Dans le premier, je donne les premiers élémens d'Algebre, après avoir donné les définitions des propositions dont on se sert en Géométrie, & des termes le plus en usage dans cette science. On y traite d'abord du calcul arithmétique, par rapport à la Multiplication & à la Division, en se servant de ce que l'on appelle communément parties aliquotes: c'est une des premieres additions qui m'a paru nécessaire pour montrer aux Commençans des manieres abrégées de faire ces opérations, qui deviennent fort longues en suivant les regles générales, dans les cas où le multiplicande & le multiplicateur

ſont tous deux des nombres complexes. Delà je paſſe au calcul des fractions numériques & algébriques, auxquelles j'ai ajouté la théorie & la pratique des fractions décimales, que je démontre par le principe de la numération : cette partie m'a paru indiſpenſablement néceſſaire pour mettre un Ingénieur au fait des Livres dont il eſt obligé de faire uſage. Tout le monde ſçait que les Tables des ſinus, dont on ſe ſert ſi fréquemment dans la Trigonométrie, ſont conſtruites par le moyen des décimales. On opere toujours avec plus de ſûreté quand on connoît la nature des nombres ſur leſquels on opere. On voit encore dans le même Livre un uſage important des décimales dans l'approximation des racines quarrées & cubiques qu'il faut déterminer avec tout le ſoin poſſible dans certaines occaſions. J'ai encore ajouté un Traité complet du calcul des Expoſans, que j'ai mis devant le chapitre de la formation des puiſſances auxquelles ce calcul a un rapport direct.

Dans le ſecond Livre, je traite des raiſons ou rapports arithmétiques & géométriques, des progreſſions & proportions qui en réſultent, dont je démontre les principales propriétés. De la comparaiſon de la progreſſion arithmétique des expoſans d'une même lettre à la progreſſion géométrique des puiſſances de cette même lettre, je déduis la nature & les principales propriétés des logarithmes, dont on eſt obligé de faire uſage dans un grand nombre de queſtions, & dont les Ingénieurs doivent néceſſairement ſe ſervir dans les calculs trigonométriques, pour déterminer avec préciſion des diſtances inacceſſibles. Cette partie, dont je n'avois point parlé dans l'ancienne édition, ſe trouve démontrée avec

toute la briéveté poſſible ; j'eſpere qu'elle n'en ſera pas plus difficile à concevoir. Je paſſe delà aux regles générales de la méthode analytique dans la recherche de la vérité. Je montre l'uſage & l'application de tout ce qui précede, ſoit en Arithmétique, ſoit en Algebre dans cette partie, qui eſt la plus importante des Mathématiques, & qui eſt eſſentiellement attachée à cette ſcience. Je donne enſuite un grand nombre d'exemples ſur des problêmes, dont on peut avoir beſoin dans les différentes opérations militaires, qui ſont du détail d'un Ingénieur. J'ai auſſi ajouté quelques ſolutions générales pour accoutumer les Commençans à ces expreſſions indéterminées & aux idées abſtraites, afin de leur faire mieux ſentir l'avantage que l'on peut retirer de l'étude de l'Algebre. Enfin je termine ce Livre par un Traité complet des Equations du ſecond degré, dont je n'avois dit que deux mots dans la premiere édition. Dans cette partie je diſcute la nature des racines poſitives & négatives ; je fais voir la différence des unes aux autres ; les cas où ce ſont les racines négatives qui réſolvent le problême dans le ſens qu'on s'étoit propoſé : d'où il ſuit qu'on ne doit point confondre les racines négatives avec celles qui ne réſolvent pas le problême comme on le demande. Comme dans la ſolution des équations du ſecond degré on arrive quelquefois à des radicaux aſſez compliqués, j'ai encore ajouté un petit Traité du calcul des Incommenſurables.

Dans le troiſieme Livre, je commence à traiter de la Géométrie, & j'examine d'abord les différentes poſitions des lignes droites les unes à l'égard des autres ; ce qui me conduit à examiner les propriétés des angles & des lignes paralleles. J'ai ajouté dans ce Livre quelques pro-

blêmes qui m'ont paru nécessaires pour faire mieux entendre ce que j'ai à dire dans les Livres suivans.

Le quatrieme Livre traite des propriétés des surfaces en général, & comme il n'y a point de surfaces qu'on ne puisse réduire en triangles, je commence par expliquer assez au long tout ce qui a rapport aux triangles & aux parallélogrammes. J'ai aussi ajouté dans cette partie plusieurs propositions sur les rapports des triangles comparés entr'eux, soit qu'il s'agisse d'une simple similitude, ou d'une égalité parfaite.

Dans le cinquieme Livre, j'examine les propriétés du cercle, principalement par rapport à la mesure des angles, & delà je déduis celles des sécantes intérieures ou extérieures, & celles des tangentes; j'en fais l'application sur quelques problêmes, dont la solution dépend de ces mêmes propriétés.

Le sixieme Livre est un Traité de l'inscription & de la circonscription des figures régulieres au cercle. J'examine ensuite, relativement à cet objet, les propriétés de la quadratrice, dont je donne la construction, & par le moyen de laquelle je résous d'une maniere aisée les problêmes que l'on peut proposer sur la division des arcs de cercle, ou des différens secteurs en plusieurs parties égales.

Dans le septieme Livre, on applique la doctrine des proportions aux figures planes: on y explique les rapports des périmetres des figures semblables, & celui de leurs surfaces. On donne ensuite la maniere de les ajouter, soustraire, multiplier, & diviser, suivant une raison donnée quelconque; ce que l'on fait par l'invention des lignes proportionnelles à d'autres lignes données de grandeur. J'ai ajouté dans cette partie deux théorêmes

extrémement curieux, l'un sur le rapport de deux triangles qui ont un angle égal, compris entre côtés inégaux, qui est d'un grand usage dans la Géodésie, & l'autre sur la maniere de trouver l'aire d'un triangle, dont on connoît les trois côtés. La démonstration que j'en donne est une des plus simples que l'on puisse trouver: le lecteur en jugera par la comparaison avec celles de la même proposition qui se trouvent dans les autres Livres.

Après avoir examiné les principales propriétés des lignes & des surfaces, je passe, dans le huitieme Livre, à la théorie des solides ou corps, dont je recherche les propriétés par rapport à leurs superficies & à leurs solidités. J'enseigne la maniere de toiser, non seulement les prismes, les pyramides, les cônes, les spheres, mais encore les différentes parties de ces corps. A l'occasion de la pyramide tronquée, je donne une méthode générale pour trouver une surface plane semblable à deux autres proposées, & moyenne géométrique entre ces deux, sans être obligé d'extraire de racines quarrées. Je donne ensuite la maniere de trouver des solides qui aient entr'eux une raison donnée, & je fais voir d'où dépend la solution des problêmes de ce genre, qui ont tous rapport à la duplication du cube. La méthode que j'ai suivie dans ce Livre est entiérement différente de celle qui se trouve dans les autres Elémens; elle est si simple, qu'en moins de seize propositions, on voit tout ce qu'Archimede a découvert de plus beau sur la sphere, & de ma théorie, je laisse entrevoir celle de toiser toutes sortes de voûtes en plein ceintre, qui auroient pour base des polygones réguliers quelconques.

Ces huit premiers Livres sont comme une premiere partie

partie du Cours de Mathématique. Afin d'en faire voir l'utilité, on a mis après chaque propofition des corollaires qui en montrent la fécondité; & l'on voit avec admiration l'étendue de la Géométrie dont il fuffit de fçavoir les premiers élémens pour découvrir les mêmes vérités qui femblent fe préfenter d'elles-mêmes à notre efprit, pour établir davantage l'utilité & l'importance des premieres, & qui femblent par-là s'empreffer de nous dédommager des premiers foins que nous avons pris pour arriver à la connoiffance de ces premieres vérités.

Comme les fimples élémens renfermés dans les huit premiers Livres ne font pas fuffifans pour entendre beaucoup de chofes intéreffantes, qui font traitées dans les fuivans, principalement la théorie du jet des bombes, & le toifé des voûtes qui demande une connoiffance au moins élémentaire des propriétés des fections coniques, je donne dans le neuvieme Livre un petit Traité, où j'explique les principales propriétés de ces courbes par rapport à leurs axes & à leurs diametres, dont je recherche les tangentes, & fur lefquelles je donne quelques problêmes.

Le dixieme Livre qui comprend la Trigonométrie & le nivellement, peut encore être regardé comme un des plus néceffaires à un Ingénieur, dont tout l'Art dépend de ces deux parties; la premiere dans la guerre, & la feconde dans la paix, où il peut être chargé de l'exécution des projets les plus importans, & qui ont abfolument befoin de la fcience du nivellement. On enfeigne dans ce Livre l'ufage des Tables des Sinus, Tangentes, Sécantes, & de leurs Logarithmes; la théorie du calcul des triangles, que l'on applique enfuite à me-

ſurer les hauteurs & les diſtances inacceſſibles ou acceſſibles ; à la maniere de calculer les parties d'une fortification, pour la tracer enſuite ſur le terrein. Comme la meſure des diſtances inacceſſibles eſt de la derniere importance dans les travaux militaires, je donne des problêmes nouveaux ſur la maniere de les déterminer, par le moyen de certaines lignes connues qui ſe trouvent déja déterminées. Ces problêmes, dont la ſolution dépend des principes précédens, méritent l'attention de ceux que j'ai eu en vue: ainſi ils ne peuvent mieux faire que de les étudier avec ſoin.

Le onzieme Livre eſt un Traité du calcul ordinaire des ouvrages de maçonnerie, où j'explique en même tems le toiſé des bois. Cette partie eſt encore néceſſaire aux Ingénieurs, qui ſont quelquefois obligés de faire les devis & détails de tout ce qui doit entrer dans l'exécution des ouvrages néceſſaires dans une fortification. On l'a traité d'une maniere ſi claire & ſi facile, que les Commençans pourront en peu de jours ſe rendre familiers ces ſortes de calculs.

Dans le douzieme Livre, on fait une application générale de la Géométrie à la meſure des ſolides réguliers & irréguliers, qui peuvent ſe rencontrer dans la pratique: par exemple, on y enſeigne la maniere de toiſer la ſolidité des voûtes en plein ceintre, ou en tiers point; celles des voûtes elliptiques ſurbaiſſées, ou ſurmontées ſur des plans circulaires ou rectilignes. J'ai ajouté auſſi dans cet endroit un Traité du Toiſé des ſurfaces des voûtes à pans en plein ceintre, & des voûtes en lunettes, ſans autre ſecours que les propriétés du cercle. Je donne auſſi le Toiſé du ſolide de ces mêmes voûtes. Enſuite on applique les mêmes principes à toiſer les

revêtemens d'une fortification, par exemple, les orillons & les flancs concaves, les arrondissemens des contre-forts, les pyramides tronquées qui se trouvent aux angles des mêmes ouvrages, & l'onglet d'un batardeau. Enfin je termine cette partie par l'exposition d'un principe général pour trouver les surfaces & les solides engendrés par les mouvemens d'une ligne droite ou courbe, & une surface rectiligne ou curviligne autour d'un axe de révolution, par le moyen du centre de gravité de ces lignes ou surfaces génératrices. Cette découverte peut être regardée comme une des plus importantes que l'on ait faite en Géométrie. Tout le monde convient que l'on en est redevable au P. *Guildin*: ensorte que l'on appelle ce principe communément *la Regle du P. Guildin.*

Le treizieme Livre est encore une application des mêmes principes à la Géodésie ou division des champs en parties qui aient entr'elles des rapports déterminés, quelle que soit la figure du terrein que l'on veut partager, & en commençant la division par des lignes tirées d'un point donné. Delà je passe à l'explication d'une machine connue de tout le monde, sous le nom de *compas de proportion*, parce que cet instrument est réellement fondé sur la nature & les propriétés des proportions. Il peut être d'un grand usage pour abréger les opérations dans un grand nombre de cas, comme pour trouver des lignes proportionnelles à des lignes données, pour couper des lignes données en parties égales, pour connoître les degrés d'un arc dont on a la corde, ou bien pour diviser un angle proposé en plusieurs parties égales, enfin pour trouver des surfaces ou des solides qui aient des raisons données avec d'autres surfaces ou d'autres solides proposés; ce qui peut avoir une application,

lorsqu'il faut déterminer le calibre des boulets par leurs pesanteurs & réciproquement. Je donne ensuite un problême fort curieux sur la maniere de faire l'analyse de la fonte de chaque espece de métal, dont le canon est composé : j'ai fait voir par-là comment on pouvoit appliquer à l'Artillerie des questions qui lui paroissent étrangeres, comme le problême d'*Hieron*, qui ne differe que de nom de celui-ci. Enfin je termine ce Livre par une dissertation, où je recherche la longueur que doivent avoir les boulets relativement à leur calibre, pour que la force du boulet soit la plus grande qu'il est possible ; & je rapporte un précis des expériences que j'ai faites depuis par ordre du Roi, pour reconnoître si cette théorie étoit bien fondée ; j'ai aussi ajouté une formule fort curieuse à ce que j'avois dit dans l'ancienne édition sur la maniere de nombrer les boulets en pile dans les Arcenaux : sur quoi l'on pourra remarquer une propriété des nombres triangulaires qui m'a paru mériter attention pour la sommation des nombres quarrés.

Le quatorzieme Livre est entiérement destiné à expliquer les regles du jet des bombes. Comme cette théorie a un rapport direct avec le mouvement des corps, j'explique d'abord les plus belles découvertes de *Galilée* sur les corps qui tombent, en vertu de la pesanteur, après avoir expliqué les regles principales du choc des corps durs, parce que cette partie a aussi un rapport direct au jet des bombes, où il faut estimer la force que la bombe acquiert par la vîtesse que sa chûte lui communique, afin de connoître les effets qu'elle peut produire pour proportionner les ouvrages qui doivent être à l'épreuve de la bombe à la force du choc. Je donne aussi des solutions géométriques & algébri-

ques des différens problêmes qui ont rapport au jet des bombes, pour faire voir l'accord de l'analyse avec la construction géométrique, & pour initier les Commençans à l'application de l'Algebre à la Géométrie.

Dans le quinzieme Livre, j'explique les principales propriétés des machines, en faisant usage du principe de M. *Varignon*, & quelquefois aussi de celui de M. *Descartes*, quoique le premier soit plus géométrique. Après avoir examiné les machines simples, qui font l'objet de la méchanique en général, après avoir donné la maniere d'en calculer les forces, on fait voir les différens usages auxquels elles sont propres, soit pour les manœuvres de l'Artillerie, ou pour la pratique des Arts. Ces mêmes principes généraux sont ensuite appliqués à la construction des magasins à poudre, ou de tout autre édifice, où l'on examine la différence des poussées des voûtes en plein ceintre, avec celle des voûtes surbaissées, ou des voûtes en tiers point. On détermine ensuite quel est le choc des bombes & des boulets de canon qui viennent rencontrer des surfaces horizontales ou inclinées, & quelle élévation il faut donner à un mortier, pour qu'une bombe venant à tomber sur un magasin à poudre, choque la voûte avec toute sa pesanteur absolue.

Enfin le seizieme & dernier Livre est une suite du précédent. On y examine l'équilibre des fluides entr'eux, ou avec les solides qui y sont plongés. Les vîtesses des eaux qui s'écoulent par différentes ouvertures; les chocs des mêmes fluides contre des surfaces en repos ou en mouvement, selon les vîtesses, les densités, & la situation des corps exposés au courant. J'y ai ajouté une théorie abrégée du choc d'un fluide contre

une ſurface quelconque, & diſpoſée comme on voudra; en ſuppoſant que les tranches horizontales de ce fluide ont des vîteſſes qui ſuivent la raiſon des racines quarrées des hauteurs. Enfin je termine ce Livre par un diſcours ſur la nature & les propriétés de l'air, où l'on fait voir comment la peſanteur de ce fluide produit tous les effets qu'on attribuoit autrefois à l'horreur du vuide. On peut après cela voir dans notre Architecture Hydraulique ce qui a rapport au reſſort de l'air, & à la force prodigieuſe de ſa dilatation, confirmé par pluſieurs expériences qui ſe trouvent détaillées dans le même Ouvrage.



TABLE
DES MATIERES
Contenues dans cet Ouvrage.

LIVRE PREMIER.

LIVRE II,

Qui traite des rapports, proportions, progressions arithmétiques & géométriques, des logarithmes, de la résolution analytique des problêmes du premier & du second degré.

LIVRE III,

Où l'on considere les différentes positions des lignes droites les unes à l'égard des autres.

LIVRE IV,

Qui traite des propriétés des triangles & des Parallélogrammes.

LIVRE V,

Où l'on traite des propriétés du cercle.

LIVRE VI,

Qui traite des Polygones réguliers, inscrits & circonscrits au cercle.

LIVRE VII,

Où l'on considere les rapports qu'ont entr'eux les circuits des figures semblables, & les proportions de leurs superficies.

LIVRE VIII,

Qui traite des propriétés des corps, de leurs ſurfaces, & de leurs ſolidités.

LIVRE IX,

Qui traite des Sections coniques.

CHAPITRE PREMIER.

Des propriétés de la Parabole.

CHAPITRE II,

Qui traite de l'Ellipse.

CHAPITRE III,

Qui traite de l'Hyperbole.

LIVRE X,

Qui traite de la Trigonométrie rectiligne & du Nivellement.

Du calcul des triangles rectangles.

De la résolution des triangles obtusangles ou acutangles.

Problêmes de Trigonométrie applicables à la fortification.

Théorie & pratique du Nivellement.

LIVRE XI.

Du Toisé en général, où l'on donne la maniere de faire le toisé des plans, des solides, & de la charpente.

LIVRE XII,

Où l'on applique la Géométrie à la mesure des superficies & des solides.

LIVRE XIII,

Où l'on applique la Géométrie à la division des champs, & à l'usage du compas de proportion.

Usages du compas de proportion.

LIVRE XIV.

Du mouvement des corps, & du jet des bombes.

LIVRE XV,

Qui traite de la méchanique statique.

LIVRE XVI,

Qui traite de l'Hydrostatique & de l'Hydraulique.

Fin de la Table.

EXTRAIT des Registres de l'Académie Royale des Sciences, du 27 Janvier 1725.

LEs Révérends Peres Sébastien & Reneau, & Messieurs Saurin, de Mairan & Chevalier qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage, présenté par M. *Belidor*, Professeur Royal de Mathématiques aux Ecoles d'Artillerie de la Fere, & intitulé *Nouveau Cours de Mathématiques à l'usage de l'Artillerie & du Génie*, en ayant fait leur rapport, la Compagnie a jugé que puisque l'Auteur avoit recueilli avec choix & avec ordre des diverses parties des Mathématiques les principales connoissances qui pouvoient appartenir au Génie & au service de l'Artillerie, qu'il avoit rendu toutes ses démonstrations plus nettes & plus courtes, en y employant l'Algebre, dont il donne les premiers élémens, & qu'il faisoit voir l'usage des connoissances qu'il donnoit, en les appliquant à des exemples considérables, tirés du Génie même & de l'Artillerie, il avoit bien rempli les vues qu'il s'étoit proposées, & qu'on ne pouvoit trop louer son zele pour le progrès de l'Ecole à laquelle il a voué ses soins & ses travaux : en foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris ce 29 Janvier 1725.

FONTENELLE, Secr. Pr. de l'Ac. Royale des Sciences.

APPROBATION DU CENSEUR ROYAL.

J'AI lu, par ordre de Monseigneur le Chancelier, la nouvelle édition *du Cours de Mathématique de M.* BELIDOR. Cet Ouvrage a été, dès le commencement, bien reçu du Public; il a été enseigné avec succès dans les Ecoles d'Artillerie. Les nouvelles augmentations dont on l'a enrichi, rendent cette édition très-complette, & beaucoup supérieure aux anciennes. Fait à Paris, ce 5 Juin 1757.

MONTCARVILLE, Lecteur & Professeur Royal.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : à nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra : SALUT. Notre amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Notre Libraire à Paris, Nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & réimprimer les ŒUVRES DE M. BELIDOR; *sçavoir, le Cours de Mathématique ; la Science des Ingénieurs ; le Bombardier François, & l'Architecture Hydraulique*, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de privilege pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer & réimprimer lesdits Ouvrages, autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire

vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de *dix années* consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. Faisons défenses à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance : comme aussi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucun extrait, sous quelque prétexte que ce soit d'augmentation, correction, changemens ou autres, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts : à la charge que ces Présentes seront enrégistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression & réimpression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modele sous le contre-scel des Présentes : que l'impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725 ; & qu'avant de l'exposer en vente, les manuscrits & imprimés qui auront servi de copie à l'impression & réimpression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France, le Sieur DE LAMOIGNON, & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires de chacun dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier de France le Sieur DE LAMOIGNON, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur de MACHAULT, Commandeur de nos Ordres ; le tout à peine de nullité des Présentes : du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant, ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers Secretaires, foi soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires ; car tel est notre plaisir. DONNÉ à Versailles le vingt-unieme jour du mois d'Août, l'an de grace mil sept cent cinquante-deux, & de notre regne le trente-septieme. Par le Roi en son Conseil.

SAINSON.

Registré sur le Registre XIII. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 19, fol. 12, conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du vingt-huit Février 1723. A Paris le 29 Août mil sept cent cinquante-deux.

HERISANT, Adjoint.



NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE,

A L'USAGE

DES INGÉNIEURS ET OFFICIERS D'ARTILLERIE.

LIVRE PREMIER,

Où l'on donne l'Introduction à la Géométrie.

DÉFINITIONS.

I.

1. LA Géométrie est une science qui ne considere pas tant la grandeur en elle-même, que le rapport qu'elle peut avoir avec une grandeur de même nature qu'elle.

II.

2. Tout ce qui peut tomber en question, s'appelle *proposi-*

tion. Il y en a de différentes ſortes, & elles changent de nom ſuivant leur objet. Par exemple,

III.

3. *Axiome* eſt une propoſition ſi claire, qu'elle n'a pas beſoin de démonſtration pour qu'on en voie la vérité. De ces propoſitions ſont les ſuivantes. *Le tout eſt plus grand qu'une de ſes parties ; deux choſes égales à une même troiſieme, ſont égales entr'elles ; ſi à des quantités égales on ajoute des quantités égales, les quantités qui en réſulteront ſeront encore égales, &c.* On fait un grand uſage de ces propoſitions dans la Géométrie, ſi ſimples qu'elles paroiſſent.

IV.

4. *Théoréme* eſt une propoſition dont il faut démontrer la vérité.

V.

5. *Probléme* eſt une propoſition dans laquelle il s'agit d'exécuter quelqu'opération, ſuivant certaines conditions, & de prouver enſuite que l'on a réellement fait ce qui étoit en queſtion.

VI.

6. *Lemme* eſt une propoſition qui en précéde une autre, pour en faciliter l'intelligence & la démonſtration.

VII.

7. *Corollaire* eſt une propoſition qui n'eſt qu'une ſuite ou une conſéquence de la propoſition précédente. Comme toutes ces propoſitions ont pour objet la grandeur ; voici l'idée qu'il faut s'en former.

VIII.

8. On appelle grandeur tout ce qui eſt ſuſceptible d'augmentation ou de diminution. On conſidére en Géométrie trois ſortes de grandeurs ou dimenſions ; *longueur*, *largeur*, & *profondeur.*

IX.

9. La longueur conſidérée ſans largeur & ſans profondeur, ſe nomme *ligne*.

X.

10. La longueur & la largeur considérées ensemble, sans avoir égard à l'épaisseur ou profondeur, se nomme *surface*. On l'appelle surface plane, lorsque tous ses points ne sont pas plus élevés les uns que les autres, comme cela arrive dans les surfaces plates & unies, telles que sont celles des glaces ou miroirs.

XI.

11. La longueur, la largeur, & la profondeur considérées ensemble, se nomment *corps* ou *solide*. La longueur, la largeur, & la profondeur sont toutes des grandeurs de même nature : on ne leur a donné différens noms que relativement à la maniere dont on les conçoit placées dans les corps.

XII.

12. Le *point* est l'extrêmité d'un *corps* ou d'une *surface*, ou bien d'une *ligne* ; on le conçoit comme indivisible, ou sans dimension, c'est-à-dire qu'on ne lui attribue ni *longueur*, ni *largeur*, ni *profondeur*. Ainsi le point ne peut être l'objet de la Géométrie, qui ne considere que l'étendue avec laquelle il n'a aucun rapport.

XIII.

13. La *ligne droite* est la plus courte de toutes celles que l'on peut mener d'un point A à un autre point B, comme AB. D'où il suit, 1°. qu'il n'y a qu'un seul chemin qui soit le plus court d'un point à un autre. 2°. Que deux points suffisent pour déterminer la position d'une ligne droite. 3°. Que si une ligne droite a deux points communs avec une autre ligne, elle se confond entiérement avec elle.

XIV.

14. La *ligne courbe* est celle qui n'est pas la plus courte d'un point à un autre, comme CD. Il y a donc une infinité de lignes courbes qui peuvent passer par deux points, puisqu'il y a une infinité de chemins qui ne sont pas les plus courts.

XV.

15. La *ligne mixte* est celle qui est en partie courbe, & en partie droite, comme EF.

XVI.

Figure 4. 16. Une *ligne perpendiculaire* est une *ligne droite* CD, qui aboutissant sur une autre AB, ne penche pas plus d'un côté que de l'autre.

XVII.

Figure 1. 17. Le *Quarré* est une figure rectiligne, formée par quatre côtés égaux, qui aboutissent perpendiculairement les uns sur les autres.

XVIII.

Figure 2. 18. Le *Rectangle* est un *quadrilatere*, dont tous les côtés ne sont pas égaux entr'eux, mais seulement deux à deux, & qui aboutissent perpendiculairement les uns aux autres.

XIX.

Figure 3. 19. Le *Cube* est un corps qui a la figure d'un dez à jouer, renfermé par six quarrés égaux, & dont toutes les dimensions sont égales entr'elles ; cette figure étant la plus simple de toutes, on y ramene tous les solides: c'est pourquoi lorsqu'on propose de trouver la solidité d'un corps on se sert du mot *cuber*, qui signifie la même chose.

XX.

20. Le *Parallelepipede* est un solide renfermé par six *rectangles*, dont les côtés opposés sont égaux, & qui n'a pas ses trois dimensions égales.

Figure 5. 21. Il y a une maniere de considérer les trois especes de l'étendue, c'est-à-dire la *ligne*, la *surface*, & le *solide* ou *corps*, qui est très-propre à expliquer beaucoup de choses en Géométrie ; c'est d'imaginer la ligne composée d'une infinité de points, la surface composée d'une infinité de lignes, & le corps composé d'une infinité de plans. Pour faire entendre ceci, considérez deux points, comme AB éloignés l'un de l'autre d'une distance quelconque ; si l'on suppose que le point A se meut pour aller vers le point B, sans s'écarter ni à droite ni à gauche, & qu'il laisse sur son chemin une trace d'autres points, la somme de tous ces points formera une ligne droite AB, puisqu'il n'y aura point d'espace dans la longueur AB, si petit qu'il soit, que le point A n'ait par-

couru. Ainsi toute ligne droite peut être considerée, comme formée par une multitude de points, dont la quantité est exprimée par la longueur de la même ligne.

22. L'on concevra de même que le plan est composé d'une infinité de lignes; car supposant que la ligne AC se meut le long de la ligne CD, en demeurant toujours également inclinée, il est visible que si elle laisse après elle autant de lignes qu'il y a de points dans CD, que lorsqu'elle sera parvenue au point D, toutes les lignes composeront ensemble la surface BC. *Figure 2.*

23. Enfin si l'on a un plan AB qui se meuve le long de la ligne BC, & qu'il laisse autant de plans après lui qu'il y a de points dans cette ligne, l'on voit que lorsqu'il sera arrivé à l'extrêmité C, il aura formé un corps tel que DB qui sera composé d'une infinité de plans, dont la somme sera exprimée par la ligne BC, pourvu que cette ligne soit perpendiculaire au plan générateur. *Figure 5 & 6.*

24. Comme on entend par la génération d'une chose les parties qui l'ont formée, il s'ensuit, selon ce qui vient d'être dit, que le point est le générateur de la ligne; la ligne est la génératrice de la surface, & la surface génératrice du corps; & par conséquent le point peut être lui-même considéré comme le principe générateur de toute sorte de grandeur.

25. Si l'on suppose que la ligne AC soit de huit pieds, & la ligne CD de six, & que l'on considere ces nombres comme exprimant la quantité de points qui se trouve dans ces lignes, l'on verra qu'en multipliant 8 par 6, le produit 48 sera la surface AD; car cette surface étant composée d'une infinité de lignes, & chacune de ces lignes étant composée d'une infinité de points, il s'ensuit que la surface est composée d'une infinité de points, dont la quantité est représentée par le produit de tous les points de la ligne CD, par tous les points de la ligne AC, c'est-à-dire de sa longueur AC, par sa largeur CD, qui donne 48 pieds, qu'il faut bien se garder de confondre avec le pied courant; car le pied courant n'est qu'une longueur sans largeur, au lieu que ceux qui sont formés par le produit de deux dimensions, sont autant de surfaces quarrées, qui servent à mesurer toutes les superficies. *Figure 2.*

26. Or comme le solide est composé d'autant de plans qu'il *Figure 5*

y a de points dans la ligne CB, il faut donc multiplier le plan AB par la ligne CB pour avoir le contenu de ce solide; ainsi supposant que le plan AB vaut 48 pieds quarrés, & que le nombre des points de la ligne BC soit exprimé par 4 pieds courans, multipliant 48 par 4, on aura 192 pieds pour la valeur du solide AC. Il faut encore faire attention que ces pieds sont différens du pied courant, & du pied quarré, car ce sont autant de solides qui ont un pied de long, un de large, & un de haut, qui sont par conséquent des cubes, puisqu'ils ont les trois dimensions égales : ainsi il faut remarquer que les lignes mesurent les lignes, les surfaces mesurent les surfaces, & les solides mesurent les solides; car la raison seule nous démontre que la mesure doit être de même nature que la chose, ou la grandeur mesurée.

27. Mais comme il s'agit beaucoup moins ici de chercher la valeur absolue des grandeurs, que le rapport qu'elles ont entr'elles, nous nous servirons de lettres de l'alphabet pour exprimer les grandeurs, afin de rendre générales les démonstrations des propositions que nous établirons. Pour concevoir la raison de cette généralité, on fera attention que la généralité d'un signe dépend de son indétermination; car dès-lors qu'une grandeur est indéterminée, on peut l'appliquer à telle espece de choses que l'on voudra. Ainsi, par exemple, le nombre 7 étant indéterminé par rapport à l'espece de ses unités, puisqu'il ne signifie pas plus sept hommes que sept chevaux, on peut l'employer pour marquer telle espece d'unités que l'on voudra, d'hommes ou de chevaux, &c. ainsi son indétermination le rend d'autant plus général, & propre à désigner telle sorte d'unité que l'on jugera à propos. Si donc l'indétermination d'un signe est la plus grande possible, sa généralité sera aussi la plus grande qu'on puisse imaginer. Pour arriver à ce dernier degré de généralité, on remarquera encore qu'une grandeur ne peut être indéterminée qu'en deux manieres; sçavoir, la premiere par rapport à l'espece seulement, & non pas à l'égard du nombre des unités, & la seconde par rapport au nombre & à l'espece tout ensemble. De cette premiere classe sont les signes de l'Arithmétique, qui sont toujours indéterminés par rapport aux différentes sortes d'unités, & jamais à l'égard du nombre de ces unités; & de la seconde classe sont les signes de l'alphabet ou les lettres,

qui ne désignant aucune espece en particulier, peuvent être employées pour les désigner toutes, & n'étant point fixées pour aucun nombre, peuvent aussi être employées à les représenter en général tous. Donc puisque l'indétermination des lettres est la plus grande possible, leur généralité est aussi la plus grande, & par conséquent tout ce qu'on démontre par leur secours, est démontré généralement. On remarquera encore que l'on auroit pu prendre tout autre caractere que ceux de l'alphabet, mais ces caracteres étant déja connus, il étoit naturel de s'en servir, & c'est ce qui les a fait préférer à tout autre.

28. Pour exprimer une ligne, on se servira d'une des lettres de l'alphabet, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, &c; & pour exprimer un plan, on en mettra deux l'une contre l'autre pour marquer les deux dimensions de ce plan; & pour marquer un solide, on en mettra trois de suite, parce qu'un solide quelconque a trois dimensions, & de plus, parce que l'on est convenu de représenter la multiplication de deux grandeurs, en mettant ces grandeurs les unes auprès des autres. Par exemple, *ab* représente un plan, dont les deux dimensions sont *a* & *b*, & se multiplient l'une par l'autre; de même *bcd* représente un solide, dont les trois dimensions sont *b*, *c*, *d*, dont le produit a donné ce solide.

29. Comme dans une même proposition on nomme toujours les lignes égales par les mêmes lettres, & les lignes inégales par des lettres différentes; dès que l'on verra *ab*, *cd*, on jugera que ce sont des rectangles, parce que leurs dimensions sont inégales, au lieu que *aa* signifie un quarré, parce que les deux dimensions sont égales.

30. De même quand on verra *aaa*, l'on jugera que c'est un cube, parce que les trois dimensions sont égales; & quand on verra *abc*, on jugera que c'est un parallelepipede, puisque ses trois dimensions sont inégales.

31. Les caracteres de l'alphabet sont bien plus propres à exprimer les grandeurs que les nombres; car quand je vois le nombre 8, je ne sçais s'il représente une ligne de huit pieds courans, ou un plan de huit pieds quarrés, ou un solide de huit pieds cubes; car un plan qui auroit quatre pieds de long sur deux pieds de large, auroit huit pour sa superficie; & un solide qui auroit ses dimensions exprimées par une ligne

de deux pieds, auroit aussi huit pieds cubes pour sa solidité. Ainsi dans les opérations que l'on fait avec les chiffres, il faut que la mémoire soit assujettie à retenir ce qu'ils signifient, au lieu que celles qui se font avec les lettres, ne la fatiguent aucunement, puisque la nature des grandeurs est représentée par les lettres mêmes ; car dès que je vois aa, bcd, j'apperçois aussitôt que aa est un quarré, & que bcd est un solide ; au lieu que si ces grandeurs étoient représentées par des nombres, je ne sçaurois ce qu'elles signifient.

32. Comme on fait avec les lettres de l'alphabet les opérations que l'on fait avec les nombres, c'est-à-dire l'*Addition*, la *Soustraction*, la *Multiplication*, la *Division*, & l'*Extraction des racines*, & que de plus on opére sur les quantités inconnues, de même que sur les quantités connues (& c'est encore un des grands avantages du calcul algébrique sur le numérique), on est convenu de représenter les quantités connues par les premieres lettres de l'alphabet a, b, c, d, e, &c. & les quantités inconnues par les dernieres u, x, y, z, afin de les distinguet des premieres.

33. L'on se sert en Algebre de quelques signes pour indiquer les opérations que l'on fait sur les lettres : par exemple, ce signe $+$ signifie *plus*, & désigne l'addition de la quantité qui le précéde à celle qui le suit. Ainsi $a+b$ marque que la grandeur b est ajoutée à la grandeur a ; on se sert même quelquefois de ces signes dans les calculs numériques, & il y a des occasions où il vaut mieux dire $5+3$ que 8, quoique l'un soit égal à l'autre.

34. Ce signe — signifie *moins*, & désigne la soustraction de la grandeur qui le suit de celle qui le précéde. $a-b$, marque la différence de la grandeur a à la grandeur b.

35. Si l'on veut marquer le produit d'une grandeur par une autre, ou le faire en deux manieres, 1°. en mettant le multiplicateur à côté du multiplicande, comme nous l'avons déja dit, n°. 28. Ainsi ab représente le produit de a par b, bcd représente le produit des trois grandeurs b, c, d, les unes par les autres. 2°. On désigne encore la multiplication de deux ou de plusieurs grandeurs, en mettant ce signe × entre deux, ainsi $a \times b$ désigne le produit de a par b, de même $a \times b \times c$ désigne celui des trois grandeurs abc, $2 \times 3 \times 4$ désigne celui des trois nombres 2, 3, 4 qui vaut 24. Il est même quelquefois

fois à propos en Arithmétique de se contenter d'indiquer la multiplication pour reconnoître plus aisément les facteurs du produit. On appelle *facteurs* les nombres ou quantités algébriques, de la multiplication desquels résulte le produit dont il s'agit.

36. Quand on veut marquer qu'une grandeur est divisée par une autre, on met celle que l'on regarde comme dividende au dessus d'une petite barre horizontale, & celle que l'on regarde comme diviseur au dessous de la même barre. Par exemple, $\frac{ab}{c}$ désigne que la grandeur ab est divisée par la quantité c; de même $\frac{bcd}{gf}$ marque le quotient de bcd divisé par gf.

37. Lorsqu'on verra ce signe $=$ précédé d'une quantité, & suivi d'une autre, cela voudra dire que ces quantités sont égales; c'est pourquoi on le nomme signe d'égalité: ainsi $ab = cd$, signifie que le produit ab est égal au produit cd.

38. Les deux quantités algébriques différentes, entre lesquelles se trouve le signe d'égalité, sont nommées ensemble *Equation*; ainsi $a = b$, $ay = bx$, $cd + xx = bb$, $y = \frac{ab}{c}$ sont des *équations*.

L'on appelle *membres* de l'équation, les quantités qui se trouvent de part & d'autre du signe d'égalité. Ainsi les quantités abc, dfx sont les *membres* de l'équation $abc = dfx$, dont abc est le *premier membre*, & dfx le second.

39. Si l'on a un produit qui résulte de la multiplication d'une même lettre plusieurs fois par elle-même, comme aaa, $aaabbb$, on peut abréger cette expression en écrivant cette lettre une seule fois, & mettant un peu au dessus, vers la droite, un nombre qui marque combien de fois cette lettre se multiplie par elle-même, ou, ce qui revient au même, combien de fois on auroit dû l'écrire: ainsi au lieu de aaa on écrit a^3; au lieu de $aabb$ on écrit a^2b^2; au lieu de $\frac{aaabb}{ccdd}$ on écrit $\frac{a^3b^2}{c^2d^2}$. Ce nombre est appellé *exposant*.

40. Si un même produit doit être pris un certain nombre de fois, on écrit au devant le nombre qui désigne combien de fois il le faut prendre. Ainsi $3ab$ marque que l'on prend trois fois le produit ab, $5a^2b^2$ désigne que l'on prend cinq fois la

grandeur a^3b^2. Ce nombre est appellé *coefficient*; il faut bien se garder de le confondre avec celui que nous appellons *exposant*. b^3 est totalement différent de $3b$, & ne peut jamais lui être égal. Un exemple en nombre suffit pour en voir la différence. Supposons que $b = 5$, on aura $3b = 3 \times 5 = 15$, & $b^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.

41. On se sert quelquefois des exposans pour marquer le quarré ou le cube d'une ligne désignée dans une figure. AB^2 marque le quarré de AB, AB^3 marque le cube de la même ligne.

42. Quand une quantité algébrique a été multipliée une fois, deux fois, trois ou quatre fois par elle-même, &c, le produit qui en résulte est appellé *puissance* ou *degré*; ainsi a ou a^1 est nommé premiere puissance ou premier degré de la grandeur a; aa ou a^2 seconde puissance, ou second degré, & souvent le quarré de a; de même aaa ou a^3 est le troisieme degré, la troisieme puissance, & quelquefois le cube de a; enfin $aaaa$ ou a^4 le quatrieme degré, la quatrieme puissance de a, ou bien le quarré-quarré de la même grandeur, puisqu'il résulte de la multiplication du quarré a^2 par lui-même. Il en est ainsi des autres.

43. Une puissance peut être regardée comme le produit d'une certaine puissance par une autre puissance; ainsi a^5 est le produit de a^3 par a^2, ou de la troisieme puissance de a par la seconde.

44. Il peut aussi y avoir des puissances faites du produit de deux ou plusieurs lettres multipliées l'une par l'autre; car si l'on multiplie ab par lui-même une fois, le produit $aabb$ sera la seconde puissance de la quantité ab: de même a^3b^3 est le cube de la même grandeur.

45. Le nombre ou la grandeur algébrique de la multiplication, de laquelle résulte une puissance, est appellé *racine*, & il y a autant de racines que de puissances; ainsi a est la racine quarrée de a^2, la racine cube de a^3, la racine cinquieme de a^5, &c; de même ab^2 est la racine cube de a^3b^6; abc est la racine quatrieme de $a^4b^4c^4$.

46. Les quantités algébriques sont appellées *incomplexes* ou *monomes*, lorsqu'elles ne sont pas jointes ensemble par les

ſignes + & —; ainſi ab, cd, $\frac{bb}{a}$, $\frac{ff}{g}$ ſont des quantités *incomplexes* ou *monomes*. Monome ſignifie qui n'eſt composé que d'un ſeul terme ; au contraire lorſqu'elles ſont liées enſemble par les ſignes + & —, on les appelle *complexes* ou *polynomes*, c'eſt-à-dire qui ont pluſieurs termes. Ainſi $bc + ad$, $ef + gh$, $aab - bcd$, $\frac{aa + cc}{a}$, $ab + cd - ac$ ſont des quantités *complexes* ou *polynomes*. Si les quantités algébriques n'ont que deux termes, on les appelle quelquefois *binomes*, & *trinomes* lorſqu'elles en ont trois ; mais au delà elles retiennent le nom général de *polynomes* ; dans le dernier exemple, ab, cd, ac ſont les termes de la quantité complexe $ab + cd - ac$.

47. Lorſqu'une quantité algébrique n'eſt précédée d'aucun ſigne, on ſuppoſe toujours qu'elle a le ſigne +, & alors on l'appelle quantité poſitive, pour la diſtinguer de celles qui ſont précédées du ſigne —, & *ab* que l'on appelle quantités négatives : $+ ab$ eſt la même choſe que ab, & eſt cenſé poſitif : $- ac$, $- bc$, ſont des quantités négatives.

48. Lorſqu'une quantité n'a point de coefficient, ni d'expoſant particulier, on lui ſuppoſe toujours l'unité pour coefficient & pour expoſant. Ainſi ab eſt la même choſe que $1a^1b^1$, abc eſt le même que $1a^1b^1c^1$, & ainſi de toutes les autres.

49. Lorſque des quantités incomplexes ou les termes d'une quantité complexe contiennent préciſément les mêmes lettres, on les appelle des *quantités ſemblables* : ainſi $3ab$ & $2ab$, $5ac$ & $2ac$ ſont des quantités ſemblables. Il faut bien remarquer que la ſimilitude des quantités algébriques ne dépend ni des ſignes, ni des coefficiens, comme on le voit par ces exemples, mais ſeulement des lettres & du nombre de fois qu'elles ſont écrites. Pour reconnoître plus aiſément la ſimilitude de pluſieurs termes, on obſervera dans les produits de mettre les lettres dans leur ordre naturel ou alphabétique ; ainſi l'on écrira abc, & non pas cab, ni bca.

PREMIERE REGLE

Pour réduire les Quantités algébriques à leurs moindres termes.

50. Quand on a des quantités algébriques complexes, qui renferment des termes ſemblables, il faut ajouter les coeffi-

ciens de ceux qui ont le même signe, & donner le même signe à leur somme, afin de réduire la quantité proposée; ainsi $4ab - 2ac + 2ab - 3ac$ se réduit à $6ab - 5ac$, $28abd + 15acf + 8abd + 7acf = 36abd + 22acf$.

51. Quand les quantités semblables ont des signes différens, il faut soustraire le plus petit coefficient du plus grand, & donner à la différence le signe du plus grand. Par exemple, pour réduire $cd + 6ab + 4aa - 4ab$, on écrira $cd + 4aa + 2ab$ en ôtant $4ab$ de $6ab$; de même $2ab + 5cd + 3ab - 7cd$ se réduit à $5ab - 2cd$.

52. Enfin lorsque deux termes sont égaux, & qu'ils ont des signes différens, ils se réduisent à rien; ainsi $a^2b + 2cd - a^2b = 2cd$, puisque $-a^2b$ soustrait de $+a^2b$ donne 0 pour différence.

Seconde Regle.

Addition des Quantités algébriques incomplexes & complexes.

53. Pour ajouter ensemble des quantités algébriques, qui ne sont précédées d'aucuns signes, il faut les écrire de suite, & les lier avec le signe $+$: ainsi pour ajouter les quantités ab, ac, ad, on écrira $ab + ac + ad$; de même la somme des quantités ef, gh, mn est égale à $ef + gh + mn$.

54. Si les quantités que l'on veut ajouter sont complexes, on les écrira de suite avec leurs signes, & après avoir réduit les termes semblables, on aura la somme de ces quantités. Par exemple, pour ajouter $2aab - 3acd$ avec $acc + 5acd - 6aab$, on écrira $2aab - 3acd + acc + 5acd - 6aab$, ce qui se réduit à $acc + 2acd - 4aab$. Pour ajouter $6add + 5aac - 4abb$ avec $2aac - 2abb$, l'on écrira $6add + 5aac - 4abb + 2aac - 2abb$ qui se réduit à $6add - 6abb + 7aac$. Enfin pour ajouter $abc - ddc - dcc$ avec $dcc - abc + 3ddc$, on écrira $abc - ddc - dcc + dcc - abc + 3ddc$ qui se réduit à $2ddc$. En général dans l'Addition algébrique, soit des monomes, soit des polynomes, on écrit les quantités à la suite les unes des autres avec leurs signes, & l'on fait après la réduction des quantités semblables, s'il y en a.

SOUSTRACTION des Quantités algébriques incomplexes & complexes.

55. Pour soustraire une quantité algébrique d'une autre, il faut l'écrire à la suite de celle dont on l'a soustrait, en changeant les signes de cette quantité, c'est-à-dire en mettant + où il y a —, & — où il y a +: il faut ensuite faire la réduction des quantités semblables, s'il y en a.

Par exemple, pour soustraire bb de aa, je l'écris à la suite de aa avec le signe —, parce qu'il est censé avoir le signe +, & la différence est $aa - bb$. De même pour soustraire $c + d$ de $a + b$, il faut changer les signes de $c + d$, & écrire $a + b - c - d$ qui sera la différence demandée. Pour soustraire $b - d$ de $a + c$, on écrira $a + c - b + d$. Pour soustraire $2bb - 3cc$ de $aa + bb$, on écrira $aa + bb - 2bb + 3cc$, & réduisant, on aura $aa - bb + 3cc$. Enfin pour soustraire $ab - dc + bb - 3aa$ de $aa - dc + 3bc - bb$, on écrira $aa - dc + 3bc - bb - ab + dc - bb + 3aa$, ce qui donne, en réduisant, $4aa + 3bc - 2bb - ab$, il en seroit de même des autres.

Eclaircissement sur la Soustraction littérale.

Il n'est pas difficile de concevoir pourquoi on change le signe +, exprimé ou sous-entendu en —, car c'est en cela précisément que consiste la Soustraction * ; mais presque tous les Commençans sont surpris de voir qu'il faut changer les signes de — en +, cependant cela est facile à comprendre, si l'on fait attention que pour ôter $b - d$ d'une quantité quelconque $a + c$, il ne faut pas ôter b tout seul, puisque ce seroit trop ôter de toute la quantité d, b étant plus grand que $b - d$ de la même quantité d; donc puisque l'on auroit réellement ôté d, en écrivant $-b$, il faut le remettre en écrivant $+d$.

* Art. 34.

Mais comme on entendra mieux ceci par les nombres, supposons qu'il faille retrancher du nombre 12 la quantité $6 - 2$. Selon la regle, il faut écrire $12 - 6 + 2$, dont la différence est 8; car comme $6 - 2$ est égale à 4, l'on voit qu'on ne peut retrancher que 4 de 12, & que par conséquent si au lieu de 4 on en retranche 6, il faut rendre à 12 la quan-

tité 2 que l'on avoit ôté de trop. Enfin pour expliquer ceci d'une autre façon, suppofons deux perfonnes, dont l'une a cent écus & ne doit rien, & l'autre au contraire n'a rien & doit cent écus, il eft certain que la premiere eft plus riche que la feconde de deux cens écus; par conféquent fi l'on retranche — de +, la différence fera +.

MULTIPLICATION des Quantités incomplexes.

56. Pour multiplier deux quantités quelconques incomplexes l'une par l'autre, il faut avoir égard aux fignes, aux coefficiens & aux lettres : ainfi la Multiplication renferme trois parties.

1°. Si le multiplicande & le multiplicateur ont le figne +, on donnera le figne + au produit, & c'eft ce que l'on exprime, en difant que + par + donne +.

Si le multiplicande a le figne +, & le multiplicateur le figne —, le produit aura le figne —, & c'eft ce que l'on exprime, en difant + par — donne —.

Si le multiplicande a le figne —, & le multiplicateur le figne +, le produit aura le figne —, ou bien — par + donne —.

Enfin fi le multiplicande & le multiplicateur ont le figne —, le produit aura le figne +, c'eft-à-dire que — par — donne +. Regle général, toutes les fois que le multiplicande & le multiplicateur ont le même figne, le produit eft pofitif ou précédé du figne +, & il eft négatif ou précédé du figne — toutes les fois que le multiplicande & le multiplicateur font des fignes différens.

2°. Si le multiplicande & le multiplicateur enfemble, ou féparément, ont des coefficiens différens de l'unité, on les multipliera l'un par l'autre, & le produit fervira de coefficient au produit que l'on cherche.

3°. Enfin pour multiplier les lettres les unes par les autres, on les pofera de fuite les unes auprès des autres pour indiquer la multiplication des grandeurs qu'elles défignent; car on a vu (n°. 35.) que cette maniere de les difpofer a été choifie pour la marque de la multiplication. Tout ceci deviendra fenfible par des exemples.

Soit propofé de multiplier la quantité $3ab$ ou $+ 3ab$ par

$2ac$ ou $+ 2ac$; je dis par le premier article de la Regle, $+$ par $+$ donne $+$: passant ensuite aux coefficiens, je dis, 3 fois 2, font 6 ; & enfin aux lettres, ab par ac donne a^2bc : on aura donc au produit $6a^2bc$ ou $+ 6a^2bc$. De même $4ac$, multiplié par $- 5ab^2$ donne $- 20a^2b^2c$; en disant $+$ par $-$ donne $-$, 5 fois 4, font 20, ac par ab^2 donne a^2b^2c. De même $- 6a^3b^2$, multiplié par $4a^2bc^2$, donne $- 24a^5b^3c^2$: enfin $- 8abc$ par $- 5bcd$, donne $+ 40ab^2c^2d$.

57. Pour multiplier deux ou plusieurs quantités qui ont des exposans, & qui sont composées des mêmes lettres, il faut ajouter les exposans des mêmes lettres, & leur somme sera les exposans des lettres du produit : ainsi $3a^2b^3 \times 5a^3b^2 = 15a^5b^5$. De même $a^2b^2c^3$, multiplié par ab^3c^2, donne $a^3b^5c^5$; car il est évident que $a^2b^2c^3 = aabbccc$, & $ab^3c^2 = abbbcc$; donc le produit de ces quantités se trouvera, en plaçant toutes ces lettres les unes auprès des autres, & sera $aaabbbbbccccc$, ou $a^3b^5c^5$, en substituant les exposans qui marquent combien de fois chaque lettre doit être écrite. Ceci est suffisant pour la Multiplication des quantités incomplexes.

Multiplication des Quantités complexes.

58. La Multiplication des quantités complexes se réduit à celle des quantités incomplexes, en observant de faire autant de multiplications particulieres qu'il y a de termes au multiplicande & au multiplicateur, en suivant précisément les mêmes regles pour les signes, les coefficiens, & pour les lettres. Si le multiplicateur n'a qu'un terme, il y aura autant de multiplications particulieres par ce terme, qu'il y aura de termes au multiplicande. Lorsqu'on aura trouvé tous les termes du produit, on observera d'en faire la réduction, s'il s'en trouve de semblables : par exemple, pour multiplier $2a + b$ par $3c$, l'on dira $+$ par $+$ donne $+$; 2 fois 3 font 6, a par c donne ac, le premier terme du produit sera $6ac$: de même on dira $+$ par $+$ donne $+$, 3 fois 1 c'est 3, b par c donne bc, & le second terme du produit sera bc ; les ajoutant ensemble, le produit total sera $6ac + 3bc$. Pour multiplier $a - b$ par d, l'on dira $+$ par $+$ donne $+$; 1 par 1 donne 1, a par d donne ad, & le premier terme sera $+ 1ad$, ou simplement ad : passant au second, on dira $-$ par $+$ donne $-$; 1 par 1

donne 1, b par d donne bd, & le ſecond terme ſera $-1bd$, ou ſimplement $-bd$; les ajoutant enſemble, on aura $ab-bd$ pour le produit total.

Si le multiplicateur eſt auſſi complexe, ou compoſé de pluſieurs termes, pour établir un certain ordre dans la maniere de faire la multiplication, on met le multiplicande & le multiplicateur l'un au deſſous de l'autre, on multiplie tous les termes du multiplicande par tous les termes du multiplicateur; ce qui donne autant de produits particuliers qu'il y a de termes au multiplicateur, & dont chacun contient autant de termes qu'il y en a au multiplicande. Ainſi pour multiplier $a+c$ par $a+c$, je mets une de ces quantités ſous l'autre, & commençant à multiplier par la gauche, je dis a par a donne aa, a par $+c$ donne $+ac$; multipliant enſuite par le ſecond terme c du multiplicateur, je dis $+c$ par a donne $+ac$, & $+c$ par $+c$ donne $+cc$; additionnant le tout, le produit eſt $aa+ac+ac+cc$; & pour abréger, au lieu d'écrire deux fois la même quantité ac, je marque ſeulement $2ac$ *, ce qui donne $aa+2ac+cc$.

* Art. 50.

59. Pour multiplier $a-b$ par $a-b$, je poſe encore une de ces quantités ſous l'autre, & je dis a par a donne aa, & puis a par $-b$ donne $-ab$ (car on ſous-entend toujours que a a le ſigne $+$). Multipliant enſuite par la ſeconde lettre du multiplicateur, je dis $-b$ par a donne $-ab$, & $-b$ par $-b$ donne $+bb$; après avoir fait l'addition je trouve au produit $aa-2ab+bb$. Tout ceci eſt évident par le premier article du n°. 56; ce ſeroit toujours la même choſe pour des opérations plus compliquées, comme on peut le voir dans les exemples qui ſuivent.

Multiplicande	$2a+b$	$a-b$
Multiplicateur	$3c$	d
Produit	$6ac+3bc$	$ad-bd$

	$a+c$		$a-b$
	$a+c$		$a-b$
Premier produit	$aa+ac$	1er produit	$aa-ab$
Second produit	$ac+cc$	2e produit	$-ab+bb$
Produit total.	$aa+2ac+cc$	Prod. total.	$aa-2ab+bb$.

Multiplicande

Multiplicande	$aa + bb - ad - xx$
Multiplicateur	$aa + bc$
Premier produit	$a^4 + a^2b^2 - a^2d - a^2x^2$
Second produit	$+ a^2bc + b^2c - abcd - bcxx$
Prod. total	$a^4 + a^2b^2 + a^2bc - a^2d + b^2c - a^2x^2 - abcd - bcx^2$.

Multiplicande	$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$
Multiplicateur	$a - b$
Premier produit	$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3$
	$- a^3b - a^2b^2 - ab^3 - b^4$
Produit total	$a^4 - b^4$.

Car il eſt viſible que tous les termes intermédiaires ſe détruiſent par la réduction, puiſqu'ils ont des ſignes différens, & qu'ils ſont ſemblables avec les mêmes coefficiens.

Démonstration des Regles

De la Multiplication des quantités complexes ou incomplexes données au n°. 57.

Il n'eſt pas difficile de concevoir pourquoi + multiplié par + donne +; mais on n'apperçoit pas avec la même facilité pourquoi + multiplié par —, ou — par + donne —, & l'on conçoit encore moins comment — multiplié par — donne +; c'eſt pourquoi nous nous arrêterons principalement à expliquer ces derniers cas.

La raiſon du premier cas eſt, que multipliant par exemple $a - b$ par d, l'on ne peut multiplier a par d ſans que le produit ad ne ſoit plus grand qu'il n'étoit, parce que a eſt plus grand que $a - b$, & par conſéquent pour ôter ce qu'il y a de trop dans le produit ad, il faut multiplier b par d, & ôter le produit bd de ad pour avoir $ad - bd$; ce qui fait voir que + par — doit donner —.

Et pour le faire voir en nombres, multiplions 15 — 5 par 6 : or comme 15 — 5 eſt égal à 10, c'eſt proprement 10 qu'il faut multiplier par 6, & non pas 15 entiers, à moins que ſelon la regle on ne multiplie auſſi 5 par 6 pour en ôter le produit

30 de 90, produit de 15 par 6; ce qui donne 60, de même qu'on l'auroit eu en multipliant 10 par 6.

A l'égard du dernier cas, il paroît bien étrange que — par — donne +; mais ce qui fait qu'on met +, c'est que les deux termes, qui sont précédés du signe —, donnant deux multiplications négatives, par lesquelles on ôte plus qu'il ne faut, l'on est obligé de mettre + au produit des deux termes qui ont le signe —, pour remplacer ce que l'on avoit ôté de trop. Par exemple, pour multiplier $a-b$ par $a-b$, je vois, après avoir fait la regle, que du produit aa il faut retrancher $-2ab$, & que retranchant plus qu'il ne faut de la quantité bb, il faut rendre cette même quantité en la mettant avec le signe +; ce qui remet toutes choses dans l'état où elles doivent être.

Comme cette regle est absolument indispensable pour la pratique des opérations algébriques, on ne sçauroit trop se convaincre de sa vérité & de la certitude des principes sur lesquels elle est appuyée. Pour cela, il suffit de faire attention à la nature de la multiplication. En général, multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le premier autant de fois qu'il est marqué par l'autre, & de la même maniere qu'il est marqué par l'autre. On sçait que l'on appelle multiplicande celui que l'on doit prendre plusieurs fois, & multiplicateur celui qui marque combien de fois on doit prendre le premier.

Les unités du multiplicateur marquent combien de fois il faut répéter le multiplicande, & le signe du même multiplicateur désigne de quelle maniere il faut prendre le même multiplicande. Si donc le multiplicateur a le signe +, la multiplication se fait par addition, & si au contraire il a le signe —, elle se fait par soustraction, & le produit résulte d'une soustraction répétée plusieurs fois. Il faut encore concevoir comment la multiplication se fait par soustraction : pour cela on fera attention que les quantités négatives ne sont pas moins réelles que les quantités positives; mais elles leurs sont seulement opposées: on peut donc les multiplier comme les autres. Ainsi si l'on regarde le bien que l'on possède comme quelque chose de positif, les dettes que l'on fait, seront des grandeurs négatives, & l'on sçait assez par expérience qu'elles peuvent se multiplier, ainsi que les biens, quoique bien plus facilement. Un homme qui accumule ses dettes,

multiplie par moins, & c'eſt ainſi qu'il faut entendre toutes ces expreſſions. Tout cela poſé, $+a \times -b$ doit donner $-ab$; car le multiplicande ayant le ſigne $+$, & le multiplicateur le ſigne $-$, indique qu'il faut ſouſtraire a autant de fois qu'il eſt marqué par b. De même $-a \times +b$ doit donner $-ab$; car le multiplicateur b étant poſitif, indique qu'il faut répéter pluſieurs fois la quantité négative $-a$. Le réſultat de toutes ces quantités négatives égales ne pourra jamais donner que du négatif: ainſi $-a \times +b$ donne $-ab$: enfin $-a \times -b$ doit donner $+ab$; car le multiplicande ayant le ſigne $-$ eſt négatif, & le multiplicateur ayant auſſi le même ſigne, fait voir que la multiplication ſe fait par ſouſtraction, c'eſt-à-dire qu'il faut ſouſtraire la quantité négative $-a$ autant de fois qu'il eſt marqué par les unités de b, & par conſéquent c'eſt mettre a autant de fois poſitif, par la même raiſon que pour ſouſtraire une quantité négative une fois, il faut la mettre une fois poſitive. Enfin cette derniere partie de la regle des ſignes répond parfaitement à ce que l'on dit ordinairement d'un homme qui acquitte ſes dettes.

Les deux dernieres parties de la regle n'ont pas beſoin de démonſtration; car il eſt évident que puiſque les coefficiens ſont des nombres, ils doivent ſe multiplier comme des nombres, & la maniere dont on indique la multiplication des lettres eſt de pure convention: ainſi elle ne peut être conteſtée.

Avertissement.

Pour donner une idée de la facilité que l'on a de démontrer les propoſitions de Géométrie par le moyen du calcul algébrique, j'ai cru qu'il étoit à propos, avant d'aller plus loin, de faire une application de la multiplication à la démonſtration des propoſitions ſuivantes.

PROPOSITION I.

Théoreme.

60. *Le quarré d'une grandeur quelconque, exprimée par deux lettres poſitives, eſt égale au quarré de chacune de ces lettres, plus à deux rectangles compris ſous les mêmes lettres.*

Car ſi l'on multiplie $a+b$ par $a+b$, l'on aura au produit

$aa + 2ab + bb$, qui eſt compoſé des quarrés aa & bb, & de deux rectangles compris ſous les mêmes lettres a & b, qui ſont $2ab$.

PROPOSITION II.

Théoreme.

61. *Le cube d'une grandeur quelconque exprimée par deux lettres, eſt égal au cube de la premiere, plus au cube de la ſeconde, plus à trois parallelepipedes du quarré de la premiere par la ſeconde, plus enfin à trois autres parallelepipedes du quarré de la ſeconde par la premiere.*

Car le quarré de $a+b$ étant (n°. 60.) $aa + 2ab + bb$; ſi on le multiplie encore par $a+b$, l'on aura le cube $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, qui renferme a^3 & b^3, cubes des deux lettres a & b, plus trois parallelepipedes $3a^2b$ du quarré aa par b; plus enfin trois autres parallelepipedes du quarré bb par a, $3abb$.

Nous nous ſervirons de ceci dans la ſuite pour démontrer les opérations de la racine quarrée & cubique.

Racine	$a+b$	Quarré	$aa+2ab+bb$
par	$a+b$	par	$a+b$
	$aa+ab$		$a^3+2a^2b+ab^2$
	$ab+bb$		$+a^2b+2ab^2+b^3$
Quarré	$aa+2ab+bb$.	Cube	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

PROPOSITION III.

Théoreme.

Figure 7. 62. *Si l'on a une ligne* AB *diviſée en deux également au point* C, *& en deux inégalement au point* D, *je dis que le rectangle* $AD \times DB$, *compris ſous les parties inégales* AD & DB, *plus le quarré de la moyenne partie* CD, *eſt égal au quarré de la moitié de la ligne, c'eſt-à-dire à* $\overline{AC}^2$ *ou* $\overline{CB}^2$.

Nous nommerons AC ou CB a, CD x, ainſi DB ſera $a-x$, & AD $a+x$.

Démonstration.

Si l'on ajoute à $AD \times DB$ ($aa - xx$) le quarré de CD

(xx), l'on pourra former cette équation $AD \times DB + CD^2$ ($aa - xx + xx$) $= AC^2$ (aa), puiſqu'en effaçant ce qui ſe détruit dans le premier membre, on auroit $aa = aa$; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

63. Il ſuit de cette propoſition, que ſi une ligne eſt coupée en deux également en C, & en deux inégalement en D, le quarré AC^2 de la moitié de la ligne, moins le quarré CD^2 de la moyenne partie CD, eſt égal au rectangle $AD \times DB$, compris ſous les parties inégales AD, DB; ce qui eſt évident, puiſque $AC^2 - CD^2$ ($aa - xx$) $= AD \times DB$ ($aa - xx$).

PROPOSITION IV.

THÉOREME.

64. *Si l'on a une ligne droite* AB *diviſée en deux également en* C, *& qu'on lui ajoute une droite* BE, *je dis que le rectangle de la droite* AE, *ſomme de ces deux lignes par la droite* BE *que l'on a ajoutée, avec le quarré de la moyenne* CB, *ſera égal au quarré de la ligne* CE, *compoſée de la moitié* CB, *& de l'ajoutée* BE. *Figure 7.*

Nous nommerons AC ou CB a, CE x, ainſi BE ſera $x - a$, & AE $x + a$.

DÉMONSTRATION.

Il eſt évident que ſi l'on ajoute au rectangle de $AE \times BE$ ($xx - aa$) le quarré de CB (aa), l'on pourra former cette équation $AE \times BE + \overline{CB}^2$ ($xx - aa + aa$) $= CE^2$ (xx), puiſqu'en effaçant tout ce qui ſe détruit, il vient $xx = xx$; C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

65. Il ſuit de cette propoſition, que ſi à une ligne diviſée en deux également l'on en ajoute une autre, le quarré de la ligne CE, compoſé de la moitié de la ligne & de l'ajoutée, moins le quarré de la moyenne CB, ſera égal au rectangle compris ſous toute la ligne AE, & la partie ajoutée BE; ce qui eſt évident, puiſque $CE^2 - CB^2 = AE \times BE$ ($xx - aa$).

PROPOSITION V.

66. *Si l'on a deux lignes, dont la premiere ſoit double de la ſeconde, je dis que le quarré de la premiere ſera quadruple du quarré de la ſeconde.*

DÉMONSTRATION.

Si de ces deux lignes la ſeconde ſe nomme a, la premiere ſera $2a$: or multipliant $2a$ par $2a$, l'on aura $4aa$ pour le quarré de la premiere ; & ſi l'on multiplie a par lui-même, l'on aura aa pour le quarré de la ſeconde, & par conſéquent le quarré de la premiere eſt quadruple du quarré de la ſeconde.

De la Diviſion des Quantités algébriques incomplexes & complexes.

67. Pour diviſer une quantité algébrique par une autre, on met celle que l'on doit diviſer au deſſus d'une barre horizontale, & celle par laquelle on diviſe au deſſous de la même barre (n°. 38.), en obſervant d'effacer les lettres communes au dividende & au diviſeur, s'il y en a quelques-unes, & ce qui reſte marque le quotient. Ainſi pour diviſer a par b, j'écris $\frac{a}{b}$, ce qui ſignifie a diviſé par b; pour diviſer abc par fg, j'écris $\frac{abc}{fg}$; pour diviſer ab^2c^3 par abc^2, ou $abbccc$ par $abcc$, j'écris $\frac{aabbccc}{abcc}$, ce qui ſe réduit à abc, en effaçant les lettres communes au dividende & au diviſeur. Si l'on multiplie le quotient abc par le diviſeur $abcc$, l'on aura $a^2b^2c^3$; ce qui prouve que la Diviſion eſt bien faite, puiſque le produit du diviſeur par le quotient eſt égal au dividende.

68. Si le dividende & le diviſeur ſont chacun précédés de coefficiens, il faudra les diviſer l'un par l'autre, ſelon les regles de la diviſion des nombres, & le quotient ſera le coefficient du quotient. Ainſi $21ab^2$ diviſé par $7ab = 3b$; $\frac{28abc^3}{4a^2bc} = \frac{7c^2}{a}$; $\frac{36a^2b^4}{9a^3bc^2} = \frac{4b^3}{ac^2}$. L'on peut remarquer que lorſque le dividende & le diviſeur ont chacun des lettres ſemblables avec des expoſans, la diviſion de ces lettres ſe fait par la ſouſtraction des expoſans : ainſi $\frac{a^3}{a^2} = a = a^{3-2}$ $\frac{a^3b^4}{a\,b^3} = a^2b = a^{3-1}\ b^{4-3}$,

$\frac{36ac^2f^3}{4a^3cf^2} = \frac{9c^{2-1}f^{3-2}}{a^{3-1}} = \frac{9cf}{a^2}$, & ainſi des autres.

69. A l'égard des ſignes, ſi le dividende & le diviſeur ont chacun le même ſigne $+$ ou $-$, il faut que le quotient ait le ſigne $+$: la raiſon en eſt, qu'une quantité négative eſt contenue dans une quantité négative, de la même maniere qu'une quantité poſitive eſt contenue dans une quantité poſitive. Mais s'ils avoient différens ſignes, le quotient auroit le ſigne $-$, parce que les quantités poſitives & négatives étant des quantités oppoſées les unes aux autres, ſe contiennent négativement, & par conſéquent le quotient doit avoir le ſigne $-$. Par exemple, $+ a^2b$ diviſé par $+ a = + ab$; de même $- ab$ diviſé par $- b$ donne $+ a$; ce qui ſe peut encore démontrer par la preuve de la Diviſion, par laquelle le produit du diviſeur par le quotient doit redonner le dividende. Multipliant donc le quotient $+ a$ par le diviſeur $- b$, on aura $- ab$, puiſque $-$ par $+$ donne $-$ (nº. 57). Si l'on diviſe $+ ab$ par $- a$, le quotient ſera $- b$; car multipliant le quotient $- b$ par le diviſeur $- a$, on aura $+ ab$, puiſque $-$ par $-$ donne $+$ (nº. 57). Enfin ſi l'on diviſe $- ab$ par $+ a$, le quotient ſera $- b$; car multipliant le quotient $- b$ par le diviſeur $+ a$, on aura $- ab$, puiſque $-$ par $+$ donne $-$.

70. Si le dividende eſt complexe, & le diviſeur toujours incomplexe, on fera ſur chaque terme les mêmes opérations que nous venons d'expliquer, & la ſomme des quotiens particuliers ſera le quotient total. Ainſi pour diviſer $ab + ad$ par a, je dis ab diviſé par a donne b; que j'écris au quotient. Je dis enſuite ad diviſé par a donne d au quotient, qui étant ajouté au premier b, donne pour le quotient total $b + d$; ce qui eſt encore évident, puiſqu'en multipliant le quotient $b + d$ par le diviſeur a, on aura $ab + ad$ égal au dividende.

71. Quand le dividende & le diviſeur ſont chacun des quantités algébriques complexes, on ſuit à peu près le même procédé que dans la diviſion des nombres. Par exemple, pour diviſer $aa + 2ab + bb$ par $a + b$, je poſe les premiers termes du diviſeur ſous les premiers termes du dividende, & je commence par chercher combien de fois le premier terme a du diviſeur eſt contenu dans le premier terme a^2 du dividende, en diſant, en a^2 combien de fois a, ou a^2 diviſé par a donne a au quotient: je multiplie le diviſeur entier $a + b$ par a, &

* *Art. 55.* je retranche le produit $aa + ab$ du dividende *; ce que je fais en l'écrivant à la suite de cette même quantité avec des signes contraires, & j'ai $aa + 2ab + bb - aa - ab$; ce qui se réduit à $ab + bb$. Je fais sur le reste la même opération, en disant ab divisé par a, donne b au quotient, que je mets à côté du premier terme que j'ai déja trouvé: je multiplie pareillement le diviseur entier $a + b$ par b, ce qui me donne pour produit $ab + bb$, qu'il faut encore retrancher du reste $ab + bb$, ce que je fais en le mettant à la suite de cette quantité avec des signes contraires: j'ai donc $ab + bb - ab - bb$, ce qui se réduit à zero par la regle de la réduction des quantités semblables, d'où je conclus que le quotient est $a + b$, puisqu'il ne reste rien.

72. Pour diviser $a^2 - 2ab + bb$ par $a - b$, je dis comme ci-dessus, a^2 divisé par a donne a au quotient: je multiplie le diviseur entier $a - b$ par le quotient a, dont le produit est $aa - ab$, que je retranche du dividende, en le mettant après avec des signes contraires pour avoir le reste $aa - 2ab + bb - aa + ab$, ce qui se réduit à $-ab + bb$. Je fais sur le reste la même opération, & je dis $-ab$ divisé par a, donne $-b$, que j'écris à la suite du premier terme du quotient: je multiplie le diviseur $a - b$ par $-b$, & j'ôte le produit $-ab + bb$ du reste qui m'a servi de dividende pour avoir $-ab + bb + ab - bb$, qui se réduit à zero par la réduction des quantités semblables, d'où je conclus encore que $a - b$ est le quotient.

73. Pour diviser $aa - bb$ par $a + b$, je dis aa divisé par a donne a, qui étant multiplié par le diviseur, donne pour produit $aa + ab$; le retranchant du dividende, il reste $aa - bb - aa - ab$; qui étant réduit, donne $-bb - ab$, ou $-ab - bb$, que je divise encore par $a + b$, en disant $-ab$ divisé par $+a$ donne $-b$. Multipliant le diviseur par $-b$, il vient $-ab - bb$, qui étant retranché du dividende partiel, donne $-ab - bb + ab + bb$ ou zero, en effaçant ce qui se détruit; d'où il suit que le quotient est $a - b$, ce qui est évident, puisqu'en multipliant ce quotient par le diviseur, on retrouve le dividende.

EXEMPLE

EXEMPLES DE DIVISION.

1[er] Dividende $aa + 2ab + bb$ } Quotient total $a + b$.
Diviſeur $a + b$
Produit $aa + ab$ (a, premier quotient.
Souſtraction $aa + 2ab + bb - aa - ab$.
Réduction ou nouveau dividende { $ab + bb$
Diviſeur $a + b$ (b, ſecond quotient.
Produit $ab + bb$
Souſtraction $ab + bb - ab - bb = 0$.

2[e] Dividende $aa - 2ab + bb$ ($a - b$, quotient total.
Diviſeur $a - b$
Produit $aa - ab$
Souſtraction $aa - 2ab + bb - aa + ab$ (a, 1[er] quot.
Réduction ou nouveau dividende { $- ab + bb$
Diviſeur $a - b$ ($- b$, ſecond quotient.
Produit $- ab - bb$
Souſtraction $- ab + bb + ab + bb = 0$.

3[e] Dividende $aa - bb$ (quotient total ($a - b$)
Diviſeur $a + b$ (a, premier quotient.
Produit $aa + bb$
Souſtraction $aa - bb - aa - ab$
Réduction ou nouveau dividende. { $- ab - bb$
Diviſeur $a + b$ ($- b$, ſecond quotient.
Produit $- ab - bb$
Souſtraction $- ab - bb + ab + bb = 0$.

4[e] Dividende $a^4 \times \times \times - b^4$ (quot. total $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$
Diviſeur $a - b$ (premier quotient a^3.
Produit $a^4 - a^3b$
Souſtraction $a^4 - a^4 + a^3b \times \times - b^4$
Réduction ou dividende partiel { $a^3b \times \times - b^4$
Diviſeur $a - b$ (ſecond quotient a^2b
Produit $a^3b - a^2b^2$
Souſtraction $a^3b - a^3b + a^2b^2 - b^4$.

Réduction ou nouveau dividende { $a^2b^2 - b^4$

Diviseur $a - b$ (troisieme quotient ab^2

Produit $a^2b^2 - ab^3$

Soustraction $a^2b^2 - a^2b^2 + ab^3 - b^4$

Réduction ou nouveau dividende { $ab^3 - b^4$

Diviseur $a - b$ (quatrieme quotient $+ b^3$

Produit $ab^3 - b^4$

Soustraction $ab^3 - b^4 - ab^3 + b^4 = 0$.

REMARQUE.

Quoique le quotient ait plus de termes que le dividende, il ne faut pas croire pour cela que le dividende soit plus petit que le quotient ; car tant que le diviseur $a - b$ sera quelque chose de positif, le produit du quotient positif $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ par la quantité positive $a - b$, donnera certainement au produit quelque chose de plus grand que ce même quotient : donc $a^4 - b^4$, qui est le produit, est plus grand que $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$. D'ailleurs en Algebre une quantité qui a plus de dimension qu'une autre, est toujours regardée comme la plus grande.

Si l'on avoit des quantités plus composées que les précédentes, on suivroit le même procédé dans l'opération, comme si l'on proposoit de diviser la quantité $6a^2 + 10ab + 17ac + 15bc + 12c^2$ par $2a + 3c$, on écriroit le dividende au dessus du diviseur, & le reste se feroit comme on le voit ci-dessous.

Dividende $6a^2 + 10ab + 17ac + 15bc + 12c^2$ { $3a + 5b + 4c$, quot. total.

Diviseur $2a + 3c$ ($3a$, premier quotient.

Produit $6a^2 + 9ac$

Soustraction $6a^2 + 10ab + 17ac - 6a^2 - 9ac + 15bc + 12c^2$

Réduction ou nouveau dividende { $10ab + 8ac + 15bc + 12cc$

Diviseur $2a + 3c$ ($5b$, second quotient.

Produit $10ab + 15bc$

Soustraction $10ab + 8ac + 15bc + 12cc - 10ab - 15bc$.

Réduction ou nouveau dividende { $8ac + 12cc$

Diviseur $2a + 3c$ ($4c$, troisieme quotient.

Produit $8ac + 12cc$

Soustraction $8ac + 12cc - 8ac - 12cc = 0$.

Si le dividende & le diviſeur contenoient pluſieurs puiſſances d'une même lettre, il faudroit diſpoſer les termes du dividende par rapport aux différentes puiſſances d'une même lettre, en regardant comme premier terme celui dans lequel cette puiſſance ſeroit la plus élevée, comme ſecond celui où elle ſe trouveroit d'un degré moins élevée, & ainſi des autres. Ayant fait la même opération ſur le diviſeur, il faudroit faire la Diviſion ſelon les regles précédentes; c'eſt ce que l'on appelle ordonner une quantité par rapport à une lettre. Par exemple, ſi l'on propoſe de diviſer $22a^4b + 9ab^4 + 12a^2b^3$ $19a^3b^2 + 8a^5$, par $4a^3 + 2ab^2 + 3b^3 + 5a^2b$, on commencera par ordonner le dividende par rapport à la lettre a, en regardant le terme $8a^5$ comme le premier, parce qu'il contient la plus haute puiſſance de la lettre a; & en ſuivant le même principe, on aura le dividende ordonné, $8a^5 + 22a^4b + 19a^3b^2 + 12a^2b^3 + 9ab^4$, on fera de même pour le diviſeur, & l'on aura le diviſeur ordonné, $4a^3 + 5a^2b + 2ab^2 + 3b^3$. Le reſte de la Diviſion ſe fera préciſément comme les précédentes.

Dividende $8a^5 + 22a^4b + 19a^3b^2 + 12a^2b^3 + 9ab^4$

Diviſeur $4a^3 + 5a^2b + 2ab^2 + 3b^3$ ($2a^2 + 3ab$, quot. total.

Produit $8a^5 + 10a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3$ (1er quotient $2a^2$.

Souſtraction $8a^5 + 22a^4b + 19a^3b^2 + 12ab^3 + 9ab^4 - 8a^5$ $- 10a^4b - 4a^3b^2 - 6a^2b^3$.

Réduction ou nouveau dividende $\{$ $12a^4b + 15a^3b^2 + 6a^2b^3 + 9ab^4$

Diviſeur $4a^3 + 5a^2b + 2ab^2 + 3b^3$ (2e quotient $3ab$.

Produit. $12a^4 + 15a^3b^2 + 6a^2b^3 + 9ab^4$

Souſtraction $12a^4b + 15a^3b^2 + 6a^2b^3 + 9ab^4 - 12a^4b^2$ $- 15a^3b^2 - 6a^2b^3 - 9ab^4 = 0$.

AVERTISSEMENT.

Nous n'avons point parlé des quatre Regles ordinaires d'Arithmétique, parce que nous avons ſuppoſé que ceux qui étudieront ce Traité, ſçauront au moins l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication & la Diviſion; mais comme pluſieurs pourroient n'avoir aucune connoiſſance des parties plus relevées, & même ignorer la maniere dont on doit pratiquer la Multiplication dans certain cas, lorſque le multiplicateur &

le multiplicande font chacun des nombres complexes; nous allons commencer par expliquer la méthode de faire cette opération par le fecours des parties aliquotes, que nous appliquerons fur le champ à des exemples. Cette partie eft d'autant plus néceffaire, qu'elle fervira beaucoup pour l'intelligence du toifé, que nous donnerons dans la fuite.

Définitions.

74. On dit qu'une grandeur eft *partie aliquote* d'un tout ou d'une autre grandeur, lorfqu'elle eft contenue un nombre de fois jufte dans cette autre. Ainfi le pied eft partie aliquote de la toife, parce qu'il y eft contenu fix fois jufte; le fol eft une partie aliquote de la livre, parce que la livre vaut vingt fols: de même ces autres nombres, 2, 4, 5, 10 fols font des parties aliquotes de la livre, parce que chacun d'eux eft contenue exactement un certain nombre de fois dans la livre.

Lorfqu'une grandeur n'eft pas contenue exactement dans une autre, & fans refte, elle eft appellée partie aliquante de cette grandeur: ainfi 9 fols eft une *partie aliquante* de la livre, parce que cette grandeur eft contenue deux fois dans la livre, avec un refte 2; de même 17 fols, 15 fols font des parties aliquantes de la livre pour la même raifon: 5 pouces, 7 pouces, 8 pouces font des parties aliquantes du pied, parce que chacune de ces grandeurs font contenues dans le pied, avec des reftes.

Remarque.

75. Quoique, felon les définitions précédentes, une partie aliquante ne puiffe pas être partie aliquote d'un même tout, néanmoins on peut décompofer cette quantité en d'autres, qui foient parties aliquotes du tout, & dont la fomme foit égale à la partie aliquante propofée; ainfi ce nombre 17 fols eft égal à 10 + 5 + 2, qui font chacun des parties aliquotes de la livre, dont il n'eft qu'une partie aliquante. Tout l'art des opérations que nous allons faire confifte à décompofer les parties aliquantes en parties aliquotes, en faifant enforte, autant qu'il eft poffible, que ces parties foient non feulement parties aliquotes de ce tout ou de l'unité principale, mais encore les unes des autres.

76. On appelle multiplication complexe celle dans laquelle

le multiplicateur ou le multiplicande, ou tous les deux ensemble, contiennent chacun des unités de différentes especes, quoique réductibles à la même, ainsi que dans la question suivante.

EXEMPLE I.

On demande le prix de 45 toises 3 pieds de maçonnerie, à 9 liv. la toise.

Pour avoir le prix que l'on cherche, il faudra multiplier 45 toises 3 pieds par 9 liv. ou, pour mieux dire, il faudra prendre 45 fois 9 l. & la moitié de 9 livres, parce que 3 pieds sont la moitié d'une toise, dont le prix doit aussi être moitié du prix de la toise : car en général il est ridicule de dire que l'on multiplie des livres, des sols & des deniers par des toises, des pieds, des pouces, &c. D'ailleurs, suivant un tel énoncé, il est impossible de déterminer la nature des unités du produit : mais il faut regarder un des nombres comme un nombre abstrait, c'est-à-dire dont les unités ne marquent que des nombres de fois, & dont les parties marquent des parties correspondantes d'une fois. Ainsi dans notre exemple, comme on cherche le prix de 45 toises 3 pieds, à 9 liv. la toise, puisque pour une toise il faut prendre une fois 9 liv. pour 45 toises, il faudra prendre 45 fois 9 livres, & pour 3 pieds, moitié d'une toise, il faudra prendre une moitié de fois 9 liv. ou la moitié de 9 liv. Le produit de 9 liv. par 45 liv. est 405 livres, la moitié de 9 liv. est 4 liv. 10 sols; ainsi la somme 409 liv. 10 sols est le prix demandé.

	45 tois.	3 pieds.
	9 liv.	
	405	
Pour 3 toises	4	10
Total	409	10

EXEMPLE II.

On demande le prix de 3 toises 2 pieds 6 pouces, à 5 liv. 4 f. 6 den. la toise courante.

Pour avoir le prix demandé, il faudra multiplier 5 liv. 4 f. 6 den. par 3 toises 2 pieds 6 pouces, ou, pour mieux dire, il faudra chercher le prix de 3 t. à 5 liv. 4 sols 6 den. le prix

5 liv.	4 sols	6 den.	
3 tois.	2 pi.	6 pouces.	
15 liv.	13 sols	6 den.	*prix de 3 toises.*
1 ..	14 ..	10	*prix de 2 pieds.*
0 ..	8 ..	8 $\frac{1}{2}$	*prix de 6 pouces.*
17 ..	17 ..	0 $\frac{1}{2}$	*prix total.*

de deux pieds & celui de six pouces, en considérant ces nombres comme des parties de la toise, & prenant pour leur prix les mêmes parties du prix de la toise. Ayant disposé ces nombres l'un au dessus de l'autre, comme on voit ici, on commencera la Multiplication par les plus petites especes, parce qu'il n'y a qu'un chiffre au rang des livres, & l'on dira : 3 fois 6 font 18, pose 6 d. & retiens 1 pour 12. On passera delà aux sols, en disant, 3 fois 4 font 12, & 1 que j'ai retenu c'est 13, que je pose au rang des sols. On passera de même aux livres, & l'on dira, 3 fois 5 font 15 l., que je mets au rang des livres. Pour avoir le prix de deux pieds, on fera attention que deux pieds étant le tiers de la toise, il faudra aussi que le prix de deux pieds soit le tiers du prix de la toise : par conséquent il faudra diviser le prix de la toise par 3, en disant, le tiers de 5 l. est 1 pour 3, reste 2 l. ou 40 sols, qui joints avec les 4 sols suivans, font 44, dont le tiers est 14 pour 42, reste 2 sols ou 24 den., lesquels joints avec les 6 den. suivans, font 30 den., dont le tiers est 10, que l'on posera au rang des deniers. Enfin pour avoir le prix de 6 pouces, on remarquera que 6 pouces étant le quart de 2 pieds ou 24 pouces, le prix de 6 pouces doit être le quart du prix de deux pieds, & l'on prendra le quart d'une liv. 14 s. 10 den., en disant, le quart d'une livre n'est point, je pose zero au rang des livres; je réduis la livre en sols, ce qui me donne 20 sols, lesquels ajoutés à 14, font 34, dont le quart est 8 pour 32, reste 2 s. ou 24 den., lesquels ajoutés aux dix suivans, font 34 den., dont le quart est 8 $\frac{1}{2}$, que je pose au rang des deniers. Faisant l'addition de ces différens produits, on aura pour le prix total de 3 toises 2 pieds 6 pouces, à 5 liv. 4 s. 4 den. la toise, 17 liv. 17 sols 0 $\frac{1}{2}$ den.

Exemple III.

On demande le prix de 43 aunes deux tiers d'étoffe, à 12 l. 10 s. 8 den. l'aune.

Comme dans cet exemple la premiere partie 43 du multiplicateur est composée de deux chiffres, & que l'on ne verroit pas tout d'un coup la valeur de 43 fois 8 deniers, on commencera la Multiplication par les plus hautes especes. On cherchera donc d'abord le prix de 43 aunes à 12 livres, le prix de 43 aunes à 10 sols, & le prix de 43 aunes à 8 deniers.

On trouvera le prix de 43 aunes, à 12 liv. l'aune, en multi-

pliant 43 par 12. Pour avoir ensuite le prix de 43 aunes, à 10 sols, on remarquera que le prix de 43 aunes, à une livre, seroit 43 liv.; donc puisque 10 sols sont la moitié d'une livre, le prix de 43 aunes, à 10 sols, sera la moitié de 43 liv. On en prendra donc la moitié, en disant: la moitié de 4 est 2, que l'on posera au dessous des dixaines de livres; la moitié de 3 est 1, que l'on posera sous les unités des livres, reste une livre, dont la moitié est 10 sols, que l'on posera au rang des sols. Pour avoir le prix de 43 aunes, à 8 d. on remarquera que 8 den. sont le tiers de 2 sols: on commencera donc par chercher le produit de 43 aunes, à 2 sols, que l'on barrera, parce qu'il ne doit point entrer dans la somme. Pour avoir le faux produit, on prendra le cinquieme de celui que l'on vient de trouver pour 10 sols, en disant: le cinquieme de 21 liv. est 4, que je pose au rang des livres, reste une livre, laquelle jointe avec 10 sols, donne 30 sols, dont le cinquieme est 6. Je prends le tiers de ce produit, en disant: le tiers de 4 liv. est une liv. pour 3, reste une livre, qui jointe avec les 6 sols suivans, donne 26 sols, dont le tiers est 8 pour 24, reste 2 sols ou 24 deniers, dont le tiers est 8, que je pose au rang des deniers, & j'ai le prix de 43 aunes, à 8 deniers l'aune. Enfin pour avoir le prix des deux tiers d'aunes, je prends deux fois le tiers du prix d'une aune, en disant: le tiers de 12 liv. est 4 livres, que je pose au rang des livres. Le tiers de 10 sols est 3 pour 9, reste un sol ou 12 deniers, qui joints aux 8 suivans, font 20, dont le tiers est $6\frac{2}{3}$; j'écris deux fois le produit, puis faisant l'addition des produits particuliers, je trouve pour le prix total 547 liv. 5 sols 9 den.

	12 liv.	10 sols	8 den.
	$43\frac{2}{3}$		
Prix de 43 aunes.	36		
à 12 liv.	48		
à 10 sols . .	21 liv.	10 sols	0 den.
Faux prod. de 2 s. à 8 den. . . .	~~4~~ liv.	~~6~~	~~0~~
	1	8	8
Prix d'un tiers.	4	3	$6\frac{2}{3}$
	4	3	$6\frac{2}{3}$
TOTAL	547	5	$8\frac{2}{3}$

EXEMPLE IV.

On demande le prix de 5 marcs 6 onces 2 gros de cuivre, à 4 liv. 7 sols 8 den. le marc.

Tout le monde sçait que la livre vaut deux marcs, le marc 8 onces, l'once 8 gros, le gros 3 deniers, le denier 24 grains, ce qui donne 9216 grains pour la livre. Cela posé,

	4 liv.	7 sols	8 den.
	5 m.	6 on.	2 gros
Prix de 5 marcs.	21 liv.	18 sols	4 den.
de 4 onc.	2	3	10
de 2 onc.	1	1	11
de 2 gros	0	2	$8\frac{7}{8}$
TOTAL	25	6	$9\frac{7}{8}$

Ayant disposé ces deux nombres, comme on voit ici, en regardant 4 liv. 7 s. 8 den. comme le multiplicande, & 5 marcs 6 onces 2 gros comme le multiplicateur : comme la partie de ce même multiplicateur, qui contient les marcs, n'est composée que d'un seul chiffre, on cherchera d'abord le prix de 5 marcs, à 4 liv. 7 sols 8 den. le marc, que l'on trouvera en multipliant 4 liv. 5 sols 8 den. par 5, à commencer par les deniers, en disant, cinq fois 8 font 40 deniers, je pose 4, & retiens 3 pour 36; passant ensuite aux sols, 7 fois 5 font 35, & 3 que j'ai retenue font 38, pose 18, & retiens une livre; passant de même aux livres, 5 fois 4 font 20, & une que j'ai retenue font 21. Pour avoir après cela le prix de 6 onces, qui est une partie aliquante du marc, on les divisera en ces deux parties, 4 & 2, qui sont chacune partie aliquote du marc, & partie aliquote l'une de l'autre; & comme 4 onces sont la moitié du marc, on prendra la moitié du prix d'un marc, en disant, la moitié de 4 liv. est 2, la moitié de 7 sols est 3 pour 6, reste un sol ou 12 deniers, qui joints avec les 8 suivans, font 20, dont la moitié est 10; on prendra de même la moitié de ce dernier produit pour avoir le prix de deux onces, que l'on trouvera d'une livre 1 sol 11 den. Enfin pour avoir le prix de deux gros, on remarquera que le gros étant la 8e partie de l'once, deux gros seront la 8e partie de deux onces, & par conséquent le prix de deux gros sera aussi la huitieme partie de celui de deux onces, que l'on vient d'écrire. On dira donc, la huitieme partie d'une livre n'est point, je pose 0 au rang des livres; la huitieme partie de 21 sols est 2 pour 16, reste 5 sols, qui valent 60 deniers, lesquels joints avec les 11 d. suivans, donnent 71, dont la huitieme partie est 8 pour 64, avec un reste 7; ce qui donne en tout pour le prix de deux gros, 0 liv. 2 sols 8 den. $\frac{7}{8}$. Ajoutant ces différens produits, on aura le prix total de 25 liv. 6 sols 9 den. $\frac{7}{8}$.

EXEMPLE

EXEMPLE V.

On demande le prix de 325 marcs 7 onces 5 gros 2 deniers 16 grains d'un certain métal, à 54 liv. 18 sols 9 den. le marc.

	325 marcs	7 onces	5 gros 2 den.	16 grains.
	54 liv.	18 sols	9 den.	
Pour 325 marcs	1300			
à 54 liv.	1625	0	0	
à 10 sols	162	10	0	
à 4 sols	65	0	0	
à 4 sols	65	0	0	
à 6 den.	8	2	6	
à 3 den.	4	1	3	
Prix de 325 marcs à 54 liv. 18 s. 9 den.	17854 liv.	13 sols	9 den.	
Prix de — *4 onces*	27	9	4	
2 onces	13	14	8	
1 once	6	17	4	
4 gros	3	8	8	
1 gros	0	17	2	
1 denier	0	5	8	
1 denier	0	5	8	
8 grains	0	1	10	
8 grains	0	1	10	
	17907	15	11	

Comme le premier terme du multiplicande, & celui du multiplicateur sont nombres composés de plusieurs chiffres, on cherchera d'abord le prix de 325 marcs, à 54 liv. le marc, ce qui se fera en multipliant 325 par 54; on cherchera ensuite le prix de 325 marcs, à 18 sols le marc, ce qui se fera en divisant 18 sols en ses parties, 10 + 4 + 4, qui sont chacune des parties aliquotes de la livre, & prenant pour 10 sols la moitié de 325, en disant, la moitié de 3 est 1 pour 2, reste 1, qui joint avec le 2 suivant fait 12, dont la moitié est 6; la moitié de 5 est 2 pour 4, reste une livre ou 20 sols, dont la moitié est 10 sols, que je pose au rang des sols. Pour 4 sols on cherchera le cinquieme de 325, parce que 4 sols fait la cinquieme partie

de la livre, & l'on dira la cinquieme partie de 32 est 6 pour 30, reste 2, qui joints avec le 5 suivant, font 25, dont la cinquieme partie est 5, ainsi l'on écrira deux fois 65, qui est le cinquieme de 325, & l'on aura le prix de 325 marcs à 18 sols.

On passera ensuite aux deniers 9, que l'on divisera en deux parties, 6, 3, dont la premiere 6 est la huitieme partie de 4 sols, & la seconde 3 est moitié de la premiere 6; on prendra donc la huitieme partie du prix que l'on vient de trouver pour 4 f. en disant la huitieme partie de 65 est 8 pour 64, pose 8 au rang des livres, reste 1 liv. ou 20 sols, dont la huitieme partie est 2 f. pour 16, reste 4 sols ou 48 deniers, dont la huitieme partie est 6 deniers; pour 3 den. on prendra la moitié de ce que l'on vient de trouver pour 6, & l'on aura évidemment 4 liv. 1 sol 3 den. Toutes ces opérations achevées, on aura le prix de 225 marcs, à 54 liv. 18 f. 9 den. le marc; & comme cette partie devient déja un peu compliquée, on pourra d'abord prendre la somme de ces produits particuliers, pour être moins exposé à se tromper dans l'addition totale. On passera ensuite aux onces, & l'on divisera le nombre 7, qui marque combien il y en a en 4, 2, 1, qui sont chacune partie aliquote du marc, & partie aliquote l'une de l'autre; pour 4 onces on prendra la moitié de 54 liv. 18 sols 9 den. en disant, la moitié de 54 livres est 27 livres, la moitié de 18 sols est 9 sols, la moitié de 9 den. est 4 den. $\frac{1}{2}$; pour 2 onces on prendra la moitié de ce que l'on vient de trouver, en disant, la moitié de 27 est 13 pour 26, je pose 13 au rang des livres, reste 1 liv. ou 20 sols, qui joint avec les 9 qui sont après, donne 29 sols, dont la moitié est 14 pour 28, reste un sol ou 12 deniers, qui joints avec le 4 suivant, font 16 deniers, dont la moitié est 8 (on négligera ici toutes les fractions, parce qu'elles ne pourroient monter qu'à 3 ou 4 d. & que d'ailleurs, pour en avoir exactement la somme, cela supposeroit le calcul de ces nombres, que nous n'avons pas encore donné). Pour une once on prendra encore la moitié de ce que l'on vient de trouver, en disant, la moitié de 13 est 6 pour 12, reste 1 liv. ou 20 sols, qui joints avec les 14 suivans, font 34, dont la moitié est 17; la moitié de 8 deniers est 4. On passera des onces au gros, & l'on divisera 5 en deux parties, 4 & 1, pour 4 gros on prendra la moitié du prix d'une once, parce que l'once vaut 8 gros, & l'on aura 3 liv. 8 f. 8 d. Pour un gros on prendra le quart du prix de 4 gros, en disant,

le quart de 3 liv. n'eſt point, je poſe zero au rang des livres, le quart de 68 eſt 17, le quart de 8 eſt 2.

On paſſera pareillement aux deniers, & pour 2 den. on prendra deux fois le tiers de 17 ſols 2 den. que l'on vient de trouver pour le prix du gros, qui vaut 3 deniers, & l'on aura 5 ſ. 8 den. que l'on écrira deux fois. Enfin pour avoir le prix de 16 grains, on prendra encore deux fois le tiers de 5 ſols 8 den. que l'on vient de trouver pour le prix d'un denier, qui vaut 24 grains, dont 16 grains ſont les deux tiers, & l'on aura un ſol 10 den. que l'on écrira deux fois; ajoutant tous ces prix particuliers, on aura le prix total de 325 marcs 7 onces 5 gros 2 den. 16 gr. que l'on trouvera, par l'addition, de 17907 liv. 15 ſols 11 den.

REMARQUE.

On pourroit, ſans ſçavoir le calcul des fractions, opérer ſur les plus petites parties des deniers, en imaginant le denier diviſé en douze parties, & chaque partie diviſée encore en douze autres parties, ainſi pour $\frac{1}{2}$ on prendroit 6, pour $\frac{1}{3}$ on prendroit 4, & ainſi de ſuite, & dans l'addition de ces parties, on retiendroit autant de deniers que l'on auroit trouvé de fois douze. Nous allons appliquer cette méthode à l'exemple ſuivant.

EXEMPLE VI.

On demande le prix de 247 toiſes 5 pieds 9 pouces de maçonnerie, à 25 liv. 19 ſols 11 den. la toiſe.

Après avoir diſpoſé le multiplicande & le multiplicateur, comme on le voit ici, on multipliera d'abord 247 par 25 pour avoir le prix de 247 toiſes, à 25 liv. la toiſe. On cherchera enſuite le prix de 247 toiſes, à 19 ſ. en prenant d'abord pour 10 ſols la moitié du nombre 247, regardé comme 247 livres, & l'on dira, la moitié de 2 eſt 1, la moitié de 4 eſt 2, la moitié de 7 eſt 3 pour 6, reſte une livre ou 20 ſols, dont la moitié eſt 10. On cherchera pareille-

	247 toiſ.	5 pi.	9 pou.	
Prix de	25 liv.	19 ſ.	11 den.	
247 toiſ.				
à 25 liv.	1235			
	494			
à 10 ſols	123	10	0	
à 5 ſols	61	15	0	
à 4 ſols	49	8	0	
à 6 den.	6	3	6	
à 3 den.	3	1	9	
à 2 den.	2	1	2	
Prix de 3 pi.	12	19	11	6
de 2 pieds	8	13	3	8
de 6 pouces	2	3	3	11
de 3 pouces	1	1	7	11
Prix total	6445	17	8	0

ment le prix de 247 toises à 5 sols, & l'on prendra la moitié du prix que l'on vient de trouver pour 10, en disant, la moitié de 12 est 6, la moitié de 3 est 1, reste 1 liv. qui joint avec les 10 f. suivant fait 30 sols, dont la moitié est 15. On prendra encore le prix de 247 toises, à 4 f. en prenant le cinquieme de 247, & l'on dira le cinquieme de 24 est 4 pour 20, le cinquieme de 47 est 9 pour 45, reste 2 liv. ou 40 sols, dont le cinquieme est 8, que l'on posera au rang des sols. Ces opérations faites, on aura le prix de 247 toises, à 19 sols: car il est évident que 10 + 5 + 4 est égal à 19: on cherchera ensuite le prix de 247 toif. à 11 den. & pour ce, l'on partagera les 11 den. en parties aliquotes de 4 sols, 6 + 3 + 2, & comme 6 est le 8e de 4 sols ou de 48 den. on prendra le huitieme du prix que l'on vient de trouver pour 4 sols, en disant, la huitieme partie de 49 est 6 pour 48, reste une livre ou 20 sols, qui joints avec les 8 suivans, fait 28 sols, dont le huitieme est 3 pour 24, reste 4 f. ou 48 deniers, dont le huitieme est 6. Pour 3 den. on prendra la moitié du dernier prix que l'on trouvera de 3 liv. 1 sol 9 den. Enfin pour 2 den. on prendra le tiers de ce même nombre, que l'on trouvera de 2 liv. 1 sol 2 deniers: on cherchera ensuite le prix de 5 pieds, que l'on divisera en deux parties 3 . 2, pour 3 pieds, on prendra la moitié du prix de la toise, en disant, la moitié de 25 est 12 pour 24, reste 1 ou 20, qui joints à 19, font 39; la moitié de 39 sols est 19 pour 38, reste 1 sol ou 12 den. qui joints aux 11 suivans, font 23, dont la moitié est 11 den. & suivant la remarque précédente, la moitié de 12 est 6. Pour 2 pieds on prendra le tiers du même prix, en disant: le tiers de 25 est 8 pour 24, reste 1 liv. ou 20 sols, lesquels joints avec les 19 suivans, font 39, dont le tiers est 13; le tiers de 11 est 3, reste 2 ou 24, dont le tiers est 8. Enfin pour avoir le prix de 9 pouces, je les regarde comme 6 + 3: pour 6 pouces, je prends le quart du prix de deux pieds, en disant, le quart de 8 est 2, le quart de 13 est 3 pour 12, reste 1 sol ou 12 den. qui joints avec les 3 suivans, font 15, dont le quart est 3, reste 3 ou 36, qui joints aux 8 suivans, font 44, dont le quart est 11. Enfin pour 3 pouces je prends la moitié de 2 liv. 3 f. 3 den. $\frac{11}{12}$ que je trouve d'une livre 1 sol 7 den. $\frac{11}{12}$. Ajoutant tous ces produits particuliers, on aura pour le prix total de 247 toises 5 pieds 9 pouces, à 25 liv. 19 sols 11 den. la toise, 6445 liv. 17 sols 8 deniers.

TRAITÉ
DES FRACTIONS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES.

DÉFINITION I.

76. SI l'on divise une unité quelconque, que nous appellerons unité principale, comme une toise, un pied, une livre, &c. en un certain nombre de parties égales, chacune de ces parties sera appellée *unité fractionnaire*, pour la distinguer de l'unité principale que l'on divise, & le nombre qui marquera combien on prend de ces parties égales, sera appellé une fraction, que l'on exprime ainsi, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, & que l'on prononce deux tiers, cinq sixiemes. On a déja vu qu'une barre placée entre deux grandeurs, indique la division de la grandeur supérieure, & c'est encore ce qui arrive ici.

II.

77. Le nombre que l'on met au dessous de la barre s'appelle *dénominateur*, parce qu'il fait voir en combien de parties égales on a partagé ou divisé l'unité principale. Dans les fractions précédentes, les nombres 3 & 6 sont les dénominateurs de ces fractions, parce qu'ils désignent que les unités principales ont été divisées en trois ou en six parties égales.

III.

78. Le nombre que l'on met au dessus de la barre horizontale s'appelle *numérateur*, parce qu'il compte effectivement combien on prend de parties égales : ainsi 2 & 5 sont les numérateurs des fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{6}$. Les fractions algébriques se marquent précisément de la même maniere ; ainsi $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{g}$ sont des fractions algébriques, dont les numérateurs sont a, c, f, & les dénominateurs b, d, g.

COROLLAIRE I.

79. Si le numérateur est égal, plus petit ou plus grand que le dénominateur, la fraction sera aussi égale à l'unité, ou plus petite ou plus grande que l'unité; car un tout est égal à toutes ses parties prises ensemble, & plus grand qu'une de ses parties;

& plus petit que toutes ses parties prises ensemble, ajoutées à quelqu'une de ses parties.

COROLLAIRE II.

80. La grandeur d'une fraction dépend de la grandeur du numérateur de cette fraction; ensorte que de deux fractions qui ont même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur, & la plus petite, celle qui a le plus petit numérateur; car il est évident que la fraction $\frac{5}{6}$ est plus grande que la fraction $\frac{3}{6}$, par la même raison que 5 est plus grand que 3, quelle que soit la nature des unités du 6 & du 3, pourvu qu'elle soit la même pour l'un & pour l'autre.

COROLLAIRE III.

81. Plus le nombre dans lequel on divise un même tout est grand, plus chaque partie est petite, & par conséquent plus le dénominateur d'une fraction est grand, le numérateur restant le même, plus aussi la fraction est petite; c'est ce que les Géometres expriment, en disant que deux fractions qui ont un même numérateur sont entr'elles réciproquement comme leurs dénominateurs; car il est évident que la fraction $\frac{2}{3}$ est plus grande que la fraction $\frac{2}{5}$, pourvu qu'elles soient chacune fraction d'une même unité principale, d'une toise par exemple, d'un pied, &c.

COROLLAIRE IV.

82. Les fractions étant des parties de certaines grandeurs ou unités principales, sont de même nature qu'elles, & par conséquent sont susceptibles comme elles d'augmentation ou de diminution. Donc on peut faire sur les fractions les mêmes opérations que l'on fait sur les entiers, c'est-à-dire qu'on peut les ajouter, les soustraire, les multiplier, ou les diviser les unes par les autres.

Outre les quatre opérations qui leur sont communes avec les nombres entiers, il y en a trois autres qui leur sont particulieres, & dont les premieres dépendent. La premiere de ces trois est d'évaluer une fraction, ou de déterminer sa valeur en quantités connues; la seconde est de réduire les fractions à leurs moindres termes, & la troisieme est de les réduire au même dénominateur. Nous allons commencer par expliquer ces opérations, par le secours desquelles on pourra faire aisément toutes les autres.

PROBLEME I.

83. *Evaluer une fraction, ou, ce qui est la même chose, trouver en valeurs connues, moindre que l'unité principale, une quantité égale à une fraction proposée.*

On divisera l'unité principale en autant de parties égales qu'il y a d'unités au dénominateur; on multipliera ensuite le quotient par le numérateur, & le produit sera la valeur de la fraction proposée. Comme si l'on proposoit d'évaluer cette fraction $\frac{2}{5}$ de liv. je divise la livre, qui est ici l'unité principale, & qui vaut 20 sols, en cinq parties égales, dont chacune est 4 sols, lesquels multipliés par le numérateur 2, font connoître que la fraction $\frac{2}{5}$ de liv. vaut 5 sols. De même si l'on propose d'évaluer cette fraction $\frac{5}{6}$ de pied, je divise le pied ou 12 pouces en six parties égales, lesquelles sont chacune de deux pouces, je multiplie ce quotient 2 par le numérateur 5; le produit 10 me marque que la fraction $\frac{5}{6}$ de pied vaut 10 pouces. Cette premiere opération n'a pas lieu dans les fractions algébriques, $\frac{a}{b}$ est $\frac{a}{b}$, & l'on ne pourroit l'évaluer qu'après avoir substitué à la place de a & de b les grandeurs qu'elles expriment.

DÉFINITION.

84. On dit qu'une fraction est *réduite à ses moindres termes*, ou *à sa plus simple expression*, lorsque le numérateur & le dénominateur de cette fraction n'ont pas d'autres diviseurs communs que l'unité: ainsi ces fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{9}$ sont des fractions réduites à leurs moindres termes. Il n'en est pas de même des fractions $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{16}$, qui sont telles, qu'on en peut trouver d'autres qui leur soient égales, & dont les termes soient plus petit, comme $\frac{1}{3}$ pour la premiere, & $\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4}$ pour la seconde, que l'on trouve en divisant les deux termes de la premiere par 3, & les deux termes de la seconde par 2 ou par 4.

85. Si le nombre par lequel on divise les deux termes d'une fraction est le plus grand diviseur possible, commun au numérateur & au dénominateur, la fraction qui résultera des deux quotiens, divisés l'un par l'autre, sera aussi la plus simple fraction possible, & égale à la premiere.

86. En Algebre une fraction est réduite à ses moindres termes, lorsqu'elle n'a point de lettre commune au numérateur

& au dénominateur. Ainsi $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{gf}{mn}$ sont des fractions algébriques irréductibles.

PROBLEME II.

87. *Trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, 360 & 792, ou, ce qui est la même chose, réduire la fraction $\frac{360}{792}$ à ses moindres termes.*

SOLUTION.

On divisera le plus grand nombre 792 par le plus petit 360, & négligeant le quotient 2, on divisera de nouveau le plus petit 360 par le reste 72; & comme la division de ces deux nombres se fait exactement, on en conclura que 72 est le plus grand diviseur possible, commun aux deux nombres 792 & 360. De même soit proposé de trouver le plus grand commun diviseur des deux nombres 91 & 294, ou, ce qui est la même chose, de réduire la fraction $\frac{91}{294}$ à ses moindres termes; je divise le plus grand nombre 294 par le plus petit 91, il vient 3 au quotient, que je néglige, avec un reste 21; je divise le plus petit nombre 91 par le reste 21, il vient encore 3 au quotient, que je néglige pareillement, avec un reste 7: je divise le premier reste 21 par le second 7, & comme la division se fait exactement & sans reste, je conclus que le nombre 7 est le plus grand commun diviseur aux deux nombres 294 & 91. En général le reste qui divise exactement le reste précédent, est toujours le plus grand commun diviseur que l'on cherche; divisant donc le numérateur & le dénominateur de la 1re fraction $\frac{360}{792}$ par le plus grand diviseur commun 72, on aura la fraction $\frac{5}{11}$, qui est irréductible, & égale à la proposée. Divisant de même le numérateur & le dénominateur de la seconde fraction $\frac{91}{294}$ par le plus grand commun diviseur 7, on aura la nouvelle fraction $\frac{13}{42}$ égale à la précédente, & réduite à sa plus simple expression.

Démonstration de cette pratique.

Pour concevoir la raison de ces opérations, on fera attention, 1°. qu'un nombre qui divise exactement une grandeur, est aussi diviseur exact de ses multiples, ou des nombres qui résultent du produit de cette grandeur par une autre quelconque. Par exemple, si 3 est diviseur de 6, il sera aussi diviseur

ſeur de 6×4, de 6×5, ou des nombres 24 & 30, &c.

2°. Qu'un nombre qui diviſe les deux parties d'un tout, ſera auſſi diviſeur du tout, parce qu'un nombre eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble; ainſi le nombre 3 étant diviſeur des nombres 9 & 6, eſt auſſi diviſeur de leur ſomme 15.

3°. Que ſi un nombre eſt diviſeur d'un tout & d'une de ſes parties, il ſera auſſi diviſeur de l'autre partie; car s'il ne la diviſoit pas, il ne ſeroit pas diviſeur du tout, ce qui eſt contre l'hypotheſe: ainſi le nombre 3 étant diviſeur du tout 15, & d'une de ſes parties 9, eſt auſſi diviſeur de l'autre 6.

Cela poſé, que a & b repréſentent les deux nombres, dont on demande le plus grand commun diviſeur, que a diviſé par b donne un quotient f avec le reſte d, on aura $a = bf + d$; car un dividende quelconque eſt égal au produit du diviſeur par le quotient joint au reſte de la diviſion. Que b, diviſé par le premier reſte d, donne un quotient g avec le reſte c, on aura par la même raiſon $b = dg + c$: enfin que le dernier reſte c diviſe exactement le premier d, en donnant h au quotient, on aura encore $d = ch$; & raſſemblant toutes ces égalités, on aura $a = bf + d$, $b = dg + c$, & $d = ch$. Or il eſt évident que c eſt diviſeur des quantités a & b, car puiſque c eſt diviſeur de d, il eſt auſſi diviſeur de ſon multiple dg; d'ailleurs il eſt diviſeur de lui-même; donc il diviſe $dg + c$; donc il eſt diviſeur de b, à cauſe de l'équation $b = dg + c$. Puiſque c eſt diviſeur de d & de b, il eſt auſſi diviſeur des multiples de b; donc il diviſe $bf + d$; donc il eſt diviſeur de a, à cauſe de l'égalité $a = bf + d$.

Si l'on met dans l'équation $b = dg + c$ la quantité ch à la place de d qui lui eſt égale, on aura $b = cgh + c$; ſubſtituant pareillement cette valeur de b dans celle de a, ainſi que celle de d, on aura $a = cfgh + cf + ch$; donc au lieu de la fraction $\frac{a}{b}$ on auroit, ſuivant les ſuppoſitions que nous avons faites, $\frac{cfgh + cf + ch}{cgh + c}$, dans laquelle fraction il eſt aiſé de voir qu'il n'y a que la quantité c qui ſoit un diviſeur commun au numérateur & au dénominateur, & que cette lettre eſt en même tems le plus grand commun diviſeur. Comme le procédé numérique eſt préciſément le même, il faut auſſi qu'il faſſe trouver le commun diviſeur que l'on cherche; ainſi l'on pourra tou-

jours réduire une fraction quelconque à ses moindres termes.

PROBLEME III.

88. *Réduire deux ou plusieurs fractions à un même dénominateur, de maniere qu'elles soient toujours égales aux fractions proposées.*

SOLUTION.

S'il n'y a que deux fractions, on multipliera le numérateur & le dénominateur de chacune par le dénominateur de l'autre; & s'il y en a plusieurs, on multipliera le numérateur & le dénominateur de chacune par le produit des dénominateurs des autres fractions.

Dans l'un & dans l'autre cas les fractions auront même dénominateur; car le produit de tant de nombres que l'on voudra, multipliés les uns par les autres, sera toujours le même. De plus, chacune sera égale à la premiere fraction proposée, puisque le numérateur augmente par la multiplication dans la même proportion que les parties du dénominateur diminuent. La regle est précisément la même pour les fractions algébriques, & se démontre de la même maniere, comme on le va voir dans les exemples suivans.

Soient proposées les fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, pour être réduites au même dénominateur, on multipliera les deux termes 2 & 3 de la premiere par le dénominateur 5 de la seconde, & réciproquement les deux termes 4 & 5 de la seconde par le dénominateur 3 de la premiere, & l'on aura les deux nouvelles fractions $\frac{10}{15}$ & $\frac{12}{15}$ égales aux précédentes, & réduites en même dénomination. De même pour réduire les fractions algébriques $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ à la même dénomination, je multiplie a & b par d, & les termes c & d de la seconde par b, pour avoir les fractions $\frac{ad}{bd}$, $\frac{cb}{bd}$ qui sont égales aux précédentes, & ont même dénominateur bd.

Si l'on a plusieurs fractions, comme $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ à réduire, on multipliera les termes 2 & 3 de la fraction $\frac{2}{3}$ par 24, produit des deux autres dénominateurs 6 & 4; de même les termes 3 & 4 de la fraction $\frac{3}{4}$ par le nombre 18, produit des dénominateurs 3 & 6 des deux autres; & enfin les termes 5 & 6 de la fraction $\frac{5}{6}$ par 12, produit des dénominateurs 3 & 4 des deux

premieres, & l'on aura les trois nouvelles fractions $\frac{48}{72}$, $\frac{54}{72}$, $\frac{60}{72}$ égales aux précédentes, & qui ont même dénominateur.

En agissant de même, on verra que les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{g}$ deviendront celles-ci $\frac{adg}{bdg}$, $\frac{cbg}{bdg}$, $\frac{bdf}{bdg}$, qui ont évidemment même dénominateur.

REMARQUE.

89. Après avoir réduit les fractions proposées en même dénomination, il est à propos de voir si le dénominateur n'a pas quelque diviseur par lequel on puisse diviser tous les numérateurs, afin de simplifier les nouvelles fractions, ainsi que dans l'exemple précédent, où l'on peut diviser tous les numérateurs & le dénominateur commun par 6, ce qui réduit les fractions à celles-ci $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$ égales aux premieres, ayant même dénomination, & les plus simples que l'on puisse trouver, qui remplissent ces conditions.

90. S'il y a plusieurs dénominateurs parmi les fractions à réduire, qui ayent entr'eux un diviseur commun, deux par exemple, on pourra diviser une fois par ce diviseur chaque terme des nouvelles fractions réduites; s'il y en a trois qui ayent un diviseur commun, on pourra diviser toutes les nouvelles fractions deux fois de suite par le même diviseur, ou bien, si l'on veut, une fois par le quarré de ce diviseur commun. Dans l'exemple proposé ci-dessus; on a divisé toutes les nouvelles fractions par 6, parce que deux d'entr'elles avoient un même diviseur 3, sçavoir, la fraction $\frac{2}{3}$ & fraction $\frac{5}{6}$, & deux autres des mêmes fractions avoient à leurs dénominateurs un diviseur commun 2, sçavoir, la fraction $\frac{3}{4}$ & la fraction $\frac{5}{6}$, c'est pourquoi l'on divise par 2×3 ou par 6. On trouvera aisément la raison de ces opérations, si l'on décompose les dénominateurs de ces fractions dans leurs facteurs.

De l'Addition des Fractions.

91 Si les fractions que l'on veut ajouter ensemble n'ont pas un même dénominateur, on commencera par les y réduire: ainsi si l'on propose d'ajouter ensemble les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, on les réduira au même dénominateur, suivant l'art. 88, & l'on aura à la place de ces fractions $\frac{60}{90}$, $\frac{72}{90}$, $\frac{75}{90}$, ou plus simplement (article 89.) $\frac{20}{30}$, $\frac{24}{30}$, $\frac{25}{30}$, qui sont égales aux précédentes. On

prendra la somme de leurs numérateurs, pour en faire celui d'une nouvelle fraction, qui conservera le même dénominateur commun, & qui sera la somme des fractions proposées; cette somme se trouvera $\frac{63}{30}$ ou $\frac{21}{10}$, qui est irréductible. On opéreroit de même sur des fractions littérales; ainsi $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{f}{g} = \frac{adg + bcg + bdf}{bdg}$.

Si les fractions ont déja même dénomination, on n'aura pas la peine de les y réduire, le reste de l'opération s'achevera comme dans le cas précédent. La raison de cette opération est évidente, car puisque les fractions comptent des unités de même espece, étant réduites au même dénominateur, la somme de ces fractions ne differe pas de celle des numérateurs, par la même raison que la somme de ces différens nombres, 10 écus, 20 écus, 15 écus est égale à la somme des nombres $10 + 20 + 15 = 45$ écus.

De la Soustraction des Fractions.

92. Si les fractions ont un même dénominateur, on fera une nouvelle fraction, dont le numérateur soit égal à la différence des numérateurs des fractions proposées, & qui retiendra le même dénominateur. Par exemple, si l'on veut ôter $\frac{4}{6}$ de $\frac{5}{6}$, on ôtera le numérateur 4 du numérateur 5, & l'on écrira le reste 1 au dessus de la barre de division, en mettant au dessous le dénominateur pour avoir la fraction $\frac{1}{6}$ égale à la différence des fractions proposées. De même $\frac{5}{9} - \frac{3}{9} = \frac{2}{9}$, & en Algebre $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$, $\frac{d}{f} - \frac{g}{f} = \frac{d - g}{f}$.

Si les fractions n'ont pas un même dénominateur, on commencera par les y réduire (n°. 88), & le reste se fera comme dans le premier cas, soit sur les fractions numériques, soit sur les fractions algébriques. Par exemple, si l'on propose d'ôter la fraction $\frac{3}{7}$ de la fraction $\frac{2}{3}$, on les réduira d'abord en celles-ci qui leur sont égales, $\frac{14}{21}$ & $\frac{9}{21}$, dont la différence est $\frac{5}{21}$ égale à celle des fractions primitives $\frac{3}{7}$ & $\frac{2}{3}$; de même $\frac{5}{8} - \frac{4}{9} = \frac{45}{72} - \frac{32}{72} = \frac{13}{72}$. De même pour ôter de la fraction $\frac{a}{b}$ celle-ci $\frac{c}{d}$, on les réduira d'abord au même dénominateur, & prenant la différence des numérateurs des nouvelles fractions, on aura pour

celle des fractions proposées $\frac{ad - bc}{bd}$; de même encore $\frac{f}{g} - \frac{d}{h} = \frac{fh - dg}{gh}$, $\frac{r}{s} - \frac{x}{z} = \frac{rz - sx}{sz}$, &c.

93. Si l'on avoit plusieurs fractions à ôter de plusieurs autres fractions, on commenceroit par réduire celles que l'on doit ôter en même dénomination (selon l'art. 88.) pour avoir une seule fraction égale à leur somme; on feroit la même chose pour les fractions dont on doit soustraire les premieres : enfin on prendra la différence de ces nouvelles fractions, & l'on aura celle des fractions proposées. Par exemple, si l'on veut ôter les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{5}$ des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, je réduis les premieres en même dénomination, pour avoir à leur place les fractions $\frac{45}{90}$, $\frac{20}{90}$, $\frac{72}{90}$, dont la somme est $\frac{137}{90}$. Je réduis pareillement les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ en même dénomination pour avoir à leur place les fractions $\frac{48}{72}$, $\frac{54}{72}$, $\frac{60}{72}$, ou plus simplement $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$, dont la somme est $\frac{27}{12}$; réduisant donc les deux fractions $\frac{137}{90}$ & $\frac{27}{12}$ en même dénomination, la premiere deviendra $\frac{1644}{1080}$, & la seconde $\frac{2430}{1080}$; prenant la différence de ces fractions, on aura celle des fractions proposées de $\frac{786}{1080}$. On voit par cet exemple comment on peut déterminer laquelle de deux fractions est la plus grande, & de combien l'une surpasse l'autre, ce qui dans certains cas ne s'apperçoit pas tout d'un coup comme dans ces deux-ci, $\frac{48}{55}$ & $\frac{27}{32}$, à moins que l'on n'ait beaucoup d'habitude au calcul.

94. Si l'on vouloit soustraire un entier & une fraction d'un autre entier, & d'une autre fraction, il faudroit d'abord réduire l'entier en fraction, ce qui se feroit en le multipliant par le dénominateur de la fraction qui lui est jointe : ainsi pour que $a - \frac{cx}{d}$ soit tout en fraction, il faut multiplier a par d, & écrire $\frac{ad - cx}{d}$; de même pour ne faire qu'une seule fraction de l'entier $2y + \frac{bb}{f}$, l'on multipliera $2y$ par f pour avoir la fraction $\frac{2fy + bb}{f}$; ensuite pour soustraire ces deux fractions l'une de l'autre, par exemple, $\frac{ad - cx}{d}$ de $\frac{2fy + bb}{f}$, je les réduis au même dénominateur, & j'ai pour la seconde $\frac{2dfy + bbd}{df}$, & pour la premiere $\frac{adf - cfx}{df}$, dont la différence est $\frac{2dfy + bbd - adf + cfx}{df}$.

Pour concevoir aisément la raison de toutes ces opérations, il suffit de faire attention que les fractions ayant même dénominateur, leur différence est précisément celle des numérateurs; car il est évident que la différence de $\frac{3}{5}$ & $\frac{2}{5}$ est $\frac{1}{5}$, par la même raison que la différence de 3 à 2 est 1.

REMARQUE.

95. Une fraction n'est plus que la moitié, le tiers ou le quart de ce qu'elle étoit, si on multiplie son dénominateur par 2, par 3 ou par 4, puisque le nombre des parties dans lesquelles on divise l'unité principale devenant double, triple ou quadruple, chaque partie diminue dans la même proportion, & que d'ailleurs on n'en prend que le même nombre, puisque le numérateur ne change pas.

De la Multiplication des Fractions.

96. On peut multiplier une fraction par un entier ou par une autre fraction. Si le multiplicateur est un entier, on multipliera le numérateur de la fraction par l'entier donné, le produit sera le numérateur d'une nouvelle fraction, qui conservera le même dénominateur que la fraction multiplicande, & cette nouvelle fraction sera le produit cherché. Par exemple, si l'on veut multiplier la fraction $\frac{2}{3}$ par l'entier 4, je multiplie le numérateur 2 par l'entier 4, & le produit 8 sera le numérateur de la fraction $\frac{8}{3}$ égale au produit cherché. De même la fraction $\frac{4}{5} \times 6 = \frac{24}{5}$ la fraction $\frac{27}{32} \times 3 = \frac{81}{32}$; il en est de même pour les fractions algébriques. Le produit de $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$, $\frac{a}{g} \times \overline{c+d} = \frac{ac+ad}{g}$, $\frac{fg}{a} \times \overline{a-b} = \frac{afg-bfg}{a}$.

97. Si le multiplicateur est aussi une fraction, on multipliera les deux numérateurs l'un par l'autre, & les deux dénominateurs de même, le produit des numérateurs sera le numérateur d'une nouvelle fraction, dont le produit des dénominateurs sera le dénominateur, laquelle fraction sera le produit cherché: ainsi $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$, $\frac{3}{5} \times \frac{8}{9} = \frac{24}{45}$ ou $\frac{8}{15}$, en les réduisant à leur plus simple expression: il en seroit de même si les fractions étoient algébriques, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{fg}{a} \times \frac{bd}{gh} = \frac{bdfg}{agh} = \frac{bfd}{ah}$; de même $\frac{a+b}{c} \times \frac{a-b}{g} = \frac{aa-bb}{cg}$, $\frac{a-b}{f} \times \frac{c-d}{g} = \frac{ac-bc-ad+bd}{fg}$.

DÉMONSTRATION.

Pour entendre la raison de ces opérations, on fera attention qu'une fraction devient d'autant plus grande, que son numérateur augmente, le dénominateur restant le même; donc pour avoir une fraction deux ou trois fois plus grande, il suffit de multiplier le numérateur par 2 ou par 3 : donc pour le premier cas, pour multiplier une fraction par un entier, il suffit de multiplier le numérateur de la fraction par l'entier.

Pour le second cas, lorsque le multiplicateur est aussi une fraction, on remarquera que lorsque je multiplie une fraction $\frac{2}{3}$, par exemple par $\frac{4}{5}$, & que je multiplie d'abord le numérateur 2 de la premiere par le numérateur 4 de la seconde, je multiplie par un nombre cinq fois trop grand, puisque je ne me propose pas de multiplier cette fraction par l'entier 4, mais seulement par la cinquieme partie de 4; & c'est ce que je fais effectivement en multipliant le dénominateur 3 par le dénominateur 5 (art. 95); car après cette multiplication, les parties ne sont plus que la cinquieme partie de ce qu'elles étoient avant.

98. Si l'on avoit un entier & une fraction à multiplier par un entier & une fraction, on donneroit à chaque entier le même dénominateur que la fraction qui l'accompagne, en le multipliant par le dénominateur, & le divisant par le même; on multiplieroit les deux nouvelles fractions qui en résulteroient l'une par l'autre, & le produit seroit le produit que l'on demande. Par exemple, $(3 + \frac{5}{6}) \times (4 + \frac{8}{9}) = (\frac{18 + 5}{6}) \times (\frac{36 + 8}{9}) = \frac{23}{6} \times \frac{44}{9} = \frac{1012}{54}$; de même pour multiplier $\frac{bx}{a} - y$ par $\frac{bx}{a} + y$ je réduis les entiers en fractions, en le multipliant par le dénominateur de la fraction, à laquelle ils sont liés par les signes $+$ ou $-$, & il vient $\frac{bx - ay}{a}$ & $\frac{bx + ay}{a}$, & multipliant les deux numérateurs l'un par l'autre, c'est-à-dire $bx - ay$ par $bx + ay$, il vient $bbxx - abxy + abxy - aayy$ ou $bbxx - aayy$, à qui il faut donner pour dénominateur le produit des dénominateurs des deux fractions, qui sera aa, & l'on écrira $\frac{bbxx - aayy}{aa}$ pour le produit de la multiplication, ou bien $\frac{bbxx}{aa} - yy$.

REMARQUE.

99. Si dans le premier cas le multiplicateur étoit égal au dénominateur de la fraction proposée, le produit seroit égal au numérateur, & alors la multiplication se fait, en ôtant le dénominateur, ainsi $\frac{2}{3} \times 3 = 2$, $\frac{a}{b} \times b = b$.

Si dans le même cas le dénominateur étoit divisible par l'entier proposé, il faudroit faire la division, & du quotient faire le dénominateur d'une nouvelle fraction qui auroit même numérateur, & seroit le produit demandé. Ainsi pour multiplier $\frac{5}{12}$ par 3, on divisera le dénominateur 12 par 3, & le quotient 4 sera le dénominateur d'une nouvelle fraction $\frac{5}{4}$, qui conservera le même numérateur, & sera égale au produit cherché. En opérant de cette maniere, la fraction qui viendra sera tout d'un coup réduite à sa plus simple expression, & l'on n'a pas deux opérations à faire. Il est de plus évident que la fraction $\frac{5}{4}$ est le produit de la fraction $\frac{5}{12}$ par 3, puisque les parties dans lesquelles on divise l'unité principale sont devenues trois fois plus grandes qu'elles n'étoient, & que l'on en prend toujours le même nombre.

100. Dans le second cas, c'est-à-dire lorsque le multiplicateur est aussi une fraction, si le numérateur de la fraction multiplicande est divisible par le dénominateur de la fraction multiplicateur, & réciproquement le dénominateur de la premiere divisible par le numérateur de la seconde, on fera les divisions, le premier quotient sera le numérateur d'une fraction, & le second le dénominateur de la même fraction, laquelle sera le produit que l'on cherche. Par exemple, si l'on propose de multiplier la fraction $\frac{8}{9}$ par la fraction $\frac{3}{4}$, dans lesquelles le numérateur 8 de la premiere est divisible par le dénominateur 4 de la seconde, & réciproquement le dénominateur 9 de la premiere divisible par le numérateur 3 de la seconde. Je divise donc 8 par 4, & 9 par 3; des quotiens 2 & 3, je fais la fraction $\frac{2}{3}$, qui est le produit demandé : en opérant de cette maniere, la fraction qui vient au produit est tout d'un coup réduite à sa plus simple expression, au lieu qu'il auroit fallu réduire la fraction $\frac{24}{36}$ que l'on eût trouvée, en suivant le procédé ordinaire. On doit faire attention à cette remarque, lorsque les fractions que l'on veut multiplier les unes par les autres sont des nombres un peu considérables.

101. Il arrive quelquefois dans ce second cas, que le produit est plus petit que le multiplicande, ce qui paroît d'abord surprenant; mais on ne sera pas long-temps embarrassé par cette difficulté apparente, si l'on fait attention à la nature de la Multiplication, qui est une opération, par laquelle on cherche un nombre qui soit au multiplicande, comme le multiplicateur est à l'unité. Si donc le multiplicateur est plus petit que l'unité, il faut que le produit soit aussi plus petit que le multiplicande; ce qui arrivera nécessairement toutes les fois que la fraction proposée pour multiplicateur ne vaudra pas un entier. D'ailleurs, quand je multiplie une fraction $\frac{8}{9}$ par une autre $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire que j'en prends les trois quarrs, qui seront certainement plus petits que cette fraction.

102. La Multiplication des fractions sert à faire connoître ce que c'est qu'une fraction de fraction, qui paroît d'abord quelque chose de bien compliqué. Si l'on demande, par exemple, ce que vaut la moitié des trois quarts des quatre cinquiemes d'un écu, on multipliera, les unes par les autres, les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$; ce qui donnera au produit $\frac{12}{40}$ ou $\frac{3}{10}$: je divise l'écu en dix parties pour en avoir le dixieme, il me vient 6 sols: donc $\frac{3}{10}$ valent 18 sols; & par conséquent 18 sols sont la moitié des trois quarts des quatre cinquiemes d'un écu. Enfin on remarquera encore que l'on peut énoncer une même fraction de plusieurs manieres. On peut dire que la fraction $\frac{3}{10}$ d'écu vaut les trois dixiemes d'un écu, ou la dixieme partie de trois écus. Toutes ces expressions reviennent absolument au même; car si trois écus sont triples d'un écu, en prenant la dixieme partie de trois écus, on ne prend qu'un dixieme; & prenant les trois dixiemes d'un écu, on en prend trois fois plus, ce qui fait une compensation parfaite.

De la Division des Fractions.

103. On peut diviser une fraction par un entier, ou par une autre fraction. Si le diviseur est un entier, on multipliera le dénominateur de la fraction dividende par cet entier, & le produit sera le dénominateur d'une nouvelle fraction, qui ayant même numérateur, sera le quotient demandé. Pour diviser la fraction $\frac{3}{4}$ par 5, on multipliera le dénominateur 4 par l'entier 5, & la fraction $\frac{3}{20}$ est le quotient cherché: de même

$\frac{5}{6}$ divisé par $3 = \frac{5}{18}$, $\frac{7}{5}$ divisé par $6 = \frac{7}{30}$. La regle est la même pour les quantités algébriques : $\frac{a}{b}$ divisé par $c = \frac{a}{bc}$; la fraction $\frac{fg+gb}{c}$ divisée par $d = \frac{fg+gb}{cd}$, $\frac{aa-bb}{a}$ divisé par $a+b$ $= \frac{aa-bb}{c \times \overline{a+b}} = \frac{a-b}{c}$, car $aa-bb$ est le produit de $a+b$ par $a-b$; donc $a+b$ se trouve un diviseur commun au numérateur & au dénominateur, & par conséquent la fraction est réductible.

104. Si le numérateur de la fraction dividende étoit divisible par l'entier donné, on feroit la division, afin de n'être point obligé de réduire la fraction qui viendroit au quotient, & qui seroit nécessairement réductible si l'on multiplioit le dénominateur par l'entier proposé pour diviseur : ainsi la fraction $\frac{8}{9}$ divisée par $4 = \frac{2}{9}$, $\frac{35}{48}$ divisé par $7 = \frac{5}{48}$, en général $\frac{ab}{c}$ divisé par $b = \frac{a}{c}$, $\frac{fgh}{cd}$ divisé par $gh = \frac{f}{cd}$. La raison de toutes ces opérations se tire toujours du même principe ; car diviser une fraction par un entier, comme 2, 3 ou 4, c'est en chercher une qui ne soit que la moitié, le tiers ou le quart de la fraction proposée, & c'est ce que l'on exécute effectivement, en suivant l'une ou l'autre méthode. Dans la premiere, lorsqu'on multiplie le dénominateur, les parties dans lesquelles on divise l'unité principale, ne sont plus que la moitié, le tiers ou le quart de ce qu'elles étoient, puisque leur nombre devient double ou triple, ou quadruple : donc la fraction n'est plus aussi que la moitié, le tiers ou le quart de ce qu'elle étoit, puisque l'on ne touche pas au numérateur. Dans la seconde pratique, les parties restent bien les mêmes, puisque l'on ne touche pas au dénominateur ; mais la fraction diminue par la division du numérateur, qui n'est plus que la moitié, le tiers ou le quart de ce qu'il étoit, suivant qu'il a été divisé par 2 ou par 3, ou par 4. Seulement il est à remarquer que l'une de ces deux méthodes peut toujours avoir lieu, puisqu'il est toujours possible de multiplier un nombre par un autre, & que la seconde n'est d'usage que lorsque le numérateur est divisible par l'entier donné ; auquel cas on doit préférer cette méthode à la plus générale, pour que la fraction soit réduite à ses moindres termes dès la premiere opération.

105. Si le diviseur est aussi une fraction, on multipliera le

numérateur de la fraction dividende par le dénominateur de la fraction diviseur, & le dénominateur de la même fraction dividende par le numérateur de l'autre, c'est ce qu'on appelle ordinairement multiplier en *croix*. Cette regle est générale pour les fractions numériques & algébriques; ainsi pour diviser la fraction $\frac{2}{3}$ par la fraction $\frac{4}{5}$, je multiplie le numérateur 2 de la premiere fraction dividende par le dénominateur 5 de la fraction diviseur; je multiplie de même le dénominateur 3 de la premiere par le numérateur 4 de la seconde, & mettant les deux produits 10, 12 en fraction, j'ai pour quotient des fractions données, divisées l'une par l'autre, la fraction $\frac{10}{12}$ ou $\frac{5}{6}$ qui lui est égale. De même la fraction $\frac{15}{17}$ divisée par $\frac{3}{4} = \frac{15\times 4}{17\times 3} = \frac{60}{51} = \frac{20}{17}$, en réduisant le produit. En général une fraction $\frac{a}{b}$ divisée par $\frac{c}{d} = \frac{a\times d}{b\times c} = \frac{ad}{bc}$, une fraction $\frac{df+gh}{b}$ divisée par la fraction $\frac{a}{c} = \frac{cdf+cgh}{ab}$, $\frac{a+b}{c}\times\frac{df}{a-b} = \frac{\overline{a+b}\times\overline{a-b}}{cdf}$ $= \frac{aa-bb}{cdf}$, & ainsi des autres.

DÉMONSTRATION.

La raison de cette opération est toujours déduite des mêmes principes que les précédentes. Quand je multiplie le dénominateur 3 de la fraction $\frac{2}{3}$ par le numérateur 4 de la fraction $\frac{4}{5}$, je rends la fraction proposée cinq fois plus petite (art. 103.) que je ne me propose de le faire, puisque je ne veux pas la diviser par quatre entier, mais seulement par la cinquieme partie de 4, puisque la fraction $\frac{4}{5}$ ne vaut que cela (art. 102); donc il faut la rendre cinq fois plus grande pour la remettre dans l'état où elle doit être; c'est ce que je fais en multipliant ensuite le numérateur de la fraction dividende par le dénominateur 5 de la fraction diviseur. La démonstration subsiste toujours dans toute sa force pour les fractions algébriques, cependant on peut la prouver directement comme il suit.

Pour prouver que la fraction $\frac{a}{b}$, divisée par la fraction $\frac{c}{d}$ donne au quotient $\frac{ad}{bc}$, nous supposerons que $\frac{a}{b} = f$, & que $\frac{c}{d} = g$, & nous ferons voir que $\frac{ad}{bc} = \frac{f}{g}$: pour cela, faites attention que puisque l'on a par hypothese $\frac{a}{b} = f$, & $\frac{c}{d} = g$, on

aura $a = bf$, & $c = dg$. Mettant donc ces valeurs de a & de c dans la fraction $\frac{ad}{bc}$, on aura la nouvelle fraction $\frac{bfd}{bdg}$, qui étant réduite à sa plus simple expression, devient $\frac{f}{g}$; donc $\frac{ad}{bc} = \frac{f}{g}$: C. Q. F. D.

106. Si le numérateur de la fraction dividende est divisible par le numérateur du diviseur, & le dénominateur de la même fraction divisible par celui du diviseur, il faudra faire les divisions, & les quotiens mis en fraction, seront le quotient demandé, qui se trouvera de cette maniere réduit à sa plus simple expression. Par exemple, pour diviser la fraction $\frac{8}{9}$ par la fraction $\frac{2}{3}$, je divise le numérateur 8 par le numérateur 2, & le dénominateur 9 par le dénominateur 3, avec les quotiens 4 & 3, je fais la fraction $\frac{4}{3}$, qui est le quotient que l'on demande. En suivant la regle générale, on auroit multiplié 8 par 3, & 9 par 2, ce qui auroit donné la fraction $\frac{24}{18}$, qui ne vaut en effet que $\frac{4}{3}$, en divisant ses deux termes par 6, qui leur est commun. Il sera toujours possible de faire la division, en suivant la regle générale, mais il faut préférer cette derniere à la premiere, lorsque la division peut se faire.

107. Si l'on avoit un entier & une fraction à diviser par un entier & une fraction, on réduiroit chaque entier en fraction, qui auroit même dénominateur que la fraction à laquelle il est uni par les signes + & —, & l'on feroit la division de ces fractions, suivant l'une des regles précédentes. Ainsi pour diviser $6 + \frac{3}{4}$ par $2 + \frac{5}{6}$, je change la premiere en $\frac{27}{4}$, & la seconde en $\frac{17}{6}$, je multiplie ces deux fractions en croix, & j'ai pour le quotient $\frac{162}{68}$ ou $\frac{81}{34}$, qui est irréductible.

108. Il y a encore une autre maniere de diviser une fraction par une autre fraction, en opérant sur le numérateur ou sur le dénominateur seulement. On opére sur le numérateur seulement, lorsque le numérateur du dividende est divisible par celui du diviseur; & voici ce qu'on fait en ce cas : on divise le numérateur du dividende par celui du diviseur, & ensuite on multiplie le quotient par le dénominateur du même diviseur, le produit étant divisé par le dénominateur du dividende, donne le quotient des deux fractions. Par exemple, si l'on propose de diviser la fraction $\frac{18}{49}$ par la fraction $\frac{3}{5}$, je divise le numérateur 18 du dividende par le numérateur 3 du diviseur,

le quotient est 6, que je multiplie par 5, dénominateur du diviseur, le produit 30 divisé par 49 me donne une fraction $\frac{30}{49}$ égale au quotient que je cherche : cette pratique se déduit toujours des mêmes principes. Quand je divise 18 par 3, j'ai une fraction cinq fois plus petite que celle que je cherche, car ce n'est pas par 3 que je veux la diviser, mais par $\frac{3}{5}$, ou la cinquieme partie de 3 ; c'est donc pour rétablir cette trop grande diminution, que je multiplie par 5 le quotient que j'ai trouvé.

On opére sur le dénominateur seulement, lorsque le dénominateur du dividende est divisible par le dénominateur du diviseur, & voici ce que l'on fait : On divise le dénominateur du dividende par celui du diviseur, & on multiplie le quotient par le numérateur du diviseur ; ce nouveau produit sert de dénominateur à une fraction qui retient toujours le même numérateur que la fraction dividende, & cette fraction est le quotient cherché. Par exemple, pour diviser la fraction $\frac{18}{49}$ par la fraction $\frac{5}{7}$, je divise le dénominateur 49 par 7; je multiplie le quotient 7 par le numérateur 5 du diviseur, le produit est 35, que je fais servir de dénominateur à une nouvelle fraction, dont le numérateur est toujours 18, & j'ai $\frac{18}{35}$ pour le quotient demandé. La raison de cette méthode est encore aisée à déduire des principes que l'on a donnés. Quand je divise le dénominateur du dividende par le dénominateur 7 du diviseur, j'ai une fraction sept fois plus grande que la précédente, mais je veux qu'elle soit seulement $\frac{5}{7}$ de fois plus grande que la proposée ; donc il faut multiplier le nouveau quotient, afin que par la multiplication du dénominateur il y ait une compensation de ce que l'on avoit fait de trop. En général on doit encore préférer ces méthodes à la méthode générale, lorsqu'elles peuvent avoir lieu ; car en opérant ainsi, les quotiens seront irréductibles si le dividende avoit été réduit à sa plus simple expression avant de commencer la Division : dans les exemples précédens, si l'on eût suivi la regle générale, on eût trouvé pour le premier $\frac{90}{147}$, pour le second $\frac{126}{245}$, au lieu des fractions $\frac{30}{49}$ & $\frac{18}{35}$.

TRAITÉ
DES FRACTIONS DÉCIMALES.

109. Outre les fractions dont nous venons de parler, il y en a encore d'autres qui sont d'un grand usage en Mathématique, & dont la connoissance est absolument nécessaire pour avoir dans certaines occasions les grandeurs dont on a besoin avec toute la précision possible.

Définition.

110. Si on divise un tout ou unité principale par l'unité, suivie d'un ou de plusieurs zero, par les nombres 10, 100, 1000, 10000, &c, qui sont les puissances successives de 10, & que l'on prenne plusieurs de ces parties égales, la fraction qui marque combien on prend de ces parties égales, est appellée *fraction décimale*, & se marque ainsi : $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{48}{1000}$, & ainsi des autres.

On a trouvé le secret d'opérer sur ces sortes de fractions, précisément de la même maniere que l'on opére sur les nombres naturels ; & de plus, de réduire toute fraction donnée à une fraction décimale qui lui soit égale, ou qui n'en différe que d'une quantité infiniment petite, & c'est ce qui a rendu leur usage si fréquent dans les Mathématiques.

Premier principe.

111. Puisque les fractions décimales sont des fractions, on peut les exprimer comme les autres fractions ; ainsi pour marquer 3 dixiemes, 58 centiemes on peut écrire $\frac{3}{10}$, $\frac{58}{100}$: mais il y a une autre maniere de les marquer, c'est d'écrire le numérateur seulement, en sous-entendant le dénominateur. Par exemple, au lieu d'écrire $\frac{3}{10}$, $\frac{58}{100}$, on écrit . 3 . 58, en mettant un point sur la gauche du numérateur, de maniere qu'il y ait après ce point autant de chiffres qu'il y auroit de zero au dénominateur après l'unité ; de même s'il y avoit des entiers joints aux fractions, comme 15 $\frac{25}{100}$, 38 $\frac{245}{1000}$, on pourroit écrire 15. 25 & 38. 245. De cette maniere, quoique le dénominateur ne soit pas exprimé, on peut cependant toujours le con-

noître : car s'il y a deux chiffres après le point, on conclucra que le dénominateur est 100, s'il y en a trois, on conclucra que le dénominateur est 1000, & ainsi de suite.

112. Il suit delà que si l'on a des expressions, comme 253. 27, cela signifie 253 $\frac{27}{100}$, de même que 483. 547 signifie 483 entiers $\frac{547}{1000}$. Il suit encore delà que si l'on veut mettre sous cette forme la quantité 28 $\frac{3}{100}$, il faudra l'écrire ainsi, 28.03, en mettant un zero devant le 3, afin qu'il y ait deux chiffres après le point, pour que l'on connoisse que le dénominateur est l'unité suivie de deux zero ou 100. De même pour mettre sous cette forme 53 $\frac{48}{10000}$, on écrira 53.0048, en mettant deux zero avant les chiffres 48, pour marquer que le dénominateur a quatre zero après l'unité, & compte des dix milliemes.

113. S'il n'y avoit point d'entiers avec la fraction, mais seulement $\frac{325}{1000}$, on écriroit ainsi : 0.325, en faisant voir par le zero mis avant le point, qu'il n'y a pas d'entier. Si l'on fait bien attention, on verra que cette expression 0.325 est égale à $\frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$; car $\frac{3}{10}$ est égale à $\frac{30}{100}$, à $\frac{300}{1000}$, & $\frac{2}{100} = \frac{20}{1000}$, puisqu'une fraction ne change pas de valeur lorsqu'on multiplie son numérateur & son dénominateur par un même nombre : donc au lieu d'exprimer la fraction 0.325 en disant 325 centiemes, on auroit pu l'énoncer ainsi : 3 dixiemes, 2 centiemes, 5 milliemes ; ce qui fait voir que les chiffres de cette quantité 0.325 vont en augmentant en proportion décuple, en allant de droite à gauche, & diminuent dans la même proportion, en allant de gauche à droite : car il est évident qu'un centieme est dix fois plus grand qu'un millieme, & qu'un dixieme est dix fois plus grand qu'un centieme. En considérant les fractions décimales sous ce point de vue, on peut les définir en disant que ce sont des nombres moindres que les entiers qui suivent la proportion des différens ordres de la numération.

En effet, après avoir fixé le terme des unités ou nombres entiers, rien n'empêche d'imaginer d'autres nombres, dont les unités suivent toujours la même progression, ainsi que dans ce nombre 6325. 489, dans lequel les unités du premier chiffre 2, qui est à la gauche du 5, où se terminent les entiers, sont dix fois plus grandes que les unités du même 5, & les unités du 4 qui est immédiatement à la droite du même 5, sont dix fois plus petites que les unités du 5, ou les unités du 3 qui occupe le

second rang à la gauche du chiffre 5 des unités, sont cent fois plus grandes que celles du même 5, & les unités du 8 qui tient le second rang vers la droite, après le 5, sont cent fois plus petites que les unités du même 5, & ainsi des autres qui pourroient occuper des rangs égaux, tant vers la droite, que vers la gauche du chiffre des unités : ensorte que l'on peut dire, en partant de ce chiffre vers la droite, unités, dixiemes, centiemes, milliemes, &c, de même que l'on dit, en partant de ce même chiffre vers la gauche, unités, dixaines, centaines, mille, &c. Cette maniere d'envisager les fractions décimales jette un grand jour dans toutes les opérations que l'on fait sur elles, & l'on ne peut se la rendre trop familiere.

SECOND PRINCIPE.

114. Plusieurs fractions décimales, comme 0 3, 0.54, 0.008, ou leurs égales, $\frac{3}{10}$, $\frac{54}{100}$, $\frac{8}{100}$, étant sous leur premiere forme, pourront aisément se réduire à la même dénomination ; car $\frac{3}{10}$, comme on l'a déja dit, est égal à $\frac{30}{100}$, à $\frac{300}{1000}$, & $\frac{54}{100}$ est égal à $\frac{540}{1000}$: donc les fractions proposées pourront aussi s'écrire sous cette forme, 0.300, 0.540, 0.008. Il est évident que ces changemens ne font point changer la valeur des fractions, puisque l'on ne fait par cette opération que multiplier les numérateurs & dénominateurs par les mêmes nombres. Ces principes une fois bien compris, il est aisé de voir que l'on peut opérer sur les fractions comme sur les nombres entiers ; & comme l'on peut réduire toute fraction en fraction décimale qui lui soit égale, ou qui n'en différe pas sensiblement, il suit aussi que l'on peut rappeller toutes les opérations des fractions à celles des nombres entiers : c'est pourquoi nous n'entrerons pas dans un grand détail d'exemples. Nous allons commencer par expliquer l'art de faire sur ces quantités les quatre Regles principales de l'Arithmétique ; nous donnerons ensuite la maniere de réduire une fraction quelconque en décimales, & les différentes applications que l'on peut faire de ces opérations aux calculs qui sont le plus en usage.

De l'Addition des Fractions décimales.

115. Si les fractions proposées ne sont pas réduites à la même dénomination, on commencera par les y réduire (art. 113) : cette

cette préparation faite, on les rangera les unes sous les autres, de maniere que les dixiemes soient sous les dixiemes, les centiemes sous les centiemes, les milliemes sous les milliemes, formant chacun une colonne verticale, & l'on fera l'Addition suivant les regles que l'on a données pour l'Addition des nombres entiers. Par exemple, si l'on veut avoir la somme des fractions 0.3, 0.25, 0.489, 0.056, on les réduira en même dénomination que le nombre 0.489, ou 0.056, dont chacun a des milliemes, & l'on aura, en les disposant par ordre comme il convient,

0.300
0.250
0.489
0.056

dont la somme se trouvera être de 1.095, c'est-à-dire l'entier, & $\frac{95}{1000}$.

116. S'il y avoit des entiers joints aux fractions, comme dans les nombres suivans, 25.43, 3.054, 69.067, 36.48, ce seroit précisément la même opération, & l'on auroit, en les ajoutant comme on voit ici, après les avoir réduit à la dénomination de 3.054, 134.031, c'est-à-dire 134 entiers, plus la fraction $\frac{31}{1000}$.

25.430
3.054
69.067
36.480
134.031

On peut même se dispenser de réduire les fractions proposées à la même dénomination, en observant tout le reste, comme on l'a expliqué au commencement de l'art. 114. Ainsi si l'on veut ajouter les fractions suivantes, 0.35, 0.48, 054, 0.345, 0.0048, on les disposera comme on le voit ici, & l'on aura pour la somme que l'on a demandée 1.7198

0.35
0.48
0.54
0.345
0.0048
1.7198

De la Soustraction des Fractions décimales.

117. Si les fractions n'ont pas même dénomination, pour plus grande facilité, on commencera par les réduire à celle du plus grand dénominateur, suivant la méthode de l'art. 113; ensuite on les disposera de maniere que les dixiemes soient au dessous des dixiemes, les centiemes sous les centiemes, & ainsi des autres nombres : cela fait, on fera la Soustraction

comme elle se pratique sur les nombres entiers.	
Ainsi pour ôter la fraction décimale 0.025 de	0.5894
0.5894, on écrira comme on voit ici,	0.0250
& faisant la Soustraction, le reste sera . . .	0.5644

Si l'on avoit des entiers & des fractions à soustraire d'un entier & d'une fraction, la méthode seroit toujours la même ;

ainsi pour ôter 47.9453 de 68.05489, on écrira,	68.05489
sans même se donner la peine de réduire le premier	47.9453
mier à la domination du second, & le reste sera	20.10959

La démonstration de ces deux opérations est la même que celle des mêmes opérations sur les nombres entiers ; car puisque l'on prend la *somme* ou la *différence* des dixiemes, des centiemes, des milliemes, on a aussi la *somme* ou la *différence* de ces fractions, puisqu'elles ne contiennent que des dixiemes, des centiemes, & des milliemes, &c. La preuve de ces deux opérations se fait aussi comme dans les autres par l'opération contraire ; ainsi il n'est pas nécessaire d'insister davantage.

De la Multiplication des Fractions décimales.

118. Pour multiplier deux nombres l'un par l'autre, dont un seul, ou tous les deux ensemble, renferment des parties décimales, on fera la Multiplication comme si ces nombres étoient tous nombres entiers; & lorsqu'on aura trouvé le produit, on séparera vers la droite autant de chiffres qu'il y a de décimales, tant au multiplicande qu'au multiplicateur. Les chiffres qui seront à la gauche du point marqueront les entiers, & ceux qui seront à la droite marqueront les décimales. Par exemple, pour multiplier 24.35 par 2.3, on écrira

```
 24.35
   2.3
 -----
  7305
 4870
 -----
56.005
```

Ayant fait la Multiplication comme s'il n'y avoit point de décimales, & trouvé le produit 56005, on écrira 56.005, faisant ensorte qu'il se trouve trois chiffres à la droite du point, parce qu'il y avoit trois rangs de décimales, tant au multiplicande qu'au multiplicateur, sçavoir, 2 à l'un, & 1 à l'autre. De même pour multiplier 4.35 par 6.7, j'écris

4.3 5	
6.7	
3 0 4 5	
2 6 1 0	
2 9.1 4 5	

Faisant la Multiplication comme s'il n'y avoit point de décimales, je trouve le produit 29145, & j'écris 29.145, faisant ensorte qu'il y ait trois rangs de décimales après le point, parce qu'il y en a deux au multiplicande, & un au multiplicateur.

119. Il pourroit arriver que le nombre des rangs de décimales du multiplicande & du multiplicateur fût plus grand que le nombre des chiffres du produit ; ce qui arrive lorsqu'il n'y a point d'entiers joints aux fractions décimales, & qu'elles sont d'un certain ordre ; en ce cas on mettroit vers la gauche autant de zero qu'il seroit nécessaire, pour qu'il y ait après le point autant de rangs de chiffres qu'il y en a au multiplicande & au multiplicateur. Par exemple, si l'on propose de multiplier ces deux nombres, qui ne contiennent que des décimales, 0.0054 par 0.012, les ayant disposés comme on voit ici, fait la multiplication comme à l'ordinaire, & trouvé le produit 648 des chiffres significatifs, multipliés les uns par les autres, on écrira 0.0000648, en faisant ensorte, par l'addition de quatre zero, qu'il y ait après le point autant de rangs qu'il y en a, tant au multiplicande qu'au multiplicateur.

0.0054
0.012
108
54
0.0000648

De même 0.0048, multiplié par 0.027, donne au produit, en multipliant les chiffres significatifs les uns par les autres, 1296, & j'ajoute à ce produit, vers la gauche, trois zero, afin qu'il y ait autant de rangs de décimales après le point qu'il y en a, tant au multiplicande qu'au multiplicateur.

0.0048
0. 027
336
96
0.0001296

DÉMONSTRATION.

Pour entendre plus aisément la raison par laquelle on démontre l'opération précédente, nous l'appliquerons au premier exemple, dans lequel il s'agissoit de multiplier 24.35 par 2.3. Lorsque je multiplie ces nombres l'un par l'autre, comme s'ils n'avoient point de décimales, je rends le multiplicande cent fois plus grand qu'il n'est, puisque les unités du 4 qui se

trouvoient par le point au rang des unités simples, se trouvent par la suppression du même point au rang des centaines. De même je rends le multiplicateur 2.3 dix fois plus grand qu'il n'est effectivement, en le considérant comme 23 : le produit qui résulte de ces deux nombres sera donc dix fois cent fois plus grand qu'il ne doit être, ou mille fois plus grand : donc pour le réduire à sa juste valeur, il faudra le rendre mille fois plus petit ; & c'est ce que l'on fait en retranchant vers la droite autant de rangs de décimales qu'il y en a, tant au multiplicande qu'au multiplicateur. Dans notre exemple, on en a retranché 3, ce qui a fait que le chiffre 6 du produit 56005, qui étoit au rang des mille, s'est trouvé au rang des unités, en écrivant 56.005. On appliquera le même raisonnement à tout autre exemple.

De la Division des Fractions décimales.

120. Pour diviser un nombre décimal par un autre, soit qu'ils ne contiennent l'un & l'autre que des décimales, soit que le dividende & le diviseur ayent encore, outre ces décimales, des nombres entiers, ou seulement l'un des deux, regle générale, on regardera ces nombres comme s'ils étoient tous nombres entiers : on les divisera l'un par l'autre, suivant la méthode de la Division des nombres entiers ; & lorsqu'on aura trouvé le quotient, on fera ensorte qu'il y ait après le point un nombre de décimales égal à celui du dividende, moins celui du diviseur.

Soit, par exemple, proposé de diviser 88.392 par 254.

Je divise ces deux nombres comme s'ils étoient 88392 & 254, ayant trouvé le quotient 348, j'écris 34.8, de maniere qu'il y ait après le point un rang de décimales, parce qu'il y en a trois au dividende, & deux au diviseur, dont la différence est 1.

88.392	2.54
76 2	34.8
12 19	
10 16	
2 032	
2 032	

EXEMPLE II.

Soit proposé de diviser 158.0802 par 32.46.

Je divise ces deux nombres comme s'ils ne contenoient point de décimales, & ayant trouvé le quotient 487, je l'écris ainsi, 4.87, c'est-à-dire quatre entiers $\frac{87}{100}$, en faisant ensorte qu'il y ait deux chiffres de décimales, parce que la différence de 2 à 4 est 2.

```
158.0802 { 32.46
129 84   { 4.87
 28 240
 25 968
  2 2722
  2 2722
  0 0000
```

121. Il suit de cette Regle générale, que s'il y a autant de décimales au diviseur qu'au dividende, le quotient sera des entiers; car puisque (*hyp.*) le diviseur a autant de rangs de décimales que le dividende, la différence sera 0, & par conséquent il n'y aura point de décimales au quotient. Il suit encore delà, que s'il n'y a point de décimales au diviseur, il y en aura autant au quotient qu'au dividende. Si le dividende n'avoit point de parties décimales, ou en avoit moins que le diviseur, on lui ajouteroit autant de zero qu'il seroit nécessaire, pour que le nombre de ses décimales fût égal à celui des décimales du diviseur, & dans ce cas le quotient aura toujours des entiers, à moins que le nombre des entiers du diviseur ne fût plus grand que celui des entiers du dividende. Par exemple, si l'on propose de diviser 883.92 par 2.54, le quotient sera 348, parce que la différence des décimales du dividende à celles du diviseur est zero.

De même si l'on veut diviser 5952 par 1.24, on ajoutera deux zero au dividende, parce qu'il y a deux rangs de décimales au diviseur : puis faisant la division des nombres 5952.00, 1.24 comme s'ils étoient 595200, 124, on trouvera le quotient de 4800 entiers.

```
5952.00 { 1.24
496     { 4800
 992
 992
 000
```

Pour entendre plus aisément la démonstration de cette Regle générale, nous allons établir plusieurs principes.

PREMIER PRINCIPE.

122. Une fraction décimale qui contient des entiers & des

décimales, peut être énoncée comme si elle ne contenoit que des décimales : ainsi la fraction 24.32, qui vaut 24 entiers & 32 centiemes, peut être énoncée ainsi, deux mille quatre cens trente-deux centiemes ; car $\frac{2400}{100}$ ou deux mille quatre cens centiemes, valent 24 entiers, puisque le numérateur est 24 fois plus grand que le dénominateur.

Second principe.

123. Les unités du quotient doivent toujours être de même nature que celles du dividende, lorsque le diviseur est un nombre entier qui marque des nombres de fois : ainsi si le dividende a pour unités des milliemes, & que le diviseur soit un nombre entier abstrait, comme 3 ou 4, le quotient vaudra le tiers ou le quart des milliemes du dividende, & aura par conséquent des unités de même nature.

Troisieme principe.

124. Plus un diviseur est grand, le dividende restant le même, plus le quotient est petit ; & réciproquement plus le diviseur est petit, le dividende étant toujours supposé le même, plus le quotient est grand : car il est visible que plus un nombre est petit, plus il est contenu de fois dans un autre.

Démonstration de la Regle générale.

Pour rendre cette démonstration plus intelligible, nous allons appliquer les raisonnemens au premier exemple. Quand je divise ce nombre 88.392 par celui-ci, 2.54, comme s'ils étoient des nombres entiers, le quotient 348 que je trouve, ne doit avoir que des nombres entiers par le second principe : mais puisque le dividende est 88.392, & non pas 88392, c'est-à-dire 88 milles 392 milliemes, les unités du quotient, par le second principe, doivent être des milliemes : donc le quotient 348 est mille fois plus grand qu'il ne doit être, en supposant le diviseur toujours entier, & que les unités du dividende sont des milliemes : il faudroit donc en ce cas l'écrire ainsi, 0.348. Présentement si l'on suppose que le diviseur devienne ce qu'il est réellement, c'est-à-dire 2.54, ou deux cens cinquante-quatre centiemes, puisque les centiemes sont cent fois plus petits que les unités, le nombre 2.54 sera aussi cent fois plus petit que

254 : donc le quotient doit devenir cent fois plus grand ; & c'est ce que l'on fait en retranchant un rang de décimales vers la droite dans le quotient 0.348, qui devient 34.8 : car en opérant ainsi, les unités du 3 qui étoient des dixiemes, sont devenues des dixaines, les unités du 4 qui étoient des centiemes, sont devenues des unités simples, & par conséquent le quotient 0.348 étant écrit ainsi 34.8, est devenu cent fois plus grand ; d'où il suit que la méthode que l'on a donnée met les choses dans l'état où elles doivent être.

Pour entendre la raison des opérations énoncées dans l'article 120, on fera attention que le quotient d'une division ne change pas, lorsqu'on multiplie le diviseur & le dividende par un même nombre. Ainsi 12 divisé par 4, donne 3 au quotient : que je multiplie 12 & 4 par 5, le quotient des produits 60 & 20, divisés l'un par l'autre, sera toujours 3. Cela posé, lorsque je divise deux nombres, qui ont chacun même nombre de décimales, comme s'ils n'en avoient point, je ne fais que multiplier le dividende & le diviseur par un même nombre ; ce qui ne doit point changer le quotient : ainsi quand je divise 883.92 par 2.54, comme s'ils étoient 88392 & 254, je multiplie le dividende & le diviseur par 100 ; le quotient ne doit donc pas changer : mais le quotient de 88392 divisé par 254, est 348 : donc ce même nombre est aussi le quotient de 883.92 divisé par 2.54. Cette raison peut donner la démonstration de tous les cas imaginables, c'est pourquoi on fera très-bien de l'étudier avec attention.

Usages des Fractions décimales.

125. *Premier usage.* Approcher si près que l'on voudra du quotient d'une division qui ne peut pas se faire sans reste.

On cherchera d'abord le quotient du dividende, divisé par le diviseur, & l'on mettra à la suite du reste autant de zero que l'on voudra avoir de décimales au quotient : si l'on veut avoir le quotient à un millieme ou un dix millieme près, on ajoutera trois ou quatre zero à la suite du reste, & l'on continuera la division comme à l'ordinaire, en mettant les chiffres à la suite du quotient comme ils viendront, après les avoir séparés des entiers du quotient par un point, comme on va voir dans l'exemple suivant.

Soit proposé de diviser 353 par 15, & de trouver un quotient qui ne differe pas du vrai quotient de la dix millieme partie de l'unité.

Après avoir divisé 353 par 15, & trouvé le quotient 23 avec le reste 8, j'ajoute à ce reste quatre zero, parce que je veux pousser les décimales jusqu'aux dix milliemes, & continuant la Division comme à l'ordinaire, je dis, en 80 combien de fois 15, cinq fois; je pose 5 au quotient (après avoir mis un point à la suite du 3 pour séparer les entiers des décimales); cinq fois 15 font 75, que je pose sous 80. 75 de 80, reste 5; j'abaisse un zero à côté du 5, & je dis, en 50 combien de fois 15, trois fois; je pose 3 au quotient; trois fois 15 font 45, de 50, reste 5; j'abaisse encore un zero, & divisant 50 par 15, je trouve encore 3 au quotient; & comme l'on est arrivé à un reste 5, qui sera toujours le même, les quotiens qui suivront seront aussi toujours les mêmes, & l'on aura tout d'un coup un quotient qui ne différera pas, si l'on veut, du vrai quotient de la cent millionieme partie de l'unité.

```
353    { 15
30     { 23.5333
 53
 45
  8.0000
  7.5
    50
   450
    500
    45
     50
```

126. *Second usage.* Trouver une fraction décimale égale à une fraction donnée moindre que l'unité, ou bien, ce qui revient au même, faire la division d'un nombre par un nombre plus grand que lui.

Soit proposé de réduire la fraction $\frac{5}{7}$ en décimale, ou, ce qui est la même chose, de trouver le quotient approché de 5 divisé par 7, jusqu'à ce qu'il ne differe pas de la millieme partie de l'unité. On ajoutera à la suite du numérateur 5 six zero, & faisant la division comme à l'ordinaire, on trouvera au quotient 0.714285, ou 174 mille 285 millioniemes pour le quotient de 5 divisé par 7, ou pour la valeur approchée de la fraction $\frac{5}{7}$, avec un reste cinq, ou cinq millioniemes, dont

```
5.000000 { 7
49       { 0.714285
 10
  7
  30
  28
   20
   14
    60
    56
     40
     35
      5
```

dont il faudroit encore prendre la septieme partie. Si l'on vouloit continuer plus loin la Division, on trouveroit une suite infinie de périodes égales à 714285 ; car il est évident qu'en mettant un zero à la suite du 5, on auroit encore 50 à diviser par 7, & les mêmes quotients reparoîtroient avec les mêmes restes, ce qui donneroit en un instant une approximation prodigieuse, mais cependant toujours telle, qu'il y manqueroit quelque chose. Dans la pratique la plus rigoureuse, on se contente ordinairement de six chiffres décimaux, ou tout au plus de huit.

127. Il y a des fractions qui peuvent se réduire en fractions décimales, & d'autres qui ne peuvent jamais s'y réduire, comme la fraction $\frac{1}{7}$ & la fraction $\frac{6}{7}$, pour laquelle on trouveroit 0.857142,857142, &c. en suivant le même procédé que nous avons suivi pour la premiere. Il n'en est pas de même des fractions $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{16}$, pour lesquelles on trouve des fractions décimales complettes & sans reste, 0.8, 0.3125, en suivant toujours le même procédé.

128. *Troisieme usage.* Réduire en fraction décimale les parties connues d'une certaine mesure, comme de la toise, du pied, & de la livre, &c. On fera d'abord une fraction qui aura pour numérateur le nombre des parties que l'on veut réduire en décimales, & pour dénominateur, le nombre qui marque combien de fois cette partie est contenue dans la mesure dont il s'agit. On réduira cette fraction en décimales par l'article précédent, & l'on aura la fraction décimale demandée. Par exemple, si je veux avoir une fraction décimale de la toise, qui vale 5 pieds, ou bien réduire 5 pieds en parties décimales de la toise, je prends cette fraction $\frac{5}{6}$, dont le numérateur 5 exprime le nombre de pieds, dont je veux avoir la valeur en décimales, & le dénominateur 6 marque combien de fois le pied est contenu dans la toise : je réduis cette fraction en décimale, suivant l'art. 125, & j'ai pour la valeur de 3 pieds en décimale, 0.8333, qui n'en differe pas de la dixmillieme partie de la toise. De même si je veux réduire 9 pouces en décimales de la toise, ou, ce qui revient même, avoir une partie décimale de la toise égale à 9 pouces, je prends la fraction $\frac{9}{72}$, dont le numérateur soit 9, & le dénominateur le nombre 72, qui me marque combien de fois le pouce est contenu dans la toise, & divisant 9 par 72, selon la méthode de l'art. 125, je trouve

pour la valeur de 9 pouces en parties décimales de la toise, 0.125. Si l'on vouloit avoir une partie décimale de la toise égale à 5 pieds 9 pouces, il n'y auroit qu'à prendre la somme des deux nombres 0.8333, & 0.125, ou 0.1250 que l'on trouveroit de 0.9583.

129. Si l'on vouloit réduire en parties décimales de la livre, des nombres de sols & de deniers, on s'y prendroit de la même maniere. Par exemple, si l'on me demande une partie décimale de la livre égale à 7 sols 8 den. je cherche d'abord une partie décimale de la livre, égale à 7 sols; ce que je fais en divisant 7 par 20, ou en cherchant une fraction décimale égale à la fraction $\frac{7}{20}$, que l'on trouvera de $0.35 = \frac{35}{100}$. Je cherche ensuite une fraction décimale de même valeur que la fraction $\frac{8}{240}$, qui vaut 8 deniers, puisque le denier est la 240e partie de la livre, que je trouve de 0.0333, & prenant la somme de ces deux fractions, j'ai pour la valeur de 7 sols 8 den. en fractions décimales de la livre, 0.3833.

130. *Quatrieme usage des fractions décimales.* Faire la multiplication des nombres complexes par le moyen des décimales.

Soit proposé de trouver le prix de 27 toises 5 pieds 9 pouces, à 4 liv. 7 sols 8 den. la toise.

Je réduis les 5 pieds 9 pouces en parties décimales de la toise, suivant l'art. 127, & j'ai 27t.9583 de toise; de même je réduis les 7 sols 8 den. en parties décimales de la livre, & j'ai par l'art. 128, 4l.3833, je multiplie ces deux nombres l'un par l'autre, au lieu de multiplier 27 toises 5 pieds 9 pouces par 4 liv. 7 sols 8 deniers, & ayant trouvé le produit 122.54961639, je fais ensorte qu'il y ait huit rangs de décimales après le point (art. 117), parce qu'il y en a quatre au multiplicande & au multiplicateur, & j'ai 122 au rang des livres, reste à sçavoir ce que vaut la fraction décimale 0.54961639, exprimée en sols & en deniers: c'est ce que nous allons expliquer dans l'article suivant.

```
      27.9583
       4.3833
     --------
       838749
      838749
     2236664
     838749
    1118332
   ------------
   122.54961639
```

131. Réduire une fraction décimale en parties connues, ou, ce qui est la même chose, évaluer une fraction décimale.

On multipliera la fraction décimale par le nombre qui marque combien de fois la quantité à laquelle on veut réduire, est

contenue dans le tout, dont la fraction est décimale; & lorsqu'on aura trouvé le produit, le nombre qui se trouvera hors du rang des décimales, sera celui que l'on demande : par exemple, si l'on me propose d'évaluer cette fraction de livre 0.35 en sols, je multiplie 0.35 par 20, le produit est 7.00; d'où je conclus que cette fraction vaut 7 sols, puisque le nombre 7 se trouve hors du rang des décimales. De même si l'on me propose d'évaluer en pieds & pouces cette fraction de toise 0.9583, je multiplie d'abord ce nombre par 6, qui marque combien de fois la toise contient le pied, je trouve au produit 5.7498, d'où je conclus d'abord que cette fraction vaut cinq pieds; la partie décimale 7498 exprime donc des parties décimales de pieds. Pour sçavoir ce qu'elle vaut de pouces, je multiplie ce nombre par 12, qui marque combien de fois le pouce est contenu dans le pied, le produit est 8.9976; d'où je conclus encore que 0.7498 de pied valent 8 pouces, puisque 8 se trouve au rang des entiers; & de plus je prends 9, à cause que la fraction restante $\frac{9976}{10000}$ est presque égale à l'unité : donc la fraction décimale de toise 0.9583 vaut 5 pieds 9 pouces, comme on le sçait par l'art. 127.

La raison de cette pratique est aisé à déduire de la nature des décimales; car lorsque je multiplie la fraction 0.35 de liv. par 20, le produit 7.00 est bien vingt fois plus grand, mais il n'exprime plus que des parties décimales de sols, au lieu qu'auparavant il exprimoit des parties décimales de livres, qui sont vingt fois plus grandes.

En suivant ce procédé, on trouvera que la fraction de livre 0.54961639, vaut 10 sols 11 den. $+\frac{907840}{1000000}$; & si l'on eût cherché le même prix, suivant les regles des parties aliquotes, on auroit trouvé 1 22 liv. 11 sols 0 d.; ce qui montre la précision de chacune de ces méthodes. Cependant il faut avouer que celle des parties aliquotes a quelque chose de plus expéditif dans la pratique, quoique les principes sur lesquels chaque méthode est fondée soient fort simples, & à la portée de tout le monde.

Remarque générale sur les Fractions décimales.

132. Lorsque les fractions décimales contiennent beaucoup de chiffres, on retranche ordinairement les deux derniers, vu

l'erreur insensible qui en résulte. Par exemple, pour évaluer cette derniere fraction de livres 54961639, on aura à peu près la même précision en évaluant celle-ci, 5497, que l'on a, en retranchant les quatre derniers chiffres de la précédente, & mettant une unité au 6 pour compenser ce retranchement. On verra encore d'autres usages des fractions décimales dans l'extraction des racines quarrées & cubiques, qui sont encore plus importans que les précédens.

DU CALCUL DES EXPOSANS,

DE LA FORMATION DES PUISSANCES,

ET DE L'EXTRACTION DES RACINES.

Du Calcul des Exposans.

133. NOUS avons déja vu (art. 39.) qu'un exposant est un nombre que l'on met vers la droite d'une lettre, un peu plus élevée qu'elle, & qui marque combien de fois on auroit dû écrire cette lettre, ou combien de fois elle est multipliée par elle-même. a^3, a^5, a^2b^3, a^4b^8 sont des quantités exponantielles. Mais on trouve souvent en Algebre des quantités qui ont des exposans positifs & négatifs, positifs entiers, & positifs fractionnaires, négatifs entiers, & négatifs fractionnaires, comme a^3, a^{-3}, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{-\frac{3}{2}}$; on trouve même quelquefois des lettres qui ont zero pour exposant, comme a^0, b^0, &c. Il s'agit de sçavoir ce que peuvent signifier ces expressions, c'est ce que nous allons démontrer, & c'est à quoi se réduit ce qu'on appelle *calcul des exposans.*

Comme ce calcul est fondé sur ces deux suppositions, 1°. que deux lettres ou plusieurs, mises à côté l'une de l'autre, désigneront toujours le produit des grandeurs qu'elles expriment; 2°. Que pour diviser deux grandeurs algébriques l'une par l'autre, il faut les poser en fraction, & effacer les lettres communes au diviseur & au dividende, ou communes au numérateur & au dénominateur, il faut se rendre attentif à tout ce qui est renfermé dans ces deux hypotheses, & l'on en déduira aisément tout ce que nous allons voir.

134. Pour multiplier deux grandeurs qui ont les mêmes lettres avec différens exposans l'une par l'autre, il faut écrire ces lettres les unes à côté des autres, & leur donner la somme des exposans des deux facteurs : ainsi $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$, $a^2b^3 \times a^4b^2 = a^{2+4}b^{3+2} = a^6b^5$; car $a^3 = aaa$, & $a^2 = aa$: donc $a^3 \times a^2 = aaa \times aa = a^5$; de même $a^2b^3 = aabbb$, & $a^4b^2 = aaaabb$: donc $a^2b^3 \times a^4b^2 = aabbb \times aaaabb = aaaaaabbbbb$.

135. Comme la Division fait toujours le contraire de la Multiplication, elle doit aussi se faire par une voie opposée : donc puisque la multiplication des quantités qui ont les mêmes lettres, avec différens exposans, se fait par l'Addition de ces mêmes exposans, la Division doit se faire par la Soustraction des exposans des lettres communes au dividende & au diviseur : ainsi $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a$, & c'est ce que l'on fait, lorsqu'après les avoir mis en fraction, on efface les lettres communes au numérateur & au dénominateur ; car $\frac{a^3}{a^2} = \frac{aaa}{aa}$ effaçant aa au numérateur & au dénominateur, il vient a au quotient, de même que par la Soustraction des exposans. Tout de même $\frac{a^4b^2c^5}{a^3bc^2} = \frac{aaaabbccccc}{aaabcc} = abccc = abc^3$, ce que l'on eût aussi trouvé par la Soustraction des exposans, en faisant $\frac{a^4b^2c^5}{a^3bc^2} = a^{4-3}b^{2-1}c^{5-2} = abc^3$. De même $\frac{d^2f^3g^4}{dfg^2} = d^{2-1}f^{3-1}g^{4-2} = df^2g^2$; de même encore $\frac{a^2b^5}{a^3b^2} = \frac{b^3}{a}$ en effaçant les lettres communes au numérateur & au dénominateur, ou bien en faisant la soustraction des exposans $a^{2-3}b^{5-2} = a^{-1}b^3$. On voit à présent ce que c'est qu'un exposant négatif ; car il est évident que le négatif vient de la soustraction d'un nombre plus grand, ôté d'un plus petit que lui : donc une quantité qui a un exposant négatif est le quotient d'une certaine puissance d'une lettre divisée par une plus haute puissance de la même lettre ; ainsi a^{-2} peut venir de $\frac{a^3}{a^5}$, ou bien de $\frac{a^5}{a^7}$ ou de $\frac{a}{a^3}$, &c, car $\frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3 \times 1}{a^3 \times a^2}$; donc en divisant le numérateur & le dénominateur de la fraction par une même grandeur a^3, il vient au quotient $\frac{1}{a^2}$: mais on trouve aussi le quotient de $\frac{a^3}{a^5}$ en ôtant l'exposant 5 du diviseur de l'exposant 3 du dividende, & le quotient est

$a^{3-5} = a^{-2}$; donc $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$: en général une lettre élevée à une puissance négative est égale au quotient de l'unité, divisée par la même puissance positive de la même lettre. $a^{-2}b^3 = b^3 \times \frac{1}{a^2} = \frac{b^3}{a^2}$, $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, & ainsi des autres.

136. Si l'exposant du diviseur est égal à l'exposant du dividende, la différence de l'exposant sera zero : donc $a^0 = \frac{a^2}{a^2} = \frac{a^3}{a^3} = a^{2-2} = a^{3-3}$, &c. Donc en général $a^0 = 1$; car une grandeur, divisée par elle-même, donne toujours 1 au quotient, puisqu'elle se contient une fois.

De la formation des Puissances, des Quantités exponentielles, & de l'extraction de leurs racines.

137. On appelle puissance en général, tout produit qui résulte de la multiplication d'une quantité multipliée plusieurs fois par elle-même. a^3, a^2, a^5 sont des puissances de a, parce que ces produits résultent de a, multiplié plusieurs fois par lui-même : dans ces exemples il a été multiplié trois fois, deux fois, cinq fois, parce que les exposans sont 3, 2 & 5.

138. Comme la multiplication d'une même lettre, qui a différens exposans, se fait par l'addition des exposans (art. 133), les puissances d'une quantité algébrique, qui a déja un exposant, ou les produits de cette quantité, multipliée plusieurs fois par elle-même, se trouveront par l'addition de cet exposant, répétés autant de fois qu'il y a d'unité dans la puissance à laquelle on veut élever cette quantité ; mais l'addition répétée d'un même nombre se fait par la multiplication : donc la formation des puissances d'une quantité exponentielle se fera en multipliant son exposant par le nombre qui marque la puissance à laquelle on veut l'élever : ainsi pour élever a^2 à la 3e, 4e ou 5e puissance, il faudra ajouter l'exposant 2 à lui-même trois fois, quatre fois, ou cinq fois, ou, ce qui est la même chose, le multiplier par 3, par 4, ou par 5, & l'on aura pour la 3e, 4e, ou 5e puissance de a^6 ; a^8, a^{10}. De même pour élever $a^2 b^3 c^4$ à la cinquieme puissance, il faudra multiplier les exposans des lettres a, b, c, qui sont 2, 3, 4 par 5, & les produits, mis à côtés des mêmes lettres, donneront la puis-

sance demandée égale à a^{10}, b^{15}, c^{20}. De même la quatrieme puissance de $c^2 b^3 f^6$ est $c^8 b^{12} f^{24}$, & ainsi du reste.

139. Si l'on avoit une fraction que l'on voulût élever à une puissance, & dont le numérateur & le dénominateur fussent chacuns des quantités exponentielles, on l'éleveroit à cette puissance en multipliant les exposans du numérateur & du dénominateur par l'exposant de la puissance ; car une fraction multipliée par une fraction est égale au produit des numérateurs, divisé par celui des dénominateurs. Ainsi pour élever la fraction $\frac{a^2 b^3}{c^4}$ à la seconde puissance, on écrira $\frac{a^{2\times 2} b^{3\times 2}}{c^{4\times 2}} = \frac{a^4 b^6}{c^8}$; de même la 3e puissance de la fraction $\frac{a^3 f^2 c^4}{b^5 g^2} = \frac{a^9 f^6 c^{12}}{b^5 g^6}$, & ainsi des autres.

140. L'extraction des racines fait précisément le contraire de la formation des puissances. Extraire la racine d'une quantité algébrique, c'est chercher la quantité qui, multipliée par elle-même, a donné la quantité dont on cherche la racine. Comme il y a différentes puissances, il y a aussi différentes racines : la racine quarrée d'une quantité algébrique est la lettre ou quantité, qui multipliée une fois par elle-même, a donné le quarré proposé ; la racine cube est celle qui, multipliée deux fois par elle-même, a donné le cube proposé, ou bien dont l'exposant, multiplié par 3, a donné ce même cube. Si l'on veut indiquer cette racine, on se sert du signe $\sqrt{\ }$, que l'on appelle signe radical, & qui sert pour marquer toutes les racines, en mettant au dessus un chiffre qui marque la racine que l'on veut prendre. Ainsi $\sqrt[2]{\ }, \sqrt[3]{\ }, \sqrt[4]{\ }, \sqrt[5]{\ }$ sont des signes qui indiquent les racines seconde, troisieme, quatrieme ou cinquieme ; quand on veut marquer une racine quarrée, on sous-entend presque toujours le 2, & l'on marque ainsi $\sqrt{\ }$: par exemple, $\sqrt{a^2}$ indique qu'il faut prendre la racine quarrée de la quantité a^2, $\sqrt[3]{a^3}$ indique que l'on prend la racine cube de a^3. La racine quarrée de a^2 est a, car $a \times a$ donne a^2 ; la racine cube de a^3 est a, car $a \times a \times a$ donne a^3 : de même la racine quatrieme de a^4 est a, car $a \times a \times a \times a$ donne a^4, & ainsi de suite.

141. Comme l'extraction des racines est une opération directement opposée à la formation des puissances, que celle-ci

décompose les quantités que l'autre avoit composées, la maniere dont on doit la pratiquer doit aussi être directement opposée à celle dont on se sert pour l'élévation des puissances. Mais (n°. 136.) la formation des puissances se fait, en multipliant l'exposant de la quantité que l'on veut élever par l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever cette quantité; donc l'extraction des racines se fera en divisant l'exposant de la quantité donnée par l'exposant de la racine que l'on demande. Si l'exposant de la grandeur donnée est divisible par l'exposant de la racine, on aura la racine exacte, sinon on aura pour la racine cherchée une quantité, dont l'exposant sera une fraction, ou bien on se contentera d'indiquer la racine, en la mettant sous le signe $\sqrt{}$, au dessus duquel on mettra un nombre qui marque la racine que l'on demande. Tout ceci s'entendra aisément par des exemples. Pour avoir la racine quarrée ou 2e de a^2b^6, je divise les exposans 2 & 6 par 2, exposant de la racine; je mets les quotiens 1 & 3 en exposant à côté des lettres ab, & j'ai pour la racine demandée a^1b^3; (car lorsqu'une lettre n'a pas d'exposant, on lui suppose toujours l'unité pour exposant). Si l'on multiplie ab^3 ou $abbb$ par lui-même une fois, on aura a^2b^6 ou $aabbbbbb$; donc ab^3 est la racine quarrée de a^2b^6: pour avoir la racine cinquieme de $a^{10}b^{15}c^{20}$, j'écris d'abord $a^{\frac{10}{5}}b^{\frac{15}{5}}c^{\frac{20}{5}}$, & faisant la division des exposans par l'exposant 5 de la racine cinquieme, j'ai $a^2b^3c^4 = \sqrt[5]{a^{10}b^{15}c^{20}}$: de même $\sqrt[3]{8a^3b^9c^{12}} = 2a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{9}{3}}c^{\frac{12}{3}} = 2ab^3c^4$, car le cube de 2 est 8, celui de a est a^3, de b^3 est $b^{3\times3}$ ou b^9, celui de c^4 est $c^{4\times3}$ ou c^{12}.

Si l'on me demande la racine cinquieme de a^6b^8, comme les exposans 6 & 8 ne sont pas divisibles par 5, exposant de la racine, je puis indiquer cette racine en deux manieres, ou bien en mettant le signe $\sqrt{}$ avec un 5 au dessus devant la quantité a^6b^8, de cette maniere: $\sqrt[5]{a^6b^8}$, ou bien en mettant aux lettres ab les exposans fractionnaires $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{5}$, en cette maniere: $a^{\frac{6}{5}}b^{\frac{8}{5}}$, & ces deux expressions $\sqrt[5]{a^6b^8}$, ou $a^{\frac{6}{5}}b^{\frac{8}{5}}$ sont égales, car elles désignent chacune la racine cinquieme d'une même grandeur.

142. Il suit delà, que lorsqu'on trouvera une quantité avec un exposant fractionnaire, on en pourra conclure que l'on

prend

prend la racine marquée par le dénominateur de cette même quantité élevée à une puissance égale au numérateur de la fraction : ainsi $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$, $a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$, $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^2b^4}$, $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{5}} = \sqrt{a} \times \sqrt[5]{b^4}$, &c.

143. Il suit encore des mêmes principes, que $a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^3}}$; car par la fin de l'art. 134. $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, & par la même raison $a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$. Mais par l'article précédent $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$; donc $a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a^3}}$: de même $a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{6}} = \frac{b^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt[6]{b^5}}{\sqrt{a^3}}$; de même encore $a^{-3}b^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{a^3b^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{a^3\sqrt[5]{b^4}}$, ou $\frac{a^{-3}}{\sqrt[5]{b^4}}$, & ainsi des autres. On voit par tout ce que nous venons de dire ce que signifie un exposant positif ou négatif entier, ce que signifie un exposant entier, fractionnaire positif ou fractionnaire négatif, & enfin ce que c'est qu'un exposant zero.

144. Lorsqu'on aura une des expressions précédentes, comme a^{-3}, $a^{-\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{4}{5}}$, a^0, & autres semblables, on pourra prendre en leurs places leurs égales, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$, $\sqrt[5]{a^4}$, & 1 à la place de a^0, si cela est à propos, & réciproquement substituer les premieres expressions à la place des secondes, si le calcul le demande ainsi. Voici les formules générales de toutes ces expressions : $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$, $a^0, b^0, q^0 = 1$.

Si l'on avoit des fractions algébriques, dont on voulût extraire les racines, on extrairoit celle du numérateur & celle du dénominateur, suivant les regles précédentes, en supposant que les deux termes sont des quantités incomplexes : car puisque l'on éleve les fractions à des puissances proposées, en y élevant le numérateur & le dénominateur (art. 139), il faut, par la raison contraire, extraire les racines, en prenant celle du numérateur & celle du dénominateur. Ainsi la racine seconde de $\frac{a^6b^8}{c^4} = \frac{a^{\frac{6}{2}}b^{\frac{8}{2}}}{c^{\frac{4}{2}}} = \frac{a^3b^4}{c^2}$, la racine 3e ou cubique de $\frac{a^9f^6c^{12}}{b^6g^6} = \frac{a^{\frac{9}{3}}f^{\frac{6}{3}}c^{\frac{12}{3}}}{b^{\frac{6}{3}}g^{\frac{6}{3}}} = \frac{a^3f^2c^4}{b^2g^2}$, & ainsi des autres.

De la formation des Puissances, des Polinomes, & de l'extraction de leurs racines.

145. On trouve les puissances des quantités algébriques complexes de la même maniere que celles des quantités algébriques incomplexes, c'est-à-dire en multipliant ces quantités par elles-mêmes autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever cette quantité. Pour avoir le quarré de $a+b$, je multiplie $a+b$ par $a+b$, & j'ai (art. 60.) $a^2+2ab+bb$. De même le quarré ou la seconde puissance de $a-b$ est $a^2-2ab+bb$: d'où il suit que généralement le quarré d'un binome contient toujours les quarrés des deux termes, plus ou moins deux rectangles du premier par le second ; plus, lorsque les deux termes sont positifs ou négatifs, & moins lorsque l'un ou l'autre est négatif : car il est clair que $-\overline{a-b} \times -\overline{a-b}$ donne $a^2+2ab+bb$, de même que $\overline{a+b} \times \overline{a+b}$, & que $-\overline{a+b} \times -\overline{a+b}$ donne $a^2-2ab+b^2$, aussi-bien que $\overline{a-b} \times \overline{a-b}$.

Si la quantité que l'on veut élever au quarré avoit plus de deux termes, 4 ou 5, par exemple, comme $a+b+c+d$, on trouveroit toujours le quarré de cette quantité, en la multipliant une fois par elle-même : mais on peut le trouver d'une maniere beaucoup plus expéditive. Je prends d'abord les quarrés de tous les termes qui composent cette quantité, soit que tous ces termes soient positifs, soit que tous soient négatifs, ou qu'il y en ait de positifs & de négatifs. Je prends ensuite le double du premier terme, que je multiplie par tous les suivans, en donnant au produit le signe du premier terme, si chacun des suivans a le même signe que ce premier terme, & un signe différent si celui du terme par lequel je multiplie le double du premier est différent de celui du même premier. Je prends pareillement le double du second, que je combine avec les suivans par multiplication, en suivant la même regle ; je prends de même le double du troisieme, que je combine encore de même avec les autres, jusqu'à ce que je sois arrivé à l'avant dernier, que je combine avec le dernier de la même maniere, & l'opération est achevée.

Ainsi pour élever $a+b-c+d-f+g$ à la seconde puissance,

je prends d'abord tous les quarrés positifs des termes qui composent cette quantité, & j'ai pour une premiere partie du quarré que je cherche $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2$: je prends ensuite le double du premier terme a, qui est $2a$, que je combine par multiplication avec tous les suivans, & j'ai pour une seconde partie du quarré que je cherche $2ab - 2ac + 2ad - 2af + 2ag$, en donnant le signe + aux termes qui ont le même signe + que $2a$, & le signe à ceux qui ont le signe —. Je prends pareillement le double de b, qui est $2b$, & le combinant, ainsi que j'ai fait pour a, avec ceux qui le suivent, j'ai $- 2bc + 2bd - 2bf + 2bg$ pour la troisieme partie du quarré que je cherche. Je prends encore le double de $-c$, qui est $-2c$, & j'ai $- 2cd + 2cf - 2cg$, en mettant + aux termes qui ont le signe —, & — à ceux qui ont le signe +. Je trouve de même, en prenant le double du quatrieme terme d, qui est $2d$, $- 2df + 2dg$; & enfin prenant le double de $-f$, qui est $-2f$, je trouve $-2fg$ pour la derniere partie du quarré que je cherche. Ajoutant toutes ces parties, j'ai pour le quarré demandé $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2 + 2ab - 2ac + 2ad - 2af + 2ag - 2bc + 2bd - 2bf + 2bg - 2cd + 2cf - 2cg - 2df + 2dg - 2fg$. La preuve de cette pratique se fera en multipliant cette quantité par elle-même, & l'on trouvera les mêmes quantités, quoique dans un ordre différent. Mais la valeur du quarré ne dépend pas de l'ordre dans lequel les termes sont disposés : il sera toujours le même, pourvu qu'il y ait autant de termes qu'il doit y en avoir, & que chacun d'eux ait le signe qu'il doit avoir. On pourroit encore se servir du même abrégé, si les termes avoient des coefficiens différens de l'unité. Par exemple, le quarré de $3a - 2b + 4c$ se trouvera en suivant cette méthode, $9a^2 + 4b^2 + 16c^2 - 12ab + 24ac - 16bc$.

De l'Extraction de la Racine quarrée, des Quantités algébriques complexes.

146. Pour extraire la racine quarrée d'une quantité algébrique complexe, par exemple, celle de la quantité $a^2 + 2ab + bb$, il faut dire, la racine de aa est a, qu'il faut poser à la racine : ayant multipliée cette racine par elle-même, il faut ôter le produit aa de la quantité proposée pour avoir le reste

$2ab + bb$: ensuite il faut doubler a, & diviser le reste $2ab + bb$ par ce diviseur $2a$. Faisant la division de $2ab$ par $2a$, il vient b, qu'il faut mettre à la suite de la racine, & à la suite du diviseur $2a$. Enfin il faut multiplier par ce quotient b le diviseur devenu $2a + b$, & soustraire le produit $2ab + bb$ du reste $2ab + bb$; & comme il ne reste rien après la soustraction, l'on conclura que la racine de $a^2 + 2ab + bb$, est $a + b$.

Pour voir si l'on a bien fait l'opération, on multipliera la racine $a + b$ par elle-même, & comme le produit est $a^2 + 2ab + bb$ égal à la quantité proposée, on sera sûr que l'on a bien opéré.

147. Pour extraire la racine quarrée de $a^2 - 2ab + bb$, il faut dire, la racine quarrée de a^2 est a, qu'il faut mettre à la racine ; ensuite ôter le quarré aa de cette racine de la quantité proposée pour avoir le reste, $-2ab + bb$, qu'il faut pareillement diviser par $+2a$, le quotient est $-b$, que je pose à la racine, & à côté du diviseur. Je multiplie $2a - b$ par $-b$, le produit est $2ab + bb$; ôtant ce produit de $-2ab + bb$, comme il ne reste rien, je conclus que $a - b$ est la racine.

ARTICLE 146.

	$a^2 + 2ab + b^2$	$a + b$, racine.	
Reste	$2ab + b^2$	$2a$	diviseur.
Soustract.	$2ab - bb$	$2a + b$	
	$0 \quad 0$	b	
		$2ab + bb$	

ARTICLE 147.

	$a^2 - 2ab + b^2$	$a - b$, racine.	
Reste	$-2ab + bb$	$2a$	diviseur.
Soustraction	$+2ab - bb$	$2a - b$	
	$0 \quad 0$	$-b$	
		$-2ab + bb$	

148. De même pour avoir la racine quarrée de la quantité $9a^2 - 12ab + 4b^2 + 24ac - 16bc + 16c^2 + 24ac - 16bc$, je dis, la racine quarrée de $9a^2$ est $3a$, que je pose à la racine, & j'ôte le quarré de cette racine de la quantité proposée : pour avoir le reste $-12ab + 4b^2 + 24ac - 16bc + 16c^2$, je double cette racine $3a$, & j'ai $6a$ pour diviseur. Je divise $-12ab$ par

$6a$, le quotient eſt $-2b$, que j'écris à la racine, à côté de $3a$, & à côté du diviſeur $6a$; ce qui me donne $6a - 2b$, que je multiplie par $-2b$, pour avoir le produit $-12ab + 4bb$, que j'écris au deſſous du premier reſte avec des ſignes contraires pour avoir un ſecond reſte, en effaçant ce qui ſe détruit, que je trouve être $24ac - 16bc + 16c^2$: je double encore ce que j'ai trouvé à la racine pour avoir le nouveau diviſeur $6a - 4b$, par lequel je diviſe le premier terme $24ac$ du ſecond reſte ; ce qui me donne au quotient $4c$, que j'écris à la ſuite de la racine, & à côté du diviſeur $6a - 4b$: je multiplie cette ſomme par le même quotient $4c$, & j'en ôte le produit $24ac - 16bc + 16c^2$ du dernier reſte ; & comme la Souſtraction ſe fait ſans reſte, je conclus que $3a - 2b + 4c$ eſt la racine du quarré propoſé : je leve cette quantité au quarré, & je trouve qu'elle donne effectivement une quantité égale à celle que l'on avoit donnée pour en extraire la racine.

ARTICLE 148.

$9a^2 - 12ab + 4b^2 + 24ac - 16bc$	$3a - 2b + 4c$, racine.
$-9a^2 \quad \{ + 16cc$	$6a$ premier diviſeur.
1er reſte $-12ab + 4b^2 + 24ac$	$6a - 2b$
$-16bc + 16cc$	$-2b$
$+12ab - 4bb$	$-12ab + 4bb$
Second reſte $24ac - 16bc + 16c^2$	$6a - 4b$, 2e diviſ.
$-24ac + 16bc - 16c^2$	$6a - 4b + 4c$
0 0 0	$+4c$
	$24ac - 16bc + 16cc$

Il eſt évident que la méthode dont on ſe ſert pour extraire la racine doit la faire trouver néceſſairement, ſi la quantité propoſée en a une : car nous avons déja vu pluſieurs fois que le quarré d'une quantité complexe contient le quarré du premier terme, le double du premier par le ſecond, & le quarré du ſecond. Lorſque l'on a pris la racine quarrée du premier terme, on a celui de la racine : ainſi pour avoir le ſecond de la même racine, il n'y a qu'à doubler ce premier, & diviſer par ce double un terme qui renferme deux lettres ; & ſi l'on a un quotient, ce ſera le ſecond terme de la racine, pourvu que le quarré de ce ſecond terme ſoit encore contenu dans la quantité propoſée. Or par notre méthode on prend le quarré de

ce terme, puisque l'on ajoute ce nombre au diviseur pour multiplier le tout par ce second terme; & s'il ne reste rien, on sera sur que la quantité est un quarré parfait, & de plus celui des deux termes que l'on a trouvés, puisque l'on a pu en soustraire le quarré du premier, le double rectangle du même premier par le second, & le quarré du second. Le raisonnement est toujours le même, quelque soit le nombre des termes de la racine; car on peut toujours regarder ce que l'on a trouvé comme le premier, & ce que l'on cherche comme le second d'une quantité de deux termes, puisque l'on peut toujours réduire un polinome quelconque, comme $a+b+c+d$ à un binome, en supposant $a+b+c=f$; ce qui donne $a+b+c+d=f+d$.

149. Si la quantité proposée pour en extraire la racine n'est pas un quarré parfait, on se contentera d'indiquer que l'on en prend la racine, en la mettant sous le signe $\sqrt{}$, que l'on appelle *radical*, comme nous avons déja vu : ainsi la racine de $aa-bb$ est $\sqrt{aa-bb}$, la racine de $a^2-2bc+ac$ est $\sqrt{a^2-2bc+ac}$, & l'on appelle ces quantités, des *quantités radicales* ou *irrationnelles*, quelquefois *incommensurables*.

De la formation du quarré d'un nombre quelconque, & de l'extraction des racines sur les grandeurs numériques.

150. Le quarré d'un nombre quelconque se trouve en multipliant ce nombre par lui-même : ainsi le quarré de 3247 se trouveroit en multipliant ce nombre une fois par lui-même, suivant les regles de la Multiplication. Mais pour déterminer avec plus de précision les différentes parties qui composent ce quarré, & faire entendre plus aisément ce que nous avons à dire sur l'extraction des racines, nous rapporterons la formation du quarré de ce nombre à celle du quarré d'une quantité algébrique complexe, en le regardant lui-même comme une quantité de cette nature, & le décomposant en ses parties $3000+200+40+7$, & faisant $3000=a$, $200=b$, $40=c$, $7=d$: donc le quarré 3247, ou de $3000+200+40+7$ sera représenté par celui de la quantité algébrique $a+b+c+d$, qui est $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2+2ad+2bd+2cd+dd$, ou $a^2+2ab+b^2+\overline{2a+2b}\times c+c^2+\overline{2a+2b+2c}\times d+d^2$.

En faisant toutes les Multiplications nécessaires, on trouvera

9	00	00	00	$= a^2$
1	20	00	00	$= 2ab$
	4	00	00	$= bb$
	25	60	00	$= \overline{2a+2b} \times c$
		16	00	$= c^2$
	4	53	60	$= \overline{2a+2b+2c} \times d$
			49	$= d^2$

$10,54,30,09 = a^2 + 2ab + b^2 + \overline{2a + 2b} \times c + c^2 + \overline{2a + 2b + 2c} \times d + dd.$

Sur quoi l'on remarquera qu'en partageant ces produits partiels en tranches de deux chiffres chacunes, excepté la derniere à gauche, qui peut n'en contenir qu'un,

1°. Le quarré du chiffre significatif 3 du premier terme 3000, aura après lui autant de tranches de deux chiffres chacunes, qu'il a de chiffres après lui dans le nombre 3247, & qu'ainsi ce quarré doit se trouver au produit total dans la premiere tranche à gauche 10.

2°. Que le produit 1200000 fait du double 6000 du premier terme 3000, multiplié par le second 200, sera renfermé dans le premier chiffre de la seconde tranche, joint au reste que l'on aura eu, en ôtant le quarré de 9000000 de la premiere.

3°. Que le quarré du même second terme 40000 sera encore contenu dans le dernier chiffre de la seconde tranche, ayant après lui autant de tranches qu'il y a de chiffres dans le nombre 3247; d'où il suit, en résumant ces trois articles, que les deux premieres tranches contiennent le quarré 9000000 du premier terme 3000, le double du produit du premier terme 3000, par le second 200, & enfin le quarré du second.

4°. Que le produit du double des deux premiers termes par le second 40, représenté par $\overline{2a + 2b} \times c$, lequel est 256000, se trouvera renfermé dans le premier chiffre 3 de la troisieme tranche, puisque le 6 est directement au dessus du 3 de cette tranche, & que le quarré 1600 du même troisieme terme sera encore contenu dans la troisieme tranche, jointe à ce qu'il précéde. Ainsi les trois premieres tranches contiennent le quarré des trois premiers termes, le double du premier, multiplié par le second, & le double des deux premiers par le troi-

fieme, lefquels produits font repréfentés par $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab$ $+ \overline{2a + 2b} \times c$.

5°. Enfin l'on verra que le double du produit des trois premiers termes 3000 + 200 + 40, multipliés par le fecond, eft renfermé dans le premier chiffre de la derniere tranche, & que le quarré de ce dernier terme 7 eft renfermé dans le dernier chiffre de la derniere tranche; & qu'ainfi le quarré de la grandeur complexe 3000 + 200 + 40 + 7, ou du nombre 3247, eft renfermé dans le nombre 10443009, puifque ce nombre renferme tous les produits dont il peut être compofé.

Tout cela pofé, il fera facile d'entendre ce que nous allons dire fur l'extraction des racines.

151. Extraire la racine quarrée d'un nombre, c'eft chercher un nombre qui, multiplié par lui-même, donne au produit un nombre égal au nombre propofé : extraire la racine de 25, c'eft chercher le nombre 5, qui multiplié par lui-même une fois, donne 25 au produit. Toutes les fois qu'un nombre propofé, pour en extraire la racine, ne contiendra que deux chiffres, ou fera moindre que 100, on pourra, fans aucune opération, trouver fa racine vraie ou la plus proche, par le moyen de la Table fuivante.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81

Mais lorfque les nombres feront plus confidérables, l'opération devient plus compliquée, & c'eft ce que nous allons détailler, après que nous aurons donné les réflexions fuivantes, qui font néceffaires pour une exacte démonftration de la regle générale de l'extraction des racines quarrées.

152. Le plus grand nombre poffible de deux chiffres 99 ne peut avoir plus d'un chiffre à fa racine : car fuppofons qu'il puiffe en avoir deux, & que ce nombre de deux chiffres foit le plus petit poffible, qui eft 10, ou élevant 10 au quarré, on verra que ce quarré 100 eft plus grand que 99 : donc un nombre de deux chiffres quelconque ne peut en avoir plus d'un à fa racine; ce qui eft vifible auffi par la Table précédente. Ainfi toutes les racines d'un chiffre font comprifes, depuis 1 jufqu'à 99 inclufivement.

151.

153. Le plus grand nombre possible de quatre chiffres ne peut en avoir plus de deux à sa racine. Prenons le plus grand nombre possible de quatre chiffres, qui est 9999, puisque si on lui ajoute l'unité, il devient 10000, qui en a 5; & supposons que ce nombre puisse avoir à sa racine le plus petit nombre composé de trois chiffres, qui est 100, j'éleve 100 à son quarré, & il me vient 10000, qui est plus grand que le nombre 9999: donc il ne peut pas avoir à sa racine aucun nombre de trois chiffres. D'où il suit que toutes les racines de deux chiffres sont renfermées, depuis 100 jusqu'à 9999 inclusivement.

154. Le plus grand nombre de six chiffres ne peut en avoir plus de trois à sa racine. Prenons le plus grand nombre de six chiffres, qui est 999999, & supposons qu'il puisse avoir pour racine le plus petit nombre de quatre chiffres, qui est 1000, j'éléve 1000 à son quarré, & j'ai 1000000, qui a sept chiffres, & est plus grand que le nombre 999999, & par conséquent ce nombre ne peut donner que trois chiffres à la racine. D'où il suit que les racines de trois chiffres sont renfermées, depuis 10000 jusqu'à 999999 inclusivement.

155. En continuant le même raisonnement, on verra que toutes les racines de quatre chiffres sont comprises, depuis 1000000 jusqu'à 99999999; que les nombres ou racines de 5 chiffres sont contenues depuis 100000000 jusqu'à 9999999999 inclusivement, &c.

REMARQUE GÉNERALE.

156. Il suit de tout ce que nous venons de dire, qu'en général un nombre aura toujours à sa racine autant de chiffres qu'on aura de tranches de deux chiffres, en le partageant de deux en deux de droite à gauche, excepté la derniere tranche, qui peut n'en contenir qu'un.

Ainsi 99 ne peut avoir qu'un chiffre, parce qu'il n'a qu'une tranche de deux chiffres. 100 & 9999 auront deux chiffres à leurs racines, parce qu'en les divisant en tranches de cette maniere: 1,00; 99,99, chacun en contient deux. De même 10000 & 999999 auront aussi trois chiffres à leurs racines, ainsi que tous les nombres qui leur sont intermédiaires, parce qu'en partageant chacun en tranches, on a 1,00,00 & 99,99,99; ils contiennent chacun trois tranches. De plus, le quarré du premier chiffre se trouvera dans la premiere tranche, le quarré

du second se trouvera dans la seconde tranche, le quarré du troisieme se trouvera dans la troisieme tranche ; ce qui revient encore à ce que nous avons vu précédemment dans la formation algébrique du quarré d'un nombre (art. 150). Cela posé, nous allons donner la regle générale, & nous en ferons l'application à quelques exemples.

Regle générale pour l'extraction des Racines quarrées.

157. Un nombre étant donné pour en extraire la racine, on partagera ce nombre en tranches de deux chiffres chacunes, excepté la premiere à gauche, qui peut n'en contenir qu'un seul ; on cherchera quel est le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche, on en prendra la racine, que l'on posera à la racine, à côté d'un nombre proposé, après l'avoir séparé par une petite barre verticale ; on élevera cette racine à son quarré pour l'ôter de la premiere tranche, & l'on écrira le reste au-dessous, & l'opération sera faite sur la premiere tranche. A côté de ce reste, on abaissera la seconde tranche, en mettant un point au dessous du premier chiffre de cette seconde tranche ; on doublera ce que l'on a trouvé à la racine, & par ce nombre on divisera les chiffres qui sont terminés au premier chiffre de la seconde tranche ; on mettra le quotient à la suite du diviseur, & on multipliera le diviseur ainsi augmenté par ce même quotient. Si le produit peut être ôté des chiffres du reste & de la seconde tranche, le quotient sera le second chiffre de la racine, & on le posera à côté du premier chiffre. Si ce produit étoit plus grand, on diminueroit le quotient d'une unité, & l'on feroit l'opération de même, jusqu'à ce qu'on eût un nombre que l'on pût retrancher des chiffres sur lesquels on opére ; & l'ayant trouvé, on cherchera le reste qui doit venir par la soustraction de ce produit.

On abaissera la troisieme tranche à côté de ce reste, en mettant un point sous le premier chiffre de la troisieme tranche, & l'on diviseroit les chiffres terminés au premier de la troisieme, par le double de ce qu'on auroit trouvé à la racine : on posera de même ce quotient à côté du diviseur ; & si le produit du diviseur ainsi augmenté, multiplié par le quotient, donne un produit moindre que le second reste, joint à la troisieme tranche, ce quotient sera le troisieme chiffre de la racine ;

sinon il faudra diminuer ce quotient de l'unité, jusqu'à ce que ce quotient, posé à côté du diviseur, multipliant le tout, donne un produit moindre, ou au moins égal aux chiffres sur lesquels on opére.

S'il n'y a que trois tranches, & qu'après avoir retranché ce produit il ne reste rien, on aura la racine demandée; s'il y en davantage, on abaissera la tranche suivante à côté du reste, & l'on fera toujours la même opération, en prenant toujours pour diviseur le double des chiffres que l'on a trouvés à la racine, & prenant pour les termes de la racine ceux qui auront les conditions expliquées ci-devant; sçavoir, que le produit de ce nombre par lui-même, plus le produit du même nombre par le diviseur soit plus petit, ou au moins égal aux chiffres supérieurs.

EXEMPLE I.

158. Soit proposé d'extraire la racine quarrée du nombre 1936, je partage ce nombre en tranches de deux chiffres chacune, en l'écrivant ainsi, 19,36; & je dis, en 19 quel est le plus grand quarré qui y soit contenu, ce quarré est 16, dont la racine est 4, je pose 4 à la racine, après avoir séparé le nombre 1936 de sa racine par une petite barre verticale. Je dis ensuite, quatre fois 4 font 16 de 19, reste 3 : j'abaisse la seconde tranche 36 à côté du reste 3, en mettant un point sous le premier chiffre 3 de cette tranche: je double ce chiffre 4 que j'ai trouvé à la racine pour avoir le diviseur 8, par lequel je divise les deux premiers chiffres 33 du reste, & de la seconde tranche; & je dis en 33 combien de fois 8, quatre fois: je pose 4 à côté du diviseur 8; ce qui me donne 84, que je multiplie par le même quotient 4, en disant, quatre fois 4 font 16, pose 6 & retiens 1 : quatre fois 8 font 32, & 1 que j'ai retenu font 33: le produit est 336, qui ôté de 336, reste 0; d'où je conclus que 44 est la racine du quarré proposé. Pour voir si je ne me suis pas trompé, j'éleve 44 à son quarré, il me vient 1936, qui est le nombre proposé.

ARTICLE 158.

	19,36	{ 44, *racine.*	44	*Preuve.*
	16	{ 8, *diviseur.*	44	
	336	84, *divis. augmenté.*	176	
	336	4, *quotient.*	176	
Différence	000	336, *produit.*	1936	

EXEMPLE II.

159. Soit proposé d'extraire la racine du nombre 10543009, après l'avoir partagé en tranches de deux chiffres chacune, & placé comme on voit ci-après à la gauche d'une barre verticale, à côté de laquelle je dois mettre la racine : je dis, en 10 quel est le plus grand quarré qui y soit contenu, ce quarré est 9, dont la racine est 3, que je pose à la racine : j'éleve 3 à son quarré, il me vient 9, que je retranche de 10, reste 1. J'abaisse la seconde tranche 54 à côté du reste 1, en observant de mettre un point sous le premier chiffre 5 ; & doublant ce que j'ai trouvé à la racine, il me vient 6 pour diviseur : je dis en 15 combien de fois 6, deux fois ; j'écris 6 au dessous du diviseur, & je mets à côté le quotient 2, & je multiplie 62 par 2, le produit est 124, lequel retranché de 154, donne 30 pour second reste : j'abaisse la seconde tranche, qui est 30, à côté du reste 30, en mettant un point sous le premier chiffre 3 de cette seconde tranche ; je double ce que j'ai à la racine pour avoir le second diviseur 64, par lequel je divise les chiffres 303, & je dis en 30 combien de fois 6, cinq fois, je pose le 5 à la suite de 64, en écrivant 645. Je multiplie ce nombre par 5, & comme le produit 3225 ne peut pas être ôté du 3030, j'essaie le 4 ; j'écris donc 644, & multipliant ce nombre par 4, le produit est 2576, qui pouvant être ôté de 3030, m'indique que ce 4 est bon, & je le pose à la racine. J'ôte le nombre 2576 de 3030, le reste est 454, à côté duquel j'abaisse la quatrieme tranche, en mettant un point sous le premier chiffre o de cette tranche 09 pour diviser les chiffres 4540 par le double de ce qui est à la racine, qui est 648. Je dis donc en 45 combien de fois 6, sept fois, je pose le 7 à côté du diviseur 648, en écrivant 6487, & je multiplie ce nombre par 7, le produit est 45409, lequel étant précisément égal au nombre 45409, indique que le 7 est bon : je le pose à la racine qui se trouve de 3247, comme on le sçait d'ailleurs par l'article 150.

ARTICLE 159.

10,54,30,09	3247	
1 54	6, 1er *diviseur.*	*Preuve de l'opération.*
1 24	62	
3030	2	3247
2576	124, *produit.*	3247
45409	64, 2e *diviseur.*	22729
45409	645	12988
	5	6494
00000	3225, *prod. d'épreuve*	9741
	644	10543009
	4	
	2576, *produit.*	
	648, 3e *diviseur.*	
	6487	
	7	
	45409, *produit.*	

EXEMPLE III.

160. Soit proposé d'extraire la racine du nombre 867972, je divise ce nombre en tranches de deux chiffres chacune, en l'écrivant ainsi : 86,79,72 ; puis je dis, en 86 quel est le plus grand quarré qui y soit contenu, ce quarré est 81, dont la racine est 9, que je pose à la racine ; j'éléve 9 à son quarré, & j'ôte ce quarré 81 de 86, reste 5 : j'abaisse à côté du 5 la seconde tranche 79, en mettant un point sous le premier chiffre 7, ce qui me donne 57 à diviser par 18, double de 9, qui est à la racine. Je fais la division, & je dis, en 5 combien de fois 1, il y est cinq fois ; mais comme je vois aisément qu'il n'est pas bon, parce qu'il me donneroit un produit trop fort, j'essaie tout d'un coup le 4, en le mettant à la suite du diviseur 84 : je multiplie 184 par 4, le produit est 736, qui étant plus grand que 579, me marque que le 4 n'est pas encore bon, ainsi je ne le mets point à la racine. J'éprouve le 3, en mettant 183, & multipliant ce nombre par 3, le produit est 549 ; comme ce produit est moindre que 579, je mets le 3 à la racine. J'ôte ensuite 549 de 579, le reste est 30 ; j'abaisse à côté de ce reste la troisieme tranche 72, en mettant le point sous le premier

chiffre 7, afin de diviser le nombre 3072 par 186, double de ce qui est à la racine : je dis donc en 3 combien de fois 1, il y est trois fois : mais comme je vois que le 3 est trop fort, j'essaie le 2 en le mettant à côté du diviseur 186 ; ce qui me donne 1862, que je multiplie par 2 ; le produit est 3724 : comme ce produit est plus grand que 3072, je conclus que le 2 n'est pas encore bon ; je mets 1 à la racine, qui sera certainement bon, puisqu'en mettant 1 à la suite du diviseur, & multipliant par 1, le produit est 1861, moindre que 3072 : j'ôte ce nombre 1861 de 3072, le reste est 1211.

Si l'on veut faire la preuve de cette opération, il faudra élever la racine 931 que l'on a trouvée à son quarré, lui ajouter le reste 1211, & l'on doit trouver un nombre égal au nombre proposé.

ARTICLE 160.

867972	{ 931	
579	{ 18, 1er *diviseur.*	*Preuve de l'opération.*
549	184	
30772	4	931
1861	736, *produit d'épreuve.*	931
Reste 1211	183	931
	3	2793
	549	8379
	186, *second diviseur.*	866761
	1862	1211
	2	867972
	3724, *produit d'épreuve.*	
	1861	
	1	
	1861	

Maniere d'approcher le plus près qu'il est possible de la racine quarrée d'un nombre, dont on ne peut avoir la racine sans reste, par le moyen des décimales.

161. Comme le principal usage de la racine quarrée dans la Géometrie, & surtout dans la Géometrie pratique, est de trouver en nombre le côté d'un quarré égal à une quantité de toises, ou de pieds quarrés, il est nécessaire, pour agir avec plus de précision, d'approcher le plus près qu'il est possible de

la racine qu'on cherche, en faisant ensorte que les restes que l'on néglige soient de si petite valeur, qu'on puisse les regarder comme de nulle conséquence. Pour cela, voici ce qu'il faut faire.

Regle générale d'approximation.

162. On ajoutera au nombre proposé, pour en extraire la racine, autant de tranches de deux zero chacune, que l'on voudra avoir de décimales à la racine ; & après avoir séparé les entiers de la racine d'avec les décimales qui doivent suivre, on continuera le procédé de l'extraction des racines, précisément de la même maniere qu'il se pratique sur les nombres entiers, comme on le verra dans l'exemple suivant.

8,69,00,00,00,	29,478
469	4, *premier diviseur.*
441	49
2800	9
2336	441
46400	58, *second diviseur.*
41209	585
519100	5
471584	~~2925~~, *produit d'épreuve.*
Reste 47516	584
	4
	2336, *bon produit.*
	588, *troisieme diviseur.*
	5888
	8
	~~47104~~, *produit d'épreuve.*
	5887
	7
	41209, *bon produit.*
	5894, 4me *diviseur.*
	58948
	8
	471584

163. Soit proposé d'extraire la racine de 869, jusqu'à ce que la racine ne différe pas d'un millieme de la vraie valeur. On ajoutera au nombre proposé six zero, parce que l'on veut avoir des milliemes, en écrivant au lieu de 869, 8,69.00,00,00, & après les avoir partagé en tranches de deux en deux, on dira en 8 quel est le plus grand quarré qui y soit contenu; ce quarré est 4, dont la racine est 2, que je pose à la racine. J'ôte ce quarré 4 du premier chiffre 8, il me reste 4, à côté duquel j'abaisse la seconde tranche 69, en mettant un point sous le 6, afin de faire voir que c'est 46 que je divise par le diviseur 4, double de la racine. Je dis donc, en 46 combien de fois 4, neuf fois, je pose 9 à côté du diviseur 4, & au dessous, & je multiplie 49 par 9, le produit est 441, moindre que 469; ce qui me montre que le 9 est un des chiffres de la racine. J'ôte 441 de 469, le reste est 28. J'abaisse à côté de ce reste la premiere tranche de décimales, en mettant un point sous le premier zero, pour marquer que c'est 280 que je veux diviser par le nombre 58, double de ce qui est à la racine. Je fais la Division, & je dis, en 28 combien de fois 5, il y est cinq fois: je pose le 5 à côté du diviseur 58, & au dessous, & je multiplie 585 par 5, le produit est 2925, qui étant plus grand que 28,00, me marque que l'on ne peut pas mettre 5 à la racine: je prends le 4, & j'écris 584, que je multiplie par 4, le produit est 2336, lequel étant moindre que 2800, me marque que le 4 est bon, & je le pose à la racine, après avoir séparé les entiers 29 des décimales par un point. J'ôte ce produit 2336 de 2800, le reste est 464, à côté duquel j'abaisse la seconde tranche de décimales, en mettant un point sous le premier zero. Je divise 4640 par 588, double de ce qui est à la racine; & je dis, en 46 combien de fois 5, il y est 8, je pose le 8 à côté du diviseur 588; & au dessous de ce même diviseur, je multiplie 5888 par 8, le produit est 47104, qui étant plus grand que 46400, fait voir que je ne puis pas mettre 8 à la racine; je prends le 7, que je mets à côté du diviseur 588, & au dessous, puis multipliant 5887 par 7, le produit est 41209; & comme ce produit est moindre que 46400, je pose le 7 à la racine. Je retranche le produit 41209 de 46400, le reste est 5191, à côté duquel j'abaisse la troisieme tranche, en mettant un point sous le premier zero, pour diviser le nombre 51910 par 5894, double de ce que j'ai trouvé à la racine. Je fais la Division, en disant,

en

en 51 combien de fois 5, il y est neuf fois : mais comme je vois que le 9 est trop fort, je passe au 8 ; je pose 8 à côté du diviseur & au dessous, & je multiplie 58948 par 8 : le produit est 471584 ; & comme il est moindre que le nombre 519184, je pose le 8 à la racine, qui se trouve de 29.478, ou, ce qui revient au même, 29 entiers, plus $\frac{478}{1000}$.

164. Si l'on suppose que le nombre 869 soit un nombre de toises quarrées, ce que l'on trouve à la racine au rang des entiers, marque des toises linéaires, & le nombre que l'on trouve au rang des décimales, marque des parties de toises linéaires, comme des pieds, des pouces, & des lignes. Pour sçavoir ce que vaut de pieds la partie décimale $\frac{478}{1000}$ ou 0.478, on multipliera, suivant la regle (art. 131.) le nombre 478 par 6, qui marque combien la toise contient de pieds ; & le reste par 12, qui marque combien le pied vaut de pouces, & le reste encore par 12, qui marque combien le pouce vaut de lignes. En suivant ce procédé, tous les nombres qui se trouveront hors les décimales, marqueront les parties de la toise que l'on demande, qui sont 2 pieds 10 pouces 4 lignes 11 points, ou si l'on veut, à cause du reste que l'on a encore négligé dans les décimales, 2 pieds 10 pouces 5 lignes. La racine du nombre 869 toises est donc 29 toises 2 pieds 10 pouces 5 lignes.

165. Si l'on a un nombre composé de toises, pieds & pouces proposé pour en extraire la racine, comme si l'on demandoit celle du nombre 24 toises 3 pieds 9 pouces, il faudroit réduire les fractions $\frac{1}{2}$ & $\frac{9}{72}$ de toises, qui sont la même chose que 3 pieds 9 pouces, en fractions décimales de la toise, suivant la méthode de l'art. 128 ; de la somme de ces deux fractions décimales, & du nombre proposé faire un seul nombre, que l'on trouvera de 24.625000, dont on extraira la racine, suivant les méthodes données ci-devant ; cette racine se trouvera de 4,962, c'est-à-dire de 4 toises, plus $\frac{962}{1000}$ de toises que l'on évaluera, suivant la méthode de l'art. 131, & que l'on trouvera de 5 pieds 9 pouces 3 lignes 2 points.

Démonstration de la Racine quarrée.

166. Pour démontrer les opérations précédentes, nous extrairons encore la racine quarrée du nombre 676, & nous ferons voir la raison de chaque opération.

On voit par les articles 152, 153, 154 & 155 pour quelle raiſon on diviſe le nombre donné en tranches de deux chiffres chacune, & comment chaque tranche doit donner un chiffre à la racine. Cela poſé, pour extraire la racine de 676, après avoir partagé le nombre en tranches de deux chiffres chacune, excepté la premiere qui n'en contient qu'un, je dis, la racine quarrée de 6 eſt 2, que je poſe à la racine, & qui vaut 20, puiſqu'il doit y avoir deux chiffres à la racine, dont il eſt le premier. Lors donc que j'éleve 2 au quarré, & que je retranche 4 de 6, c'eſt comme ſi j'élevois 40 au quarré, & que je retranchaſſe 400 de 600, puiſque le 6 vaut réellement 600. Selon la regle, j'abaiſſe la ſeconde tranche à côté du reſte 2, & j'ai 276 : je mets un point ſous le 7, parce que nous avons fait voir que le double du premier terme, multiplié par le ſecond, doit ſe trouver compris dans les deux premiers chiffres 27 (n°. 150); mais j'ai le double du premier, & ce nombre 27 contient le double du premier, multiplié par le ſecond: donc en diviſant 27 par le double du premier, je dois trouver le ſecond : je fais la Diviſion, & je dis, en 27 combien de fois 4, il y eſt ſix fois: je mets le 6 à côté du diviſeur & au deſſous, ſelon la regle; ce qui me donne néceſſairement par la Multiplication le quarré de 6, lequel doit être contenu dans les deux derniers chiffres : je dis donc ſix fois 6 font 36, je poſe 6 & retiens 3; ſix fois 4 font 24, & 3 de retenus, font 27, le produit eſt 276 : donc le 6 eſt le ſecond chiffre de la racine : donc 26 eſt la racine du nombre propoſé, puiſque ce nombre contient le quarré du premier 2 ou 20, qui eſt 400, le double du premier 40, multiplié par 6 ou 240, & enfin le quarré 36 du ſecond.

Le raiſonnement que nous faiſons pour une racine de deux chiffres ſe peut appliquer à tout autre; car on pourra toujours partager un nombre quelconque de chiffres en deux parties, dont la premiere contiendra tous les chiffres, excepté le dernier à droite, & la ſeconde contiendra le dernier chiffre. De cette maniere, on verra que lorſqu'on aura trouvé la racine des premiers chiffres, le reſte qui viendra, joint avec la derniere tranche, doit contenir le double des premiers chiffres trouvés, multiplié par le dernier avec le quarré du dernier. D'ailleurs ce double produit ſera toujours placé de maniere, que les chiffres ſignificatifs de ce même produit ſeront toujours terminés au premier chiffre de la derniere tranche: donc

en faisant la Division, on doit trouver le dernier chiffre. Ceci peut encore se démontrer indépendamment de cette supposition, par la formation du quarré, expliquée au n°. 150, & même on ne peut mieux faire que d'y recourir encore, pour voir de quelle maniere on a déduit de cette formation la regle que nous venons de voir; c'est en cela que consiste l'esprit géométrique, & c'est par l'étude de la composition des quantités que l'on acquiert le grand art de les décomposer; je dis le grand art, car c'est le plus difficile de toute la Géométrie, & la décomposition des quantités est son objet dans toutes les méthodes de calcul que l'on propose.

De la formation du Cube d'une quantité complexe, & de l'extraction de la racine cube des quantités algébriques & numériques.

167. Nous avons déja vu, n°. 61, que le cube d'une quantité, composée de deux termes, contient le cube du premier terme, le cube du second, plus deux parallelepipedes, dont le premier a pour base le triple du quarré du premier, & le second pour hauteur, & l'autre a pour base le triple du quarré du second, & pour hauteur le premier; ce que nous avons démontré généralement, en élevant $a+b$ à son cube, que nous avons trouvé $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

168. Le cube d'une quantité, composé de trois termes, ou de quatre termes, se trouvera de même, en multipliant cette quantité deux fois de suite par elle-même; mais on peut la trouver plus aisément, en rapportant la quantité à l'expression générale $a+b$, qui peut représenter une quantité complexe quelconque, en faisant, par exemple dans celle-ci, $c+d+f+g$, $c+d=a$, & $f+g=b$. Voici de quelle maniere on s'y prendroit pour élever tout d'un coup $c+d+f+g$ au cube. On prendroit d'abord le cube de $c+d$, qui est $c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$, & de même le cube de $f+g$, qui est $f^3 + 3f^2g + 3fg^2 + g^3$; on prendroit ensuite le triple du quarré de $c+d$ que l'on trouvera de $3c^2 + 6cd + 3d^2$, que l'on multipliera par $f+g$, ce qui donnera $3c^2f + 6cdf + 3d^2f + 3c^2g + 6cdg + 3d^2g$. De même on prendra le triple du quarré de $f+g$, qui sera $3ff + 6fg + 3g^2$, que l'on multipliera par $c+d$, & l'on aura $3cff + 6cfg + 3cg^2 + 3dff + 6dfg + 3dg^2$; ajoutant tous ces produits ensemble, on aura pour le cube total de

la grandeur $c+d+f+g$, la quantité $c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 + f^3 + 3f^2g + 3fg^2 + g^3 + 3c^2f + 6cdf + 3d^2f + 3c^2g + 6cdg + 3d^2g + 3cff + 6cfg + 3cg^2 + 3dff + 6dfg + 3dg^2$.

169. Quand cette méthode n'auroit pas l'avantage d'être plus expéditive, & moins sujette à jetter dans l'erreur, elle devient ici nécessaire, pour faire connoître comment on peut ramener la formation du cube d'une quantité complexe de tant de termes que l'on voudra, à la formation du cube, du binome $a+b$; & pour montrer pareillement comment l'extraction des racines cubes des mêmes polinomes se rappelle à l'extraction de la racine cube de $a+b$.

De même si l'on vouloit élever au cube la quantité complexe $3c+2d+5f$, on feroit $3c+2d=a$, & $5f=b$. Cela posé, on chercheroit d'abord a^3, que l'on trouveroit en élevant le binome $3c+2d$ au cube, suivant la regle du binome $a+b$, & qui est $27c^3 + 54c^2d + 36cd^2 + 8d^3$. On chercheroit ensuite le triple du quarré du premier terme, multiplié par le second, ou $3a^2b$ qui est $135cf^2 + 180cdf + 60d^2f$. On prendroit de même le triple du quarré du second, multiplié par le premier, ou $3ab^2$ qui se trouveroit être $225cf^2 + 150df^2$: enfin on auroit pour b^3 ou le cube du second terme, $125f^3$. En assemblant toutes ces quantités, on auroit pour le cube du trinome $3c+2d+5f$, $27c^3 + 54c^2d + 36cd^2 + 8d^3 + 135c^2f + 180cdf + 60d^2f + 225cf^2 + 150df^2 + 125f^3$.

De l'Extraction des Racines Cubes des quantités algébriques.

Regle generale.

170. Pour extraire la racine cube d'une quantité algébrique, il faudra prendre d'abord la racine cube d'un des termes de cette quantité, qui sera un cube parfait, & l'écrire à la racine : pour avoir le second terme de la racine, il faudra prendre le triple du quarré du premier terme que l'on vient de mettre à la racine, & par cette quantité diviser un terme du polinome proposé qui puisse donner un quotient exact; il faudra ajouter à côté du diviseur le triple du premier terme, multiplié par ce quotient, le quarré du même quotient, & multiplier le tout par le même quotient; & si le polinome proposé est un cube parfait, & n'a que quatre termes, il faut que le produit qui viendra, soit égal à ce qui reste de la même quan-

tité, après en avoir retranché le cube du premier terme.

EXEMPLE I.

171. Soit proposé d'extraire la racine cube du polinome $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Ayant disposé cette quantité à la gauche d'une barre verticale, comme on le voit ci-après, je dis, la racine cube de a^3 est a, que je pose à la racine : j'éleve cette racine à son cube, & ôtant a^3 de la quantité proposée, il me vient pour reste $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Pour avoir le second terme de la racine, j'éleve la grandeur a à son quarré, dont le triple $3a^2$ me sert de diviseur, que je place au dessous de la racine. Je cherche dans le reste un terme divisible par $3a^2$, & je vois que le premier de ce reste $3a^2b$ est effectivement divisible par $3a^2$, & me donne au quotient b. J'écris au dessous du diviseur $3a^2$ la quantité suivante, $3a^2 + 3ab + b^2$, qui contient le triple du quarré du premier terme, le triple du premier par le second, & le quarré du second ou du quotient b : je multiplie cette quantité par le même quotient b, & j'ai $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, qui est égal au reste, & me fait voir que b est le second terme de la racine. Je le mets donc à la suite de a, ce qui me donne $a + b$ pour la racine cube demandée.

ARTICLE 171.

	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$a + b$, racine.
	$- a^3$	$3a^2$, diviseur.
Reste	$3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$3a^2 + 3ab + b^2$
Soustract.	$-3a^2b - 3ab^2 - b^3$	b
	0 0 0	$3a^2b + 3ab^2 + b^3$, produit.

EXEMPLE II.

172. Soit encore proposé d'extraire la racine cube de la quantité $27c^3 + 54c^2d + 36cd^2 + 8d^3$. Ayant écrit cette quantité à la gauche d'une ligne verticale, de l'autre côté de laquelle je dois mettre la racine, je dis, la racine cube de $27c^3$ est $3c$, puisqu'en élevant $3c$ au cube, j'ai $27c^3$: j'ôte ce cube de la quantité proposée, le reste est $54c^2d + 36cd^2 + 8d^3$. Je triple le quarré de ce qui est à la racine, & j'ai pour diviseur $27c^2$. Je cherche dans le reste un terme qui soit divisible par $27c^2$, ce terme est $54c^2d$, qui me donne au quotient $2d$: j'écris au

dessous du diviseur le même diviseur $27c^2$, avec les termes suivans, $+18cd+4dd$, je multiplie toute cette quantité par le quotient $2d$; & comme le produit est $54c^2d+36cd^2+8d^3$ égal au reste, je conclus que $2d$ est le second terme que je cherche, & je le mets à la racine, qui est $3c+2d$.

ARTICLE 172.

$27c^3+54c^2d+36cd^2+8d^3$	$3c+2d$, racine.
$-27c^3$	$27c^2$, diviseur.
Reste $54c^2d+36cd^2+8d^3$	$27c^2+18cd+4dd$
$-54c^2d-36cd^2+8d^3$	$2d$
o o o	$54c^2d+36cd^2+8d^3$, produit.

173. Si la quantité devoit avoir plus de deux termes à la racine, on suivroit toujours le même procédé, c'est-à-dire que l'on prendroit pour diviseur le triple du quarré de ce que l'on auroit trouvé pour diviser le reste par cette quantité, & le quotient qui viendroit se détermineroit de la même maniere que l'on a déterminé le second terme de la racine. Par exemple, si l'on me propose d'extraire la racine cube de la quantité $27c^3+54c^2d+36cd^2+8d^3+135c^2f+180dcf+60d^2f+225cf^2+150df^2+125f^3$. Après avoir trouvé les deux premiers termes de la racine $3c+2d$, avec le reste $135c^2f$, &c. comme il est marqué ci-après, pour avoir le troisieme terme de la racine, il faudra prendre pour diviseur le triple du quarré de ce qui est à la racine, que l'on trouvera être $27c^2+46cd+12dd$: on cherchera donc un terme qui soit divisible par $27c^2$: ce terme est le premier du dernier reste $135c^2f$, lequel divisé par $27c^2$, donne $5f$ au quotient: j'écris au dessous du diviseur ce même diviseur, avec les quantités suivantes, $45cf+30df+25ff$, dont les deux premiers termes sont le triple de ce qui est à la racine, multiplié par le quotient $5f$; le troisieme, le quarré du même quotient $5f$: je multiplie toute cette quantité par $5f$, & comme le produit qui en résulte détruit tous les termes du dernier reste, étant pris en moins, je conclus que $5f$ est le troisieme terme de la racine, & je le pose à la suite des autres.

ARTICLE 173.

$$\text{Reste}\left\{\begin{array}{l} 135c^2f + 180dcf + 60d^2f + \\ 225cf^2 + 150df^2 + 125f^3 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 3c + 2d + 5f, \text{ racine.} \\ \hline 27c^2 + 36c^2d + 12dd, \text{div.} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} -135c^2f - 180dcf - 60d^2f \\ -225cf^2 - 150df - 125f^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 27c^2 + 36cd + 12dd^2 + 45cf \\ \hline + 30df + 25ff \times 5f \end{array}$$

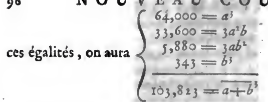
Produit négatif. $\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

DÉMONSTRATION.

Cette pratique porte sa démonstration avec elle ; car il est évident qu'en la suivant, on doit reconnoître si la quantité proposée est un cube, puisque l'on ôte de cette quantité toutes les parties qui forment le cube d'une quantité complexe. Quand on a un peu d'habitude au calcul, on voit tout d'un coup si une quantité proposée est un cube parfait ; car si elle ne contient que deux termes, trois termes, ou cinq, six, sept, huit, neuf, & non pas dix termes, on sera sûre qu'elle n'est point un cube parfait ; car elle ne peut être cube parfait que d'un binome ou d'un trinome, ou d'une quantité plus compliquée, & le binome ne donne que quatre termes à son cube, & le trinome en donne dix : donc les intermédiaires ne sont pas des cubes.

De la formation algébrique du Cube d'un nombre quelconque, & de l'extraction de racine cube de quantités numériques.

174. Pour élever un nombre comme celui-ci, 47 à son cube, on peut le faire en deux manieres, ou en multipliant 47 par lui-même pour avoir son quarré 2209, & multipliant encore ce quarré par 47, ce qui donnera 103823, ou bien en se servant de la formule $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$: pour cela, je regarde le nombre 47 comme une quantité complexe, que je représente par $a + b$; sçavoir 40 par a, & 7 par b, ce qui me donne $40 + 7 = a + b$. Je cherche d'abord a^3 en élevant 40 au cube, & j'ai $a^3 = 64000$: je prends ensuite le triple du quarré de 40, que je multiplie par 7, pour avoir $3a^2b$, ce qui me donne $3a^2b = 33600$. Je cherche pareillement $3ab^2$, ou le triple du premier, multiplié par le quarré du second, ce qui donne $3ab^2 = 5880$: enfin pour b^3, j'ai $b^3 = 343$. Rassemblant toutes



ces égalités, on aura

$$\left\{\begin{array}{r} 64,000 = a^3 \\ 33,600 = 3a^2b \\ 5,880 = 3ab^2 \\ 343 = b^3 \\ \hline 103,823 = \overline{a+b}^3 \end{array}\right.$$

Sur quoi l'on remarquera, 1°. Qu'en divisant les produits particuliers & le cube total en tranches de trois chiffres chacune, excepté la derniere à gauche, qui peut n'en contenir que deux ou un ; que le nombre 64, cube du premier chiffre 4 de la quantité 47, a après lui autant de tranches de trois qu'il y a de rangs de chiffres à sa racine ; sçavoir une tranche de ,000 après 64, & un chiffre 7 après 4 dans 47.

2°. Que le produit représenté par $3a^2b$ est placé de maniere que le triple du quarré de 4 ou 16, qui est 48, multiplié par 7 ou 336, a deux zero après lui : donc il aura aussi deux chiffres après lui dans le cube total, & sera contenu dans les chiffres qui se terminent au premier 8 de la seconde tranche.

3°. Que le produit représenté par $3ab^2$, ou le triple 12 du premier chiffre 4, multiplié par 49, quarré du second, a un rang de chiffres après lui, puisqu'il est 5880 ; & qu'enfin le cube du second chiffre 7 est renfermé tout entier dans la seconde tranche.

Ceci supposé, il sera facile d'entendre la méthode de l'extraction de la racine cube que nous allons donner ; après quelques remarques, qui sont absolument nécessaires, pour qu'il n'y ait rien à désirer sur cette partie.

Pour extraire la racine cube d'une quantité quelconque, il faut d'abord connoître les cubes des neuf premiers chiffres ; ce que l'on connoîtra par le moyen de la Table suivante, qui suffit, lorsque les nombres proposés n'ont que trois chiffres.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

175. On remarquera d'abord que le plus grand nombre de trois chiffres ne peut avoir qu'un chiffre à sa racine cube, car le plus grand nombre de trois chiffres est 999, & le plus petit de deux chiffres est 10, dont le cube 1000 est de quatre chiffres ;

fres ; ainsi toutes les racines cubes d'un chiffre sont comprises inclusivement depuis 1 jusqu'à 999.

176. Le plus grand nombre de six chiffres ne peut en avoir que deux à sa racine ; le plus grand nombre de six chiffres est 999999, & le plus petit de trois chiffres est 100, dont le cube est 1000000, qui a sept chiffres, & est plus grand que 999999. Ainsi toutes les racines cubes de deux chiffres sont comprises depuis 1000 jusqu'à 999,999 inclusivement.

177. Le plus grand nombre de neuf chiffres ne peut en avoir que trois à sa racine ; car le plus grand nombre de neuf chiffres est 999999999, & le plus petit nombre de quatre chiffres est 1000, dont le cube est 1000000000 qui contient dix chiffres, & est nécessairement plus grand que 999999999 ; d'où il suit que les racines cubes de trois chiffres sont comprises, depuis 1000000 jusqu'à 999,999,999 inclusivement.

178. En continuant toujours le même raisonnement, on verra qu'en général un nombre proposé doit avoir autant de chiffres à sa racine cube qu'il aura de tranches de trois chiffres chacune, excepté la premiere à gauche, qui peut n'en contenir que deux ou même un, mais que l'on regarde toujours comme une tranche ; car 999 ne donne qu'un chiffre à la racine, comme on l'a démontré, art. 175, & ce nombre ne contient qu'une tranche de trois chiffres. 1000 donne deux chiffres à la racine cube, parce que, outre la tranche des trois zero, il contient encore une tranche d'un chiffre. De même 999999 ne peut donner que deux chiffres à la racine, ainsi que tous les intermédiaires entre lui & 1000, parce qu'ils ne contiennent que deux tranches, & ainsi des autres.

Tout cela posé, nous allons donner la regle générale, & l'appliquer à quelques exemples.

Regle générale pour l'extraction de la Racine cube des quantités numériques.

179. 1°. On commencera par partager le nombre donné en tranches de trois chiffres chacune, en comptant pour une tranche la premiere à gauche, qui peut ne contenir que deux chiffres, ou même un seul.

2°. On cherchera le plus grand cube contenu dans la premiere tranche à gauche, on en prendra la racine, que l'on

posera à la droite du nombre proposé, après en avoir séparé la racine par une barre verticale. On élevera cette racine à son cube, que l'on ôtera de la premiere tranche, & l'opération sera achevée pour cette tranche.

3°. A côté du reste que l'on aura trouvé, en ôtant le cube du premier chiffre de la racine de la premiere tranche, on abaissera la seconde tranche, en observant de mettre un point sous le premier chiffre de cette seconde tranche : pour avoir le second chiffre de la racine, on élevera le premier au quarré, dont on prendra le triple, qui sera le diviseur dont il faudra se servir pour trouver le second chiffre de la racine.

4°. On divisera les chiffres terminés à celui sous lequel on a mis un point, par le diviseur trouvé, & l'on aura un quotient, que l'on éprouvera comme il suit, avant que de le poser à la racine. Il faudra ajouter ensemble les produits représentés par $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, c'est-à-dire le produit du diviseur par le chiffre que l'on éprouve, le triple du premier terme de la racine par le quarré du même chiffre, & enfin le cube de ce même chiffre, en observant de les placer avant l'addition, de maniere qu'ils se passent tous d'un chiffre en avant. Il faudra ôter la somme de la seconde tranche, jointe au reste que l'on a trouvé, & si la soustraction se peut faire, on mettra le chiffre à la racine, sinon il faudra diminuer d'une unité, jusqu'à ce que la somme de ces produits soit moindre, ou tout au moins égale aux chiffres sur lesquels on opere. Si le nombre proposé n'a que deux tranches, l'extraction sera faite, & la racine sera la racine exacte que l'on cherche, si la soustraction n'a pas donné de reste. Si le nombre avoit encore d'autres tranches, on les abaisseroit l'une après l'autre à côté du dernier reste, en déterminant les diviseurs, & les chiffres que l'on doit mettre à la racine, comme on a fait pour le second chiffre de la même racine.

Exemple I.

180. Soit proposé d'extraire la racine cube du nombre 103823. Après avoir partagé ce nombre en tranches de trois chiffres chacune, je dis, en 103 quel est le plus grand cube qui y soit contenu ? Ce cube est 64 (comme on le peut voir aisément par la Table des cubes), dont la racine cube est 4. Je pose 4 à la racine, à la droite du nombre proposé, après

l'avoir séparée par une barre verticale, & je soustrais le cube 64 de cette racine 4 de 103, le reste est 39. J'abaisse ensuite la seconde tranche 823 à côté du reste 39, en mettant un point sous le premier chiffre 8, pour marquer que 398, est le dividende sur lequel il faut opérer, & qui contient le triple du quarré du premier terme, multiplié par le second : pour avoir ce second terme, je triple le quarré de 4, & j'ai 48 pour diviseur, par lequel je divise 398, en imaginant le chiffre 8 du diviseur sous le chiffre 8 du dividende partiel, & je dis, en 39 combien de fois 4, il y est neuf fois; mais comme je prévois que le 9 n'est pas bon, j'essaie le 8, quoique je sçache bien qu'il n'est pas non plus celui que je demande, mais pour montrer la maniere dont on fait l'épreuve. Je multiplie d'abord le diviseur par 8, & j'ai 384 qui me représente le produit désigné par $3a^2b$. Je multiplie ensuite le nombre 12, triple de ce qui est à la racine, par 64, quarré de 8, le produit est 768, que j'écris au dessous du premier 384, de maniere qu'il déborde le dernier chiffre 4 d'un rang vers la droite, & ce nombre me représente $3ab^2$. Enfin je prends le cube de 8, qui est 512, que j'écris au dessous du second produit, de maniere que le 2 déborde d'un rang le dernier chiffre 7 de ce second produit. J'ajoute ces trois nombres ensemble, & je trouve la somme 46582. Comme ce produit est plus grand que le reste, joint avec la seconde tranche 39823, je conclus que le 8 n'est pas encore bon; je diminue d'une unité, & j'éprouve le 7 de la même maniere : je multiplie le diviseur 48 par 7, & j'ai 336, qui me représente le produit désigné par $3a^2b$; je multiplie ensuite 12, triple de ce qui est à la racine, par 49, quarré de 7, & j'ai au produit 588, que je place de maniere, que le dernier chiffre 8 déborde d'un rang le dernier chiffre du produit supérieur, & ce produit me désigne $3ab^2$. Enfin j'éleve 7 au cube, qui est 343, que j'écris encore au dessous du second produit, de maniere que le dernier chiffre 3 passe le dernier du produit supérieur d'un rang vers la droite : j'ajoute ensemble ces produits, & je trouve que leur somme est 39823, égale au nombre sur lequel j'opere; d'où je conclus que le 7 est bon; je le pose à la racine, que je trouve être 47, comme on le sçait déja par l'article 174.

Article 180.

103,823	47, racine.	
64	48 $= 3a^2$, diviseur.	
39823	384 $= 3a^2b$	
39823	768 $= 3ab^2$	*Epreuve du* 8.
	512 $= b^3$	
00000	46592 $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	
	336 $= 3a^2b$	
	588 $= 3ab^2$	*Epreuve du* 7.
	343 $= b^3$	
	39823 $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	

Exemple II.

181. Soit proposé d'extraire la racine cube du nombre 99865243. Après avoir partagé ce nombre en tranches de trois chiffres en trois chiffres, à commencer par la droite, je cherche d'abord la racine cube de 99,865, précisément de la même maniere que dans l'exemple précédent, en faisant abstraction pour un moment de la troisieme tranche 243. Je dis donc en 99 quel est le plus grand cube qui y soit contenu? Ce cube est 64, dont la racine est 4, que je pose à la racine, à la droite du nombre proposé: je cube 4, & j'ôte le produit 64 de 99, le reste est 35, & toute l'opération est faite pour la premiere tranche. J'abaisse la seconde tranche 865, en mettant un point sous le premier chiffre de cette tranche, pour marquer que le nombre 358 contient le triple du quarré du premier terme, multiplié par le second. Je triple le quarré de ce qui est à la racine, & j'ai le diviseur 48, par lequel il faut diviser 358 pour avoir le second chiffre de la racine. Je divise donc 358 par 48, & je dis, en 35 combien de fois 4, il y est huit fois; mais ni le 8 ni le 7 ne peuvent être mis à la racine, car en faisant l'épreuve du 7, comme dans l'exemple précédent, on verra que les produits désignés par $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, qu'il faut retrancher du reste, joint à la seconde tranche, donnent un nombre trop grand 39823. Ainsi j'éprouve le 6; pour cela je multiplie le diviseur 48 par 6 pour avoir le produit 288, désigné par $3a^2b$. Je multiplie ensuite le triple de ce qui est à

la racine, ou 12 par le quarré de 6, qui est 36, & j'ai 432, qui me représente $3ab^2$, que j'écris au dessous du premier produit, de maniere que le dernier chiffre 2 surpasse d'un rang vers la droite le chiffre supérieur. Enfin j'écris le cube de 6, qui est 216, de maniere que le 6 déborde encore d'un rang; je prends la somme de ces trois produits, que je trouve être 33336. Comme ce nombre est moindre que 35865, je conclus que le 6 est bon, & je le pose à la racine; je soustrais 33336 de 35865, & le reste est 2529. Si l'on n'avoit pas encore la troisieme tranche 243, l'opération seroit achevée, & la racine seroit 46, avec le reste 2529, qui ne pourroit pas donner une unité; mais puisqu'elle s'y trouve, il faut encore déterminer le troisieme chiffre de cette racine: pour cela, je quarre 46 à part, & je trouve pour son quarré 2116, dont je prends le triple, qui est 6348, par lequel je dois diviser le nombre qui contient le troisieme chiffre, multiplié par le triple du quarré du premier terme, que je regarde comme 46; j'abaisse la troisieme tranche 243 à côté du reste 2529, en mettant un point sous le premier chiffre 2 de cette tranche, & je divise 25292 par 6348, en disant, en 25 combien de fois 6, il y est quatre fois; mais en faisant l'épreuve comme ci-devant, on verroit que le 4 ne peut pas être mis à la racine, ainsi j'éprouve le 3. Je prends d'abord le produit du diviseur par 3, que je trouve 19044, qui me représente $3a^2b$, je prends ensuite le triple de ce qui est à la racine, que je multiplie par 9, quarré du chiffre 3, que j'éprouve, & j'ai 1242 que je place au dessous du premier produit, de maniere que le 2 déborde d'un chiffre, & ce produit me représente $3ab^2$. Enfin j'écris au dessous de ce second produit 27, cube de 3, de maniere que le 7 déborde d'un rang les chiffres supérieurs: j'ajoute ces trois grandeurs ensemble, & j'ai pour leur somme 1916847. Comme ce produit est moindre que 2529243, je conclus que le 3 est bon, & je le pose à la racine. J'ôte ce dernier produit du nombre 2529243, le reste est 612396, qui ne pouvoit donner une unité de plus à la racine, & de cette maniere l'opération se trouve achevée.

ARTICLE 181.

99865243	463		
64	48	$= 3a^2$, 1er diviseur.	
35865	288	$= 3a^2b$	Epreuve du 6.
33336	432	$= 3ab^2$	
2529243	216	$= b^3$	
1916847	33336	$= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	
612396	6348	$= 3a^2$, second divis.	
	19044	$= 3a^2b$	Epreuve du 3.
	1242	$= 3ab^2$	
	27	$= b^3$	
	1916847	$= 3a^2b + 3ab + b^3$	

Maniere d'approcher le plus près qu'il est possible de la racine cube d'un nombre donné, par le moyen des décimales.

182. On ajoutera au nombre proposé, pour en extraire la racine, autant de tranches de trois zero chacune que l'on voudra avoir de décimales à la racine : on extraira d'abord la racine du nombre proposé, comme on a fait ci-devant, & après avoir trouvé le reste, puisque la racine n'est pas complette, on abaissera auprès de ce reste la premiere tranche, & l'on opérera sur cette partie comme sur des nombres entiers ; on fera l'épreuve des chiffres qu'il faudra mettre à la racine, précisément de la même maniere, comme on verra susaffimment dans l'exemple suivant, dans lequel on se contentera d'indiquer les opérations sans s'arrêter à les détailler.

183. Si l'on suppose que 694 soit un nombre de toises, dont on demande la racine en toises, pieds, pouces, il faudra réduire les décimales 853 en valeur connue, suivant la méthode de l'article 131, en multipliant ce nombre 0.853 par 6, prenant les entiers pour les pieds, & multipliant encore le reste par 12 pour avoir les pouces, & ainsi de suite pour les lignes & les points. En opérant de cette maniere, on verra que la racine cube de 694 toises cubes est 8 tois. 5 pieds 1 pouce 5 lig.

184. Si au contraire on proposoit un nombre qui contînt des toises, des pieds, des pouces pour en extraire la racine,

il faudroit chercher une fraction décimale de la toise égale aux pieds, pouces, lignes, qui sont joints au nombre entier, en chercher la racine, suivant les regles précédentes; & la racine que l'on trouvera sera celle que l'on demande, exprimée en toises & parties décimales de toises, que l'on réduira en pieds, pouces, lignes & points, suivant la méthode de l'article 131.

ARTICLE 182.

694,000,000,000	8.853
512	192 = $3a^2$, premier diviseur.
182 000	1536 = $3a^2b$
169 472	1536 = $3ab^2$
	512 = b^3
12 528000	169472 = $3a^2b + 3ab^2 + b^3$
11 682125	23232 = $3a^2$, second diviseur.
845875000	116160 = $3a^2b$
705142479	6600 = $3ab^2$
	125 = b^3
	11682125 = $3a^2b + 3ab^2 + b^3$
	2349675 = $3a^2$, troisieme diviseur.
	7049025 = $3a^2b$
	23895 = $3ab^2$
	27 = b^3
	705141477 = $3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Démonstration de la Racine Cube.

185. Le cube d'un nombre quelconque peut être regardé comme celui d'un binome, dont le premier terme représente tous les chiffres, excepté le premier à droite, & le second représente ce dernier. Or le cube d'un binome contient le cube du premier terme, le triple du quarré du premier par le second, le triple du premier par le quarré du second, & le cube du second: ainsi il n'y a qu'à faire voir que par la méthode proposée on détermine toutes ces parties, dont le cube est composé; c'est ce qu'il est aisé de reconnoître: car dans le premier exemple, lorsque je pose 4 à la racine cube, comme

je sçais qu'il doit y avoir deux chiffres, c'est réellement 40 que je pose, dont le cube est 64000, que je retranche de 10383, & le reste est 39823. Je triple ensuite le quarré de 4, & je divise 398 par 48, comme si je divisois 39823 par 4800, puisque le 8 est posé sous le premier chiffre de la seconde tranche. Or il est certain que le quotient qui doit me venir est le second terme de la racine, puisque le triple du quarré du premier terme par le second doit avoir deux chiffres après lui : d'ailleurs j'ôte encore le triple du quarré du second par le premier, par la maniere dont je pose le produit du triple du premier terme par le quarré du second, en l'avançant d'un rang vers la droite, puisque ce produit ne doit avoir qu'un chiffre après lui, & enfin j'ôte le cube du second terme. D'où il suit que j'ai ôté du nombre proposé toutes les parties qui forment un cube, & si le cube est parfait, il ne doit rien rester après la soustraction de la somme de ces trois produits. Si le cube est imparfait, on prend toujours le plus approchant, à quelque défaut près, mais on est assuré qu'il ne s'en faut pas d'une unité que la racine ne soit celle qu'on cherche par l'épreuve que l'on fait, puisque si l'on augmentoit d'une unité, le cube de la racine seroit plus grand que le nombre proposé.

On appliquera le même raisonnement à une racine de tant de chiffres que l'on voudra, puisque l'on peut regarder les chiffres trouvés comme le premier terme de la racine, & celui qui reste à trouver comme le second, en regardant le nombre proposé comme s'il ne contenoit que deux tranches.

La preuve de l'extraction des racines quarrées & cubiques se fait en élevant les racines trouvées au quarré ou au cube : si le nombre proposé étoit un quarré ou un cube parfait, on doit trouver en multipliant la racine une ou deux fois par elle-même un nombre égal au premier; si les nombres ne sont pas des quarrés ou des cubes parfaits, en ajoutant le reste avec la même puissance de la racine, on doit retrouver le nombre proposé.

De l'Extraction des Racines quarrées & cubiques, des Fractions numériques.

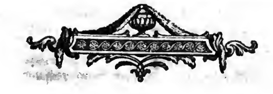
186. Pour extraire la racine quarrée d'une fraction numérique, il faut extraire la racine du numérateur & du dénominateur,

nateur, & des deux racines en faire une nouvelle fraction, qui sera la fraction demandée : ainsi la racine de $\frac{16}{25}$ est $\frac{4}{5}$, & ainsi des autres. La raison est, que l'on éleve une fraction au quarré, en multipliant le numérateur par lui-même, ainsi que le dénominateur. Ainsi pour en extraire la racine, il faut prendre celle du numérateur & du dénominateur.

187. Quand le dénominateur de la fraction n'est pas un quarré, on multiplie le numérateur & le dénominateur par ce même dénominateur : de cette maniere la fraction n'a pas changé de valeur, & de plus le dénominateur est un quarré parfait, ce qui contribue beaucoup à déterminer exactement la valeur de la racine fractionnaire. Ainsi pour extraire la racine quarrée de $\frac{3}{8}$, je multiplie 3, & 8 par 8 pour avoir la fraction $\frac{24}{64}$, dont la racine est à peu près $\frac{5}{8}$, puisqu'en l'élevant au quarré il vient $\frac{25}{64}$, qui ne differe de la fraction $\frac{3}{8}$ que de $\frac{1}{64}$. De même la racine de $\frac{3}{5}$ ou de $\frac{15}{25}$ est $\frac{4}{5}$, ou à peu près : quand on veut les avoir encore plus exactement, il faut chercher une fraction décimale égale à la fraction proposée, & en extraire la racine, suivant les regles ordinaires.

188. De même pour extraire la racine cube d'une fraction numérique, il faudra chercher celle du numérateur & celle du dénominateur : par exemple, la racine de $\frac{216}{64}$ est $\frac{6}{4}$ ou $\frac{3}{2}$; de même celle de $\frac{512}{729}$ est $\frac{8}{9}$. Si le dénominateur n'étoit pas un cube parfait, on multiplieroit les deux termes de la fraction par le quarré du même dénominateur pour avoir la racine cube que l'on demande avec plus de précision ; tout ceci est évident par la formation des puissances des fractions.

Fin du premier Livre.



O



NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE SECOND,

Où l'on traite des raisons ou rapports, proportions & progressions géométriques & arithmétiques, des Logarithmes, de la résolution analytique des Problêmes du premier & second degré, & de leurs opérations.

Définitions.

189. On appelle *homogenes* les grandeurs de même nature, comme deux *lignes*, deux *surfaces* ou deux *solides*, deux *espaces* ou deux *tems*, &c.

190. Les grandeurs qui ne sont pas de même nature, sont appellées *grandeurs hétérogenes :* ainsi une toise & une livre de monnoie sont des grandeurs hétérogenes : ainsi qu'une ligne & une surface, ou bien un solide & un tems, parce ces grandeurs ne peuvent pas se contenir l'une l'autre, n'étant pas de même nature.

191. On appelle *raison* ou *rapport* de deux ou de plusieurs grandeurs, la comparaison que l'on peut faire de ces grandeurs entr'elles. Ainsi pour déterminer combien il peut y avoir de sortes de raisons ou de rapports, il faut examiner en combien de manieres on peut comparer une grandeur à une autre.

192. 1°. On peut comparer une grandeur à une autre, en examinant combien cette grandeur surpasse celle à laquelle on la compare, ou de combien elle en est surpassée, & cette comparaison est appellée *raison* ou *rapport arithmétique*. Ainsi si je

confidere de combien 15 eft plus grand que 5, le nombre 10 que je trouve, en retranchant 5 de 15, eft le rapport arithmétique de 15 à 5, que l'on marque ordinairement ainfi, 15—5; & de même en Algebre $a-b$ eft le rapport arithmétique de a à b. D'où il fuit qu'en général on peut toujours connoître le rapport arithmétique de deux grandeurs par la Souftraction, puifque c'eft par cette opération que l'on peut connoître de combien l'une furpaffe l'autre.

193. 2°. On peut comparer une grandeur à une autre, en examinant combien l'une contient l'autre, ou y eft contenue, & cette comparaifon eft appellée *rapport géométrique*. Ainfi dans la comparaifon que je fais de 12 à 4, je puis examiner combien de fois 12 contient 4; & dans celle de a à b, je puis examiner combien de fois a contient b, & comme on ne le peut fçavoir que par la Divifion, ce rapport fe marque ainfi, $\frac{12}{4}$, $\frac{a}{b}$; car on peut prendre une divifion indiquée pour la divifion même, ou pour le quotient qui réfulte de leur divifion. Ainfi lorfqu'il eft befoin, on peut fe fervir de ces termes, *divifion indiquée, quotient, fraction, raifon* ou *rapport géométrique*, puifque tous fignifient la même chofe ou le même nombre. Le quotient de 12 divifé par 4 eft 3; la fraction $\frac{12}{4}$ eft 3, le rapport géométrique de 12 à 4 eft encore 3. Il faut remarquer encore que comme l'on fe fert plus communément dans les Mathématiques de rapport géométrique, on dit tout fimplement rapport, pour exprimer le rapport géométrique de deux grandeurs.

194. Les grandeurs qui ont entr'elles un rapport de nombre à nombre, font appellées *commenfurables*, parce qu'elles ont au moins l'unité pour commune mefure: par exemple, une ligne de quatre pieds eft dite commenfurable avec une ligne de neuf pieds, parce que le rapport de ces deux lignes eft celui des deux nombres 4 & 9.

195. Les grandeurs qui n'ont point un rapport de nombre à nombre, ou qui ne peuvent avoir de mefures communes, fi petites qu'elles foient, font nommées *incommenfurables*. Par exemple, fi l'on a un quarré de 16 pieds, & un autre de 32 pieds, la racine du premier quarré fera incommenfurable avec celle du fecond: car comme 32 n'eft point un quarré parfait, fi près que l'on puiffe approcher de ce nombre, il y aura tou-

jours quelque reste ; & cette racine sera incommensurable avec celle de 16, puisque l'on ne pourra jamais la déterminer exactement.

196. Dans un rapport quelconque arithmétique ou géométrique, il y a toujours deux termes, le premier est appellé *antécédent*, & le second *conséquent* ; dans le rapport de 12 à 4, 12 est l'antécédent, & 4 est le conséquent; dans celui de a à b, a est antécédent, & b conséquent.

197. Une raison est égale à une autre, quand l'antécédent de l'une contient autant de fois son conséquent que l'antécédent de l'autre contient le sien. Par exemple, la raison de 12 à 4 est égale à celle de 15 à 5, parce que 12 contient 4 autant de fois que 15 contient 5, sçavoir trois fois. Cette égalité de raison se marque quelquefois ainsi, $\frac{12}{4} = \frac{15}{5}$; & si a a même rapport avec b que c avec d, l'on peut encore exprimer cette égalité de rapport, en mettant $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, qui fait voir que les quatre grandeurs $a\,b$ & $c\,d$ forment deux rapports géométriques égaux.

198. Comme cette expression $\frac{12}{4}$ ou $\frac{a}{b}$ représentent également des rapports géométriques des divisions & des fractions : on remarquera que lorsqu'il s'agira de rapport, on appellera le terme qui est au dessus de la ligne, *antécédent*, & le terme qui est au dessous, *conséquent* ; & que quand il s'agira de division, le premier sera appellé *dividende* ; & le second *diviseur* ; & qu'enfin lorsqu'il s'agira de fraction, le premier sera appellé *numérateur*, & le second *dénominateur*.

199. On appelle *raison d'égalité* celle où l'antécédent est égal au conséquent, & *raison d'inégalité*, lorsque les deux termes sont inégaux ; ce qui peut arriver de deux manieres : la premiere, quand l'antécédent est plus grand que le conséquent, & pour lors on nomme cette raison, *raison de plus grande inégalité* ; & lorsque l'antécédent est plus petit que le conséquent, on l'appelle *raison de moindre inégalité*.

200. Deux rapports égaux forment ce que l'on appelle une *proportion* ; si les deux rapports égaux sont arithmétiques, la proportion est arithmétique ; si les deux rapports égaux sont géométriques, la proportion est géométrique. Ainsi dans toute proportion il y a quatre termes, puisque chacun des deux rapports en a deux. Il y a proportion arithmétique entre

quatre grandes, lorsque la premiere surpasse la seconde autant que la troisieme surpasse la quatrieme, ou bien lorsque la seconde surpasse la premiere autant que la quatrieme surpasse la troisieme. Ainsi ces quatre nombre 9 7, 5 3 forment une proportion arithmétique, que l'on peut marquer ainsi, 9—7 = 5 — 3, ou 2 = 2. Mais on la marque plus communément de cette maniere, 9 . 7 : 5 . 3, que l'on prononce ainsi, 9 est à 7, comme 5 est à 3. Le point qui est entre le 9 & le 6 signifie *est à*, & les deux points qui sont entre chaque rapport, signifient *comme*. Le point qui sépare les deux termes du second rapport, signifie la même chose que celui qui est entre les deux premiers termes 9 & 7. La proportion arithmétique se marque de même en Algebre. Si $a—b=c—d$, on écrit si $a . b : c . d$ que l'on exprime, en disant, a est à b arithmétiquement, comme c est à d. Il y a proportion géometrique entre quatre nombres, lorsque le premier contient le second, ou y est contenu autant de fois que le troisieme contient le quatrieme, ou y est contenu. Ainsi ces quatre nombres 12, 4, 15 & 5, sont en proportion géométrique, puisque 12 contient 4 autant de fois que 15 contient 5 : cette proportion peut se marquer ainsi, $\frac{12}{4} = \frac{15}{5}$, & cette maniere est peut-être la plus naturelle ; mais le plus communément on la marque ainsi, 12 . 4 :: 15 . 5, c'est-à-dire que 12 est à 4 géométriquement, comme 15 est à 5. La proportion géométrique se marque de même en Algebre : ainsi si a contient b autant de fois que c contient d, on écrit $a . b :: c . d$.

201. Une proportion arithmétique ou géométrique est appellée *discrete*, lorsque les quatre termes sont quatre grandeurs différentes ; & lorsque dans l'une ou l'autre le même nombre est conséquent d'un rapport, & antécédent de l'autre, la proportion est appellée *continue* ; ainsi ces trois grandeurs 3, 5, 7 sont en proportion arithmétique continue, parce que l'on a 3 . 5 : 5 . 7, & cette proportion se marque ainsi ÷ 3.5.7 que l'on exprime, en disant, 3 est à 5, comme 5 est à 7 arithmétiquement, afin de la distinguer de la proportion discrete arithmétique, comme celle-ci, 2 . 4 : 8 . 10, & autres semblables. De même ces trois grandeurs 18, 6, 2 forment une proportion géométrique continue, parce que 18 . 6 :: 6 . 2, où l'on voit que 6 est conséquent dans le premier rapport, & antécédent dans le second. Pour distinguer cette espece de pro-

portion des autres, on est convenu de la marquer ainsi $\div\!\div$ 18.6.2; de même en Algebre $\div\!\div$ $a.b.c$ marque que les trois grandeurs a, b, c forment une progression géometrique.

201. Les quantités qui forment une proportion arithmétique ou géometrique sont appellées *proportionnelles*. Le premier & le dernier terme d'une proportion quelconque sont appellés *extrêmes*, & le second & le troisieme sont appellés *moyens*. Dans les proportions continues arithmétiques ou géométriques, le terme qui sert de conséquent & d'antécédent est appellé *moyen arithmétique* ou *géométrique*.

AVERTISSEMENT.

Je crois devoir avertir ici ceux qui commencent la Géométrie, qu'il est de la derniere importance de bien sçavoir les propositions de ce second Livre, particulierement la premiere & ses corollaires, puisque c'est presque par elle seule que sont démontrées toutes les propositions où il s'agit de rapport & de proportion. Pour leur en faciliter l'intelligence, nous leur donnerons plusieurs démonstrations de cette proposition, & nous nous arrêterons principalement à celles qui sont démontrées par des raisons métaphysiques.

PROPOSITION I.

Théoreme.

Si quatre grandeurs sont en proportion géométrique, le produit des extrêmes sera égal à celui des moyens, c'est-à-dire que si l'on a $a.b::c.d$, on aura $ad=bc$.

Premiere démonstration.

202. Puisqu'une proportion n'est autre chose que l'égalité de deux rapports, au lieu de l'exprimer ainsi, $a.b::c.d$, on peut la marquer de cette maniere, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Si je multiplie les deux termes de cette égalité par une même grandeur bd, je ne troublerai point l'égalité; ainsi j'aurai $\frac{abd}{b}=\frac{cbd}{d}$: mais $\frac{abd}{b}=ad$, en effaçant la lettre b, commune au numérateur & au dénominateur; & de même $\frac{cbd}{d}=bc$: donc on aura $ad=bc$. Ce qui prouve que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. C. Q. F. D.

SECONDE DÉMONSTRATION.

203. Puisque l'on a $a.b::c.d$, à cause de l'égalité des rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$; si l'on suppose que $\frac{a}{b}=f$, on aura aussi $\frac{c}{d}=f$. Multipliant chaque membre de la premiere égalité par b, on aura $\frac{ab}{b}=bf$, ou $a=bf$; multipliant chaque membre de la seconde égalité par d, on aura $\frac{cd}{d}=df$, ou $c=df$: donc en mettant dans la proportion $a.b::c.d$ à la place de a & de c leur valeurs bf & df, on aura $bf:b::df:d$, ou le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, puisque l'un & l'autre donne également bdf.

TROISIEME DÉMONSTRATION.

204. Supposons qu'au lieu de la proportion $a.b::c.d$ on me donne celle-ci $12.6::4.2$; il faut démontrer pour quelle raison le produit des moyens 6×4 est égal au produit des extrêmes 12×2. Pour cela je fais attention que 12 étant double de 6; si je viens à multiplier 12 & 6 par le même nombre 4, le produit de 12 par 4 sera double du produit de 6 par le même nombre 4; mais si au lieu de multiplier 2 par 4, je multiplie ce nombre par un autre, qui ne soit que la moitié de 4, il est nécessaire que le produit devienne la moitié de celui de 12 par 4: donc il sera égal à celui de 6 par 4, puisqu'il perd autant du côté du multiplicateur 2, que le nombre 6 gagne par son multiplicateur 4. En un mot, 6 n'est que la moitié de 12; mais par la nature de la proportion, il a un multiplicateur double de celui de 12, ce qui fait une compensation parfaite. On peut appliquer ce raisonnement à tel autre rapport que ce soit, soit numérique, soit algébrique. Ainsi notre démonstration est générale, parce qu'elle ne dépend pas de l'exemple auquel elle est appliquée, mais de l'universalité des principes sur lesquels elle est fondée.

COROLLAIRE I.

205. Il suit de cette proposition, que dans une proportion géométrique continue, le produit des extrêmes est égal au quarré du terme moyen: car si l'on a $\div a.b.c$, ou bien $a.b::b:c$, on aura $ac=bb$.

COROLLAIRE II.

206. Il ſuit encore que connoiſſant les trois termes a, b, c d'une proportion, on pourra connoître le quatrieme; car ſi l'on nomme x ce quatrieme, l'on aura $a . b :: c . x$; par conſéquent $ax = bc$, ou bien en diviſant chaque membre de l'égalité par a, $\frac{ax}{a}$, ou $x = \frac{bc}{a}$, qui fait voir que pour trouver ce quatrieme terme, il faut multiplier le ſecond par le troiſieme, & diviſer le produit par le premier.

COROLLAIRE III.

207. Il ſuit encore qu'on peut prendre le produit du ſecond & du troiſieme terme d'une proportion diviſé par le premier, pour le quatrieme terme de la même proportion : car comme x eſt égal à $\frac{bc}{a}$, on pourra avec les trois termes a, b, c écrire $a . b :: c . \frac{bc}{a}$, & c'eſt ſur cette proportion qu'eſt fondée la regle, appellée *Regle de Trois*, qui fait trouver le quatrieme terme d'une proportion, dont les trois autres ſont connus. Si dans une proportion quelconque on connoît trois termes, on pourra toujours connoître le quatrieme, de quelque maniere qu'ils ſoient diſpoſés.

208. De même dans la proportion continue, connoiſſant les deux premiers termes, on pourra connoître le troiſieme, en diviſant le quarré du moyen par le premier. Ainſi ayant les deux premiers termes a, b de la proportion continue, on aura $x = \frac{bb}{a}$, puiſque $a . b :: b . \frac{bb}{a}$.

209. Mais ſi l'on avoit le premier terme a & le troiſieme c, & qu'on voulût avoir le terme moyen, que nous appellerons x, on multipliera le premier & le troiſieme l'un par l'autre, & l'on prendra la racine du produit; cette racine ſera la moyenne proportionnelle demandée : car ayant $a : x :: x : c$, on aura $xx = ac$, & par conſéquent $x = \sqrt{ac}$

PROPOSITION II.

PROPOSITION II.

THÉOREME.

210. *Si quatre grandeurs sont disposées de telle sorte que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, ces quatre grandeurs seront proportionnelles.*

DEMONSTRATION.

Si quatre grandeurs a, b, c, d donnent $ad = bc$, je dis que l'on aura $a . b :: c . d$, ou bien que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Pour le prouver il n'y a qu'à diviser les deux membres de l'équation $ad = bc$, par une même grandeur bd, on aura $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, ou en effaçant les lettres communes pour faire la division $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Or comme on a divisé des grandeurs égales par d'autres grandeurs égales, on aura des quotients égaux $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ qui donnent $a.b :: c.d$. C.Q.F.D.

211. Ce théorême, qui est l'inverse du précédent, sert à faire voir que quatre grandeurs sont proportionnelles, en faisant voir que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens; c'est pourquoi il est à propos d'être bien prévenu de ce principe, qui sera le fondement de toutes les démonstrations algébriques que nous allons donner.

COROLLAIRE I.

212. Il suit de cette proposition, qu'une équation peut toujours être regardée comme ayant un de ses membres formé du produit des extrêmes, & l'autre de celui des moyens d'une proportion; & que l'on peut même faire une proportion avec les racines des produits qui forment chaque membre de l'équation, comme on le verra ailleurs.

COROLLAIRE II.

213. Il suit encore du théorême précédent, que si quatre grandeurs sont en proportion géométrique, elles le seront encore dans les quatre changemens suivans, que l'on désigne par ces mots *invertendo*, *alternando*, *componendo*, *dividendo*, & que d'autres appellent en *raison inverse*, en *raison alterne*, *composition* & *division*.

214. Pour changer une proportion donnée en raison in-

verse, l'on met les antécédens à la place des conséquens, & les conséquens à celle des antécédens, c'est-à-dire que si $a . b :: c . d$, on aura aussi $b . a :: d . c$; ce qui est bien évident, puisqu'on vient de voir que les quatre termes d'une proportion peuvent toujours former une équation; & comme la proportion inverse, aussi-bien que la directe donne $bc = ad$; il s'ensuit qu'en renversant les termes, cela n'empêche pas qu'ils ne soient en proportion.

215. Pour changer une proportion en *raison alterne* ou *alternando*; on met les moyens à la place les uns des autres sans changer les extrêmes, c'est-à-dire que si l'on a $a . b :: c . d$, on aura aussi $a . c :: b . d$; ce qui est bien évident, puisqu'on a toujours ad pour le produit des extrêmes, & bc pour le produit des moyens; & que ces produits sont égaux, à cause de la premiere proportion $a . b :: c . d$ qui donne $ad = bc$.

216. Pour changer une proportion en *composant* ou *componendo*, on ajoute le conséquent à l'antécédent, & l'on compare la somme au conséquent ou à l'antécédent: on fait la même opération pour chaque rapport, c'est-à-dire que si l'on a $a . b :: c . d$, on aura aussi $a + b . b :: c + d . d$; ce qui sera évident, si l'on fait voir que ces quatre termes donnent un produit des extrêmes égal au produit des moyens. Le produit des extrêmes est $ad + bd$, & celui des moyens est $bc + bd$, évidemment égal au premier, puisque la proportion primitive donne $ad = bc$, & que bd est égal dans l'un & dans l'autre.

217. Le changement appellé *dividendo*, que l'on pourroit nommer avec plus de raison *detrahendo* ou de *soustraction*, se fait en ôtant le conséquent de l'antécédent, dans chaque rapport, & en comparant chaque différence à l'antécédent, ou au conséquent: par exemple, si l'on a $a . b :: c . d$, on aura aussi $a - b . b :: c - d . d$, ou $a . a - b :: c . c - d$: car dans l'un & dans l'autre, le produit des moyens est égal au produit des extrêmes. Dans le premier cas, le produit des moyens est $bc - bd$, & celui des extrêmes est $ad - bd$ égal au premier: dans le second, le produit des moyens est $ac - bc$, & celui des extrêmes $ac - ad$ évidemment égal à l'autre, puisque les termes de l'un sont égaux aux termes de l'autre; car $ac = ac$, & $ad = bc$ par la proportion $a . b :: c . d$.

218. Il y a encore beaucoup d'autres changemens différens

de ceux-ci, que l'on peut faire dans une proportion sans la détruire, mais qui résultent de la combinaison de ces premiers, & dont l'usage est moins fréquent dans les Mathématiques : il suffit d'avoir la regle générale pour reconnoître si les changemens que l'on fait ne détruisent point la proportion ; & pour cela il n'y a qu'à examiner dans tous les cas si le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

Nous allons donner un espece de tableau de ces changemens, en nombres & en lettres, pour que l'on puisse plus aisément se les graver dans la mémoire.

Si l'on a $a.b::c.d$, on aura

Invertendo $b.a::d.c$, ou $d.c::b.a$.
Alternando $a.c::b.d$.
Componendo $a+b.a::c+d.d$, ou $a.a+b::c.c+d$.
Dividendo $a-b.a::c-d.d$, ou $a.a-b::c.c-d$.

En nombres.

Si $3.4::6.8$, on aura

Invertendo $4.3::8.6$, ou $8.6::4.3$.
Alternando $3.6::4.8$.
Componendo $3.7::6.14$, ou $7.4::14.8$.
Dividendo $3.4-3::8.8-6$, ou $3.1::6.2$.

Dans les deux premiers changemens, le produit des extrêmes & des moyens sont les mêmes que ceux que donnent la proportion ; & dans les autres, les produits des extrêmes & des moyens sont simplement égaux, sans être les mêmes que ceux de la proportion primitive.

PROPOSITION III.

THÉOREME.

219. *Lorsque deux raisons ont un même rapport à une troisieme, ces deux raisons sont égales entr'elles, c'est-à-dire que si l'on a* $a.b::e.f$, *&* $c.d::e.f$, *on aura* $a.b::c.d$.

DEMONSTRATION.

Si l'on divise l'antécédent a par son conséquent, & que le quotient soit g ; en divisant de même c par d, & e par f, les quotients seront aussi g & g ; ce qui donnera $a=bg$, $c=dg$, & $e=fg$: pour faire voir que $a.b::c:d$, il n'y a qu'à mettre

à la place de a sa valeur bg, & à la place de c sa valeur dg, on aura $bg \,.\, b :: dg \,.\, d$. Le produit des extrêmes sera $bdg = bdg$, produit des moyens. Plus simplement, puisque $a \,.\, b :: e \,.\, f$, & que $c \,.\, d :: e \,.\, f$, on aura $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, & $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$: donc $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$: donc $a \,.\, b :: c \,.\, d$. C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

220. *Lorsque plusieurs grandeurs sont en proportion géométrique, ou qu'elles forment des rapports égaux, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un seul antécédent est à son conséquent; c'est-à-dire que si des grandeurs, comme* a, b, c, d *forment les rapports égaux* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, *l'on aura* $a + c + e \,.\, b + d + f :: a \,.\, b$, *ou comme* $c \,.\, d$.

Demonstration.

Pour le prouver, nous ferons voir que le produit des moyens est égal au produit des extrêmes, ou, ce qui est la même chose, que $ab + bc + be = ab + ad + af$; ce qui est bien évident: car 1°. $ab = ab$, 2°. Puisque $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ou que $a \,.\, b :: c \,.\, d$, on a $ad = bc$. 3°. Puisque $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, ou que $a \,.\, b :: e \,.\, f$, on aura $af = be$. Donc toutes les parties qui composent le produit des extrêmes sont égales à celles qui forment le produit des moyens, & partant il y a proportion. C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

Théoreme.

221. *Deux grandeurs demeurent en même raison, quoi que l'on leur ajoute, pourvu que ce que l'on ajoute à la premiere, soit à ce que l'on ajoute à la seconde, comme la premiere est à la seconde.*

Demonstration.

Si aux deux grandeurs a & b l'on ajoute les deux grandeurs c & d, & que a soit à b, comme c & à d, je dis que $a + c \,.\, b + d :: a \,.\, b$: car puisque $a \,.\, b :: c \,.\, d$: donc *alternando* (n°. 215.) $a \,.\, c :: b \,.\, d$: donc *componendo* (n°. 216.) $a + c \,.\, a :: b + d \,.\, b$, & *alternando* . $a + c \,.\, b + d :: a \,.\, d$. C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

222. *Deux grandeurs demeurent toujours en même rapport, quoique l'on retranche de l'une ou de l'autre, pourvu que ce que l'on retranche de la premiere, soit à ce que l'on retranche de la seconde, comme la premiere est à la seconde.*

DEMONSTRATION.

Si l'on a deux grandeurs a & b, & deux autres c & d, telles que a soit à b, comme c à d, je dis que $a-c.b-d::a.b$: car puisque $a.b::c.d$: donc *alternando* (art. 215.) $a.c::b.d$, & *dividendo* (art. 217.) $a-c.a::b-d.d$, & encore *alternando*, $a-c.b-d::a.b$. C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

THEOREME.

223. *Si l'on multiplie les deux termes d'une raison par une même quantité, les produits seront dans la même raison que ces termes avant d'être multipliés.*

DEMONSTRATION.

Pour prouver que si l'on multiplie deux grandeurs, comme a & b par une autre grandeur c, l'on a $ac.bc::a.b$, considérés que le produit des extrêmes & celui des moyens donnent $abc = abc$. C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

224. *Si l'on divise les deux termes d'une raison par une même quantité, les quotients seront dans la même raison que les grandeurs que l'on a divisées.*

DEMONSTRATION.

Pour démontrer que si l'on divise deux grandeurs a & b par une même grandeur c, les quotients seront dans la même raison que les grandeurs, nous supposerons que $\frac{a}{c}=d$, & que $\frac{b}{c}=f$. Cela posé, on aura $a=cd$, & $b=cf$, ainsi pour

prouver que $a.b::d.f$, on n'a qu'à mettre à la place de a & de b dans la proportion leurs valeurs cd & cf pour avoir $cd.cf::d.f$, qui donnera $cdf = cdf$ pour le produit des extrêmes & des moyens.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

225. *Si l'on multiplie deux proportions, termes par termes, les produits qui en résulteront seront encore en proportion.*

DEMONSTRATION.

Soient les deux proportions $a.b::c.d$, & l'autre $f.g::m.n$, il faut prouver que $af.bg::cm.dn$, ou que $bgcm = afdn$, c'est-à-dire que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. Pour cela, considérez que $bgcm = bcgm = bc \times gm$, & que $afdn = adfn = ad \times fn$: mais $ad = bc$, puisque $a.b::c.d$, & $gm = fn$, puisque $f.g::m.n$. Donc $bgcm = afdn$, c'est-à-dire qu'il y a proportion, puisque le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

COROLLAIRE.

226. Il suit de cette proposition, que si quatre grandeurs sont en proportion géométrique, leurs quarrés, leurs cubes, ou en général les mêmes puissances de ces grandeurs y seront aussi, c'est-à-dire que si l'on a $a.b::c.d$, on aura $a^2.b^2::c^2.d^2$, ou $a^3.b^3::c^3.d^3$: car en multipliant la proportion $a.b::c.d$ par elle-même une ou plusieurs fois, on retombe dans le cas de la proposition présente. D'ailleurs il est aisé de voir que dans tous ces cas le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

PROPOSITION X.

THEOREME.

227. *Dans une proportion continue, le quarré du premier terme est au quarré du second, comme le premier au troisieme ; c'est-à-dire que si l'on a la proportion continue* $\div\, a.b.c$, *ou* $a.b::b.c$, *on aura aussi* $a^2.b^2::a.c$.

DEMONSTRATION.

Puisque $a.b::b.c$, on aura $bb = ac$, & multipliant chaque membre de cette égalité par a, on aura $abb = aac$; d'où l'on

tire la proportion $a^2 . b^2 :: a . c$; car nous avons déja vu que lorſque l'on a une équation on en peut tirer une proportion, & réciproquement d'une proportion, on en peut toujours tirer une équation (art. 212). C. Q. F. D.

Des Proportions & Progreſſions arithmétiques.

228. Nous avons déja dit qu'une proportion arithmétique eſt l'égalité de deux rapports arithmétiques, & qu'elle réſulte de quatre nombres, tels que le premier ſurpaſſe le ſecond, d'autant que le troiſieme ſurpaſſe le quatrieme, comme dans les nombres ſuivans, $2 . 5 : 6 . 9$, qui ſont en proportion arithmétique.

PROPOSITION XI.

THEOREME.

229. *Lorſque quatre grandeurs ſont en proportion arithmétique, la ſomme des extrêmes eſt égale à celle des moyens; c'eſt-à-dire que ſi l'on a* $a . b : c . d$, *on aura* $a + d = b + c$.

DEMONSTRATION.

Puiſqu'il y a proportion entre les quatre grandeurs a,b,c,d, & qu'une proportion n'eſt que l'égalité de rapports, l'excès de b ſur a ſera égal à celui de d ſur c : ſuppoſant que cet excès ſoit une quantité f, on aura $b = a + f$; & de même $d = c + f$. Donc au lieu de la proportion $a . b : c . d$, on aura celle-ci, $a . a + f : c . c + f$: prenant la ſomme des extrêmes & des moyens de cette nouvelle proportion, égale à la premiere, on aura $a + c + f = a + f + c$; ce qui eſt bien évident, puiſque tout eſt égal de part & d'autre. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

230. Il ſuit delà, que ſi l'on connoît trois termes quelconques d'une proportion arithmétique, on connoîtra auſſi le quatrieme : par exemple, ſi l'on donne ces trois nombres 2, 5, 7 pour les trois premiers termes d'une proportion arithmétique, dont on demande le quatrieme, ſoit x ce quatrieme terme, on aura $2 . 5 : 7 . x$: donc $2 + x = 5 + 7$; & ôtant de chaque membre le même nombre 2, on aura $2 + x - 2$, ou $x = 5 + 7 - 2 = 10$; ce qui eſt bien évident, puiſque l'excès de

10 sur 7 est 3, comme l'excès de 5 sur 2 est 3. D'où l'on déduit généralement que le quatrieme terme d'une proportion arithmétique se trouve en prenant la somme des moyens, & ôtant le premier extrême de cette somme.

COROLLAIRE II.

231. Si la proportion est continue, c'est-à-dire si un terme est à la fois antécédent du second rapport, & conséquent du premier, on aura la somme des extrêmes égale au double du terme moyen. Ainsi si l'on a cette proportion continue arithmétique $a . b : b . c$, on aura $a + c = b + b = 2b$: car puisque ces trois grandeurs sont en proportion arithmétique, la premiere surpasse la seconde, autant que la même seconde surpasse la troisieme, & appellant d l'excès de la premiere sur la seconde, on aura $a = b + d$, & $b = a - d$: donc puisque l'excès de b sur c est encore le même, on aura $b = c + d$, ou $b - d = c$; mais nous avons $b = a - d$: donc $b - d = a - d - d = a - 2d = c$. Ainsi au lieu de la proportion continue $a . b : b . c$, on aura celle-ci $a . a - d : a - d . a - 2d$, dans laquelle il est évident que la somme des extrêmes $a + a - 2d$ est égale à celle des moyens $a + a - d - d$, ou au double du moyen $a - d$; ce qui est encore une autre démonstration de la même propriété.

COROLLAIRE III.

232. Connoissant les deux extrêmes d'une proportion continue arithmétique, il sera facile de trouver le moyen terme, en prenant la moitié de la somme des deux termes donnés: ainsi si l'on demande un terme moyen arithmétique entre 3 & 5, on prendra la moitié de la somme de ces deux nombres 8, qui est 4, & ce nombre sera le moyen que l'on cherche: car il est évident que l'on a $3 . 4 : 4 . 5$. En Algebre c'est la même chose, pour trouver un moyen arithmétique entre les deux grandeurs a & b, j'ajoute ces deux nombres ensemble pour avoir $a + b$, dont la moitié $\frac{a+b}{2}$ est le moyen demandé; en effet $a . \frac{a+b}{2} : \frac{a+b}{2} . b$, puisque la différence du premier terme au second est égale à celle du même second au troisieme.

PROPOSITION XII.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

233. *Si quatre grandeurs ſont telles que la ſomme des extrêmes, ſoit égale à celle des moyens, ces quatre grandeurs ſont en proportion arithmétique; c'eſt-à-dire que ſi les quatre grandeurs* a, b, c, d *ſont telles que* $a+d$, *ſomme des extrêmes, ſoit égale à* $c+d$, *ſomme des moyens, on aura* $a.b:c.d.$

DEMONSTRATION.

Tout ſe réduit à prouver que l'excès de a ſur b eſt égal à celui de c par d, ou réciproquement que l'excès de b ſur a eſt égal à celui de d ſur c; puiſque $a+d=b+c$, en ajoutant de part & d'autre de cette égalité la même quantité, on ne changera pas l'égalité. Ajoutons dans chaque membre la quantité négative $-b-d$, on aura $a+d-b-d=c+d-b-d$, ou $a-b=c-d$, puiſque $+d-d$ ſe détruiſent dans le premier membre; & que $-b+b$ ſe détruiſent dans le ſecond: donc l'excès de a ſur b eſt égal à celui de c ſur d, on prouveroit avec la même facilité que l'excès de b ſur a eſt égal à celui de d ſur c: donc ſi quatre grandeurs ſont telles, que la ſomme des extrêmes ſoit égale à celle des moyens, ces quatre grandeurs ſont en proportion arithmétique. C.Q.F.D.

COROLLAIRE.

234. Il ſuit delà, que l'on aura toujours prouvé que quatre grandeurs ſont en proportion arithmétique, dès qu'on aura démontré que la ſomme des extrêmes eſt égale à celle des moyens. Il ſuit encore de cette propoſition, que l'on peut faire ſur cette proportion les changemens appellés *alternando* & *invertendo* ſans la détruire: car il eſt évident que ſi l'on a $3.5:7.9$, on aura auſſi $3.7:5.9$, & $5.3:9.7$.

DÉFINITIONS.

235. Si pluſieurs grandeurs ſont telles, que toutes ſe ſurpaſſent également les unes les autres, on appelle *progreſſion arithmétique*, la ſuite de rapports égaux qui en réſulte. La progreſſion arithmétique ſe marque de la même maniere que la proportion continue: ainſi $\div a.b.c.d.f$ marque que les grandeurs a, b, c, d ſont en progreſſion arithmétique.

236. On distingue deux principales sortes de progressions arithmétiques; progression arithmétique *croissante*, & progression arithmétique *décroissante*. La premiere est celle où les termes vont en augmentant, & dans laquelle chaque terme est moindre que celui qui le suit; la seconde est celle où les termes vont en diminuant, ou, ce qui revient au même, dans laquelle chacun est plus grand que celui qui le suit, comme dans les deux progressions suivantes, dont la premiere est croissante, & la seconde décroissante. $\div 2 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13$, & $\div 15 . 12 . 9 . 6 . 3 . 1$. Chacune de ces deux sortes de progressions, en contiennent une infinité de différentes, selon les différens rapports qui régnent dans chaque progression en particulier.

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

237. *Dans une progression arithmétique quelconque, la somme de deux termes également éloignés des extrêmes, est égale à celle des mêmes extrêmes.*

DEMONSTRATION.

Soit $\div a.b.e.d.f.g.h$ une progression arithmétique croissante, je dis que $e+f$, somme de deux termes également éloignée des extrêmes, est égale à la somme des mêmes extrêmes $a+h$. Puisqu'une progression n'est qu'une suite de rapports égaux, supposons que le rapport arithmétique de a à b soit c, c'est-à-dire que b surpasse a de la quantité c, on aura $b=a+c$, par la même raison b sera surpassé par e de la même grandeur c: donc $e=b+c$, ou $a+c+c=a+2c$. En continuant le même raisonnement, on verra que $d=a+3c$, que $f=a+4c$, que $g=a+5c$, & $h=a+6c$: donc au lieu de la premiere, on aura celle-ci $\div a . a+c . a+2c . a+3c . a+4c . a+5c . a+6c$, dans laquelle il est évident que la somme de deux termes quelconques, également éloignés des extrêmes, est égale à celle des extrêmes. Ainsi la somme du troisieme & du cinquieme terme est $2a+6c$, & la somme des extrêmes est aussi $2a+6c$, c'est-à-dire que $e+f=a+h$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

238. Si le nombre des termes de la progression arithmétique

est impair, la somme des extrêmes sera égale au double du terme moyen ; & la somme de tous les termes d'une progression arithmétique sera égale au produit de la somme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes : car si l'on multiplioit la somme des extrêmes par le nombre des termes, le produit seroit double de la somme de tous les termes, puisque la somme des extrêmes ne vaut pas un terme tout seul, mais deux termes ensemble également éloignés des extrêmes.

COROLLAIRE II.

239. Si l'on prend deux termes quelconques, & deux autres termes également éloignés du terme moyen, si le nombre des termes est impair, ou des moyens si le nombre des termes est pair, ces quatre termes seront en proportion arithmétique : par exemple, dans la progression $\div a . a+c . a+2c . a+3c . a+4c . a+5c . a+6c$; les deux premiers termes a & $a+c$, & les deux derniers $a+5c$ & $a+6c$ forment une proportion arithmétique $a . a+c : a+5c . a+6c$: car il est évident que le second surpasse le premier, d'autant que le quatrieme surpasse le troisieme.

COROLLAIRE III.

240. Il suit encore de cette proposition, & de l'expression générale, qu'un terme quelconque d'une progression arithmétique croissante est égal au premier terme, plus au produit de la différence du second au premier, multipliée par le nombre des termes qui le précéde : ainsi le cinquieme terme $a+4c$ de la progression, citée dans ces corollaires, est égal au premier terme a, plus quatre fois l'excès c du second sur le premier, parce qu'il a quatre termes avant lui. Ainsi l'on voit ce qu'il faut faire pour trouver un terme quelconque, lorsque l'on connoît le premier & la différence du second au premier. Par exemple, si l'on me demande le sixieme terme d'une progression arithmétique croissante, dont le premier terme est 2, & la différence du second au premier est 3 ; je multiplie cette différence 3 par 5, parce qu'il y a cinq termes devant le 6e, & j'ajoute au produit 15 le premier terme 2, ce qui me donne 17 pour le sixieme terme.

COROLLAIRE IV.

241. Réciproquement étant donnés le premier & le sixieme

termes d'une progression, on pourra trouver la différence de cette progression, & tous les termes intermédiaires. Ainsi si le premier terme est 2, & le sixieme est 17, j'ôte le premier du dernier, & je divise le reste 15 par 5, qui marque le nombre des termes qui précédent le sixieme; le quotient 3 est la différence; de même en Algebre si un terme est a, & le sixieme $a+5c$, j'ôte a de $a+5c$, & je divise $5c$ par 5 pour avoir l'excès c du second terme sur le premier.

Corollaire V.

242. On voit encore comment il faudroit s'y prendre pour trouver tous les termes d'une progression arithmétique, dont on connoîtroit le premier & le second : car puisque trois termes de suite forment une proportion continue arithmétique, il n'y a qu'à ôter le premier du double du second pour avoir le troisieme terme.

Corollaire VI.

243. On tire encore de cette proposition la méthode d'insérer tant de moyens proportionnels arithmétiques que l'on veut entre deux nombres donnés. Pour cela, il faut ôter le plus petit nombre du plus grand, & diviser le reste par le nombre qui exprime combien on veut avoir de moyens arithmétiques, augmenté de l'unité. Par exemple, si l'on me demande quatre moyens arithmétiques entre 2 & 17, j'ôte 2 de 17, le reste est 15, que je divise par 5, plus grand d'une unité que le nombre des moyens arithmétiques que je demande. Le quotient 3 est la différence du second terme au premier : ainsi en ajoutant cette différence au premier terme, le second est 5, & la progression est $\div$ 2.5.8.11.14.17, qui est telle qu'entre 2 & 17 il y a quatre moyens arithmétiques.

Remarque.

244. Tout ce que nous venons de dire sur les progressions arithmétiques croissantes se démontrera avec la même facilité, & à peu près de la même maniere sur les progressions décroissantes. Il faut encore remarquer qu'une progression arithmétique peut commencer par zero, & qu'en ce cas la différence est égale au second terme; c'est ce qui arrive dans la progression des nombres naturels $\div$ 0.1.2.3.4, &c. Il faut encore

remarquer que toute progreſſion, dont la différence ne ſera pas égale au ſecond terme, ne pourra commencer par zero.

DÉFINITIONS.

245. Si l'on a pluſieurs termes de ſuite, tels que chacun, excepté le premier, ſoit antécédent & conſéquent d'une ſuite de rapports géométriques égaux, toutes ces quantités formeront une *progreſſion géométrique*. Par exemple, les nombres ſuivans 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 forment une progreſſion géométrique: car 64 . 32 :: 32 . 16, & 32 . 16 :: 16 . 8; ce qui montre évidemment que chaque terme peut être conſéquent & antécédent des rapports égaux. On marque ordinairement que des quantités ſont en progreſſion géométrique, en mettant au devant vers la gauche une petite barre entre quatre points de cette maniere: ∺ 64 . 32 . 16 . 8 . 4 . 2, &c.

On peut encore définir une progreſſion géométrique, en diſant, que c'eſt une ſuite de nombres, tels que chacun, diviſé par celui qui le ſuit, donne toujours le même quotient. On diſtingue deux principales ſortes de progreſſions géométriques: l'une que l'on appelle *croiſſante*, c'eſt celle dans laquelle chaque terme eſt moindre que celui qui le ſuit, & l'autre *décroiſſante*, c'eſt celle dans laquelle chaque terme eſt toujours plus grand que celui qui le ſuit.

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

246. *Toute progreſſion géométrique croiſſante peut être repréſenté par celle-ci* ∺ $a . aq . aq^2 . aq^3 . aq^4 . aq^5$, *&c. Et toute progreſſion géométrique décroiſſante par celle-ci, qui eſt l'inverſe de la précédente* ∺ $aq^5 . aq^5 . aq^4 . aq^3 . aq^2 . aq^1\, a$.

DÉMONSTRATION.

Pour faire voir que ces quantités ſont en progreſſion géométrique, il n'y a qu'à diviſer un terme quelconque par le ſuivant, & ce même terme par celui qui le ſuit immédiatement, & voir ſi le quotient eſt le même. Dans la premiere progreſſion, je diviſe aq^3 par aq^2, le quotient eſt q. Je diviſe enſuite aq^2 par aq, & le quotient eſt encore q: donc il y a progreſſion, puiſque $aq . aq^2 :: aq^2 . aq^3$. De même pour la ſeconde, je diviſe aq^6 par aq^5, le quotient eſt q. Je diviſe le même aq^5

par aq^5, le quotient est q, égal au premier : donc ces termes sont en progression géométrique, puisqu'ils donnent un même quotient. C. Q. F. D.

Corollaire I.

247. Il suit delà, que dans une progression géométrique croissante, le quarré du premier terme est au quarré du second, comme le premier terme au troisieme ; car dans la suite $\div a . aq . aq^2 . aq^3$, &c. on a $a^2 . a^2q^2 :: a . aq^2$: puisque le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, $a^3q^2 = a^3q^2$. Il suit encore de la même formation des progressions, que le cube du premier terme est au cube du second, comme le premier au quatrieme : car $a^3 . a^3q^3 :: a . aq^3$, puisque a^4q^3, produit des extrêmes est égal à a^4q^3, produit des moyens. En général si l'on appelle a le premier terme d'une progression, & b le second; m la puissance quelconque à laquelle on éleve les deux premiers termes, on aura $a^m . b^m ::$ a est au terme, dont le rang seroit désigné par le nombre $m+1$.

Corollaire II.

248. Supposant toujours que la progression va en croissant, un terme quelconque est égal au produit du premier terme, multiplié par le quotient du second, divisé par le premier, lequel quotient est élevé à la puissance, marquée par le nombre des termes qui précédent. Ainsi le quatrieme terme est égal au premier a, multiplié par q, quotient du second aq, divisé par le premier, élevé à la troisieme puissance, parce qu'il y a trois termes qui précédent le quatrieme; ce terme est aq^3: ainsi connoissant les deux premiers termes d'une progression géométrique, on connoîtra aisément un terme quelconque. Pour cela, il n'y aura qu'à diviser le second par le premier, multiplier le premier terme par ce quotient, élevé à une puissance, marqué par le nombre des termes qui précédent celui qu'on cherche. Par exemple, si l'on me demande le sixieme terme d'une progression géométrique croissante, dont le premier est a, & le second aq, je divise le second par le premier a, le quotient est q: je multiplie a par ce quotient q, élevé à la cinquieme puissance, & le sixieme terme est aq^5. Il en seroit de même en nombres. Si le premier terme est a, & le second b; je divise b par a, le quotient est $\frac{b}{a}$, & qu'on me demande le cin-

quieme terme de la progreſſion croiſſante, dont a & b ſeroient les deux premiers termes : je multiplie a par la quatrieme puiſſance de $\frac{b}{a}$, qui eſt $\frac{b^4}{a^4}$, & appellant x ce cinquieme terme, j'ai $x = \frac{ab^4}{a^4}$ ou $\frac{b^4}{a^3}$. D'où il ſuit encore qu'un terme quelconque d'une progreſſion géométrique croiſſante eſt égal au ſecond terme, élevé à une puiſſance moindre d'un degré que le numéro de ce terme, diviſé par le premier terme, élevé à une puiſſance moindre de deux degrés que le même numéro.

COROLLAIRE III.

249. Si l'on ſuppoſe a égal à l'unité la ſuite ou progreſſion $\div a\,.\,aq\,.\,aq^2$, &c. deviendra $\div q^1\,.\,q^2\,.\,q^3\,.\,q^4\,.\,q^5\,.\,q^6$, &c. D'où il ſuit que toutes les puiſſances d'un nombre forment une progreſſion géométrique; ce qui eſt d'ailleurs évident par l'idée que l'on doit avoir des puiſſances ſucceſſives d'un nombre.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

250. *Dans une progreſſion quelconque, la ſomme des antécédens eſt à la ſomme des conſéquens, comme un ſeul antécédent eſt à ſon conſéquent ; c'eſt-à-dire que ſi les grandeurs* a, b, c, d, f, *ſont une progreſſion géométrique, on aura cette proportion,* $a + b + c + d + f.\ b + c + d + f :: a.b.$

DEMONSTRATION.

Il faut démontrer que le produit des extrêmes $ab + bb + bc + bd$ eſt égal au produit des moyens. $ab + ac + ad + af$. 1°. $ab = ab$. 2°. Puiſque par la nature de la progreſſion $a.b :: b.c$, $bb = ac$. 3°. Par la même raiſon, puiſque $a.b :: b.c$, & que $b.c :: c.d$, on aura $a.b :: c.d$; donc $ad = bc$. 4°. Puiſque $a.b :: c.d :: d.f$, on aura $a.b :: d.f$; donc $af = bd$. Ainſi toutes les parties du produit des extrêmes ſont égales à toutes les parties du produit des moyens; d'où il ſuit que la proportion a lieu.

COROLLAIRE.

251. Si la progreſſion eſt décroiſſante, & décroît juſqu'à l'infini, le dernier terme pourra être regardé comme zero: ainſi la ſomme des antécédens, qui eſt tous les termes, excepté

le dernier, sera la somme de tous les termes de la progression; & la somme des conséquens sera la somme de tous les termes, excepté le premier, ce qui ne détruira pas la proportion. Cette proposition & son corollaire donnent la solution des problêmes que l'on peut proposer pour la sommation des suites des progressions géométriques, comme on verra dans le Traité des Équations. On ne peut trop sçavoir cette proposition, & ce qui précéde, si l'on veut trouver la solution de ces sortes de problêmes.

PROPOSITION XVI.

Theoreme.

252. *Dans une progression géométrique, telle que* $\div\!\div a.b.c.d.f.g.$ *le produit de deux termes, également éloignés des extrêmes, est égal au produit des mêmes extrêmes.*

Demonstration.

Prenons les termes c, d, qui sont également éloignés des extrêmes; il faut prouver que cd est égal au produit des extrêmes ag. Pour cela, faites attention que la nature de la progression donne les proportions suivantes.

$$a.b::b.c,\ b.c::c.d,\ c.d::d.f$$
$$b.c::c.d,\ c.d::d.f,\ d.f::f.g.$$

Multipliant deux à deux termes par termes, on aura

$$ab.bc::bc.cd,\ bc.cd::cd.df,\ cd.df::df.fg.$$

D'où l'on déduit celle-ci, en divisant chaque terme des rapports par les lettres communes à l'antécédent & au conséquent.

$$a.c::b.d,\ b.d::c.f,\ c.f::d.g.$$

Et puisque toutes ces raisons sont égales entr'elles, on aura cette proportion $a.c::d.g$: donc $ag = dc$, c'est-à-dire que le produit des extrêmes de la progression est égal à celui de deux termes quelconques, également éloignés des mêmes extrêmes. C. Q. F. D.

Corollaire.

253. Il suit de cette proposition, que les deux extrêmes & deux termes quelconques qui en seront également éloignés, formeront une proportion, dont les deux premiers seront les extrêmes,

extrêmes, & les deux autres les moyens. Si le nombre des termes de la progression est impair, le produit des extrêmes ou de deux termes, qui en seront chacun également éloignés, sera égal à celui des moyens.

REMARQUE.

254. Tout ce que nous avons dit sur les progressions arithmétiques croissantes se doit aussi entendre des progressions décroissantes, en faisant les changemens nécessaires. Au reste toute progression décroissante se peut rappeller à une progression croissante, en allant de droite à gauche. On remarquera de plus, que les deux derniers théorêmes auroient pu se démontrer bien facilement par la progression générale ∺ $a . aq . aq^2$, &c : mais c'est précisément à cause de cette facilité que j'ai cru qu'il falloit les démontrer un peu autrement ; car cette expression ne vous laisse aucun raisonnement à faire, en vous donnant tout d'un coup ce que vous demandez, & l'on court souvent risque de déraisonner, ou au moins d'ignorer l'art de raisonner, lorsque l'on ne raisonne que par formule, sans se mettre en peine de le faire par soi-même.

PROBLEME.

255. *Insérer plusieurs moyens proportionnels entre deux nombres donnés.*

SOLUTION.

Il faudra diviser le plus grand par le plus petit ; & pour avoir la raison de la progression, il faudra extraire la racine du quotient, marquée par le nombre des moyens proportionnels, augmenté de l'unité. Par exemple, si l'on me demande trois moyens proportionnels géométriques entre 4 & 64, je divise 64 par 4, le quotient est 16, dont j'extrais la racine quatrieme, qui est 2, parce que l'on demande trois moyens proportionnels, & cette racine est la raison de la progression, c'est-à-dire que chaque terme est double de celui qui le suit : ainsi le second terme sera 8, & le troisieme 16, le quatrieme 32, & la progression est ∺ 4.8.16.32.64, où l'on voit qu'il se trouve trois moyens entre 4 & 64. Si l'on en avoit demandé quatre, il auroit fallu extraire la racine cinquieme du quotient du plus grand nombre, divisé par le plus petit.

DEMONSTRATION.

La raison de cette opération se déduit immédiatement de la formule ou expression générale des progressions $\div\div a . aq . aq^2 . aq^3 . aq^4$, &c. Je suppose que l'on me demande trois moyens géométriques entre a & aq^4, je divise aq par a, le quotient est q^4, dont la racine quatrieme q est la raison de la progression: ainsi aq sera le second terme, $aq \times q$ sera le troisieme, $aq^2 \times q$ ou aq^3 sera le quatrieme.

Il faut encore remarquer qu'une progression géométrique quelconque ne peut jamais avoir zero pour un de ses termes, à moins qu'il ne serve d'exposant: car une progression quelconque peut commencer par l'unité, ou par une grandeur élevée à la puissance zero, comme a^0, q^0, qui ne différe pas de l'unité (art. 136).

Des Logarithmes, de leur nature, & de leurs usages.

DÉFINITION.

256. Les *logarithmes* sont des nombres en progression arithmétique, correspondans à d'autres nombres en progression géométrique. Par exemple, si l'on dispose l'une au dessous de l'autre, ces deux suites 2, 4, 8, 16, 32; & 3, 5, 7, 9, 11, dont la premiere est une progression géométrique, & la seconde une progression arithmétique, comme on le voit ici:

3, 5, 7, 9, 11
2, 4, 8, 16, 32.

Chaque terme inférieur de la progression arithmétique est appellé *logarithme* du terme inférieur correspondant: ainsi 3 est le logarithme de 2, 5 celui de 4, & ainsi des autres.

257. De même si l'on prend ces deux autres suites,

0 1 2 3 4 5
1, 10, 100, 1000, 10000, 100000,

dont l'une est une progression arithmétique, dont la différence est l'unité, & l'autre est la progression géométrique résultante des différentes puissances de 10: chaque terme de la progression arithmétique sera le logarithme du terme de la progression géométrique auquel il répond: ainsi 1 est le logarithme de 10, 3 est celui de 1000, & ainsi des autres.

COROLLAIRE.

258. Comme on peut prendre une infinité de progreſſions arithmétiques, dont les termes ſoient poſés au deſſus de ceux d'une progreſſion géométrique, il ſuit delà que chaque terme de cette progreſſion pourroit avoir une infinité de logarithmes: mais on eſt convenu de donner à la progreſſion décuple les logarithmes de la progreſſion arithmétique des nombres naturels, en donnant zero pour logarithme à l'unité.

REMARQUE.

Comme les propriétés des logarithmes dépendent des proportions, progreſſions géométriques & arithmétiques, & de plus de celles des expoſans, comme on le verra ci-après, il eſt de la derniere importance d'avoir préſent à l'eſprit tout ce que nous avons vu ſur ces différentes parties: c'eſt pourquoi nous allons reprendre la formule des progreſſions géométriques, & l'examiner par rapport aux logarithmes.

PROPOSITION XVII.

THEOREME FONDAMENTAL.

259. *Dans la ſuite des puiſſances d'une quantité quelconque, dont les termes forment une progreſſion géométrique, les expoſans ſont en progreſſion arithmétique.*

DEMONSTRATION.

Que cette ſuite ſoit repréſentée par celle des puiſſances ſucceſſives de q, qui eſt $\div\div q^0 . q^1 . q^2 . q^3 . q^4 . q^5 . q^6 . q^7 . q^8 . q^9 . q^{10}$, &c, il eſt évident que ces quantités forment une progreſſion géométrique, comme nous l'avons déja dit, puiſque chaque terme, diviſé par le précédent, donne toujours le même quotient q. De plus il eſt encore évident que les expoſans ſont en progreſſion arithmétique, qui eſt celle des nombres naturels. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

260. Donc ces expoſans peuvent être regardés comme les logarithmes des termes auxquels ils répondent, ſuivant la définition des logarithmes: ainſi le logarithme d'un nombre n'eſt autre choſe que l'expoſant d'une puiſſance; & ce que nous diſons

ici des lettres, peut s'entendre des nombres, par exemple, la progression géométrique double, qui résulte de toutes les puissances successives de 2, qui est $\div\!\!\div$ 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64, &c. auroit pu s'écrire ainsi $\div\!\!\div 2^0 . 2^1 . 2^2 . 2^3 . 2^4 . 2^5 . 2^6$, &c. Et de même la progression décuple, ou celle des puissances successives de 10, qui est $\div\!\!\div$ 1 . 10 . 100 . 1000 . 10000 . 100000, auroit pu s'écrire ainsi $\div\!\!\div 10^0 . 10^1 . 10^2 . 10^3 . 10^4 . 10^5$. Dans l'une & dans l'autre, les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5 sont les logarithmes des termes auxquels ils répondent, & en même tems les exposans des puissances de 10. Nous avons déja averti que l'on s'en tenoit à la derniere suite pour calculer les logarithmes des nombres naturels, comme nous le verrons dans la suite.

Corollaire II.

261. Donc si l'on prend quatre termes quelconques en proportion géométrique, leurs exposans ou leurs logarithmes formeront une proportion arithmétique. Par exemple, si l'on prend ces quatre termes q^0, q^1, q^4 & q^5 qui sont en proportion géométrique, puisque l'on a $q^0 . q^1 : q^4 . q^5$, & que d'ailleurs le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, il est visible que leurs exposans ou leurs logarithmes sont en proportion arithmétique, puisque 0 . 1 : 4 . 5.

Corollaire III.

262. Pour trouver le produit d'un terme de cette suite par un autre, il faut chercher un terme, dont l'exposant soit égal à la somme des exposans des deux termes : car on a vu dans le calcul des exposans (art. 134), que le produit des quantités exponentielles se trouve par l'addition des exposans. Ainsi pour multiplier q^2 par q^3, je cherche le terme dont l'exposant soit 5, égal à la somme des exposans 2 + 3, & le terme q^5 est le produit demandé. Donc pour avoir le produit de deux nombres par le moyen des logarithmes, il faut ajouter les logarithmes de ces deux nombres, & la somme sera le logarithme du produit, pourvu que la progression arithmétique que l'on a choisie, soit telle que zero soit le logarithme de l'unité.

Corollaire IV.

263. Pour diviser un terme quelconque de cette suite par

un autre, il faut retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende, & la différence sera l'exposant du quotient : par exemple, pour diviser q^9 par q^4, je retranche 4 de 9, le reste 5 est l'exposant du quotient, qui est q^5 : car on a vu dans le calcul des exposans (art. 135), que la division se fait par la soustraction des exposans de ces quantités. Donc en général pour diviser un nombre par un autre, par le moyen des logarithmes, il faut soustraire le logarithme du diviseur de celui du dividende, & chercher un nombre, dont le logarithme soit égal à la différence des deux logarithmes des nombres donnés ; le nombre correspondant sera le quotient que l'on demande, en supposant toujours que zero soit le logarithme de l'unité.

Corollaire V.

264. Pour faire une Regle de Trois par le moyen des logarithmes, il faudra ajouter ensemble les logarithmes des deux moyens, & de la somme retrancher le logarithme du premier extrême, le reste sera le logarithme du dernier extrême : car une regle de Trois se fait en multipliant ces deux moyens l'un par l'autre, & divisant par le premier extrême. Mais par le corollaire 3^e^, la multiplication de deux termes de notre progression se fait par l'addition des logarithmes ou exposans des deux moyens, & le terme qui a pour exposant la somme de ces exposans, est le produit de ces deux termes. Et par le corollaire 4e, la division de ce produit par le premier terme se fait par la soustraction des exposans : donc en ôtant l'exposant du premier terme de la somme des exposans des deux moyens, on a l'exposant ou le logarithme du quatrieme terme. Ainsi pour trouver un terme quatrieme proportionnel géométrique aux trois termes q^2, q^3, q^5, je prends la somme 8 des exposans 5 . 3 des termes moyens q^3, q^5 ; de cette somme j'ôte 2, exposant du premier, & le reste 6 est le logarithme du quatrieme terme que je cherche, qui est q^6 : & en effet, $q^2 . q^3 : q^5 . q^6$, puisque le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. D'ailleurs, comme ces quatre termes sont en proportion géométrique, leurs exposans ou logarithmes, par le corollaire 2, sont en proportion arithmétique : ainsi le logarithme que l'on cherche est le quatrieme terme d'une proportion arithmétique, qui se détermine en ôtant le premier terme de la somme des deux moyens (art. 230). Ainsi en général pour faire une Regle de

Trois par les logarithmes, il faut ajouter ensemble les logarithmes des moyens, & de la somme ôter celui du premier extrême, le reste est celui du quatrieme terme.

265. Comme toute Multiplication renferme cette proportion, l'*unité est au multiplicateur, comme le multiplicande est au produit*; il suit que faire une Multiplication ou une Regle de Trois c'est la même chose : donc il faut ajouter le logarithme du multiplicateur à celui du multiplicande, & de la somme ôter le logarithme de l'unité. C'est pour cela que dans les progressions arithmétiques que l'on a choisies, pour déterminer les logarithmes des nombres naturels, on a donné zero pour logarithme à l'unité, afin que toute multiplication se réduisît à l'addition de deux nombres.

266. Comme toute Division renferme cette proportion, l'*unité est au diviseur, comme le quotient est au dividende :* il suit qu'on ne peut faire une division qu'on ne fasse réellement une regle de Trois; & comme dans cette regle de proportion, le terme que l'on cherche est le troisieme, il faut ajouter ensemble les logarithmes ou exposans des extrêmes, qui sont l'unité & le dividende, & de la somme ôter l'exposant du diviseur, pour avoir le logarithme ou l'exposant du quotient : donc si le logarithme de l'unité est zero, toute division sur les logarithmes se réduira à la soustraction de deux nombres; c'est encore pour cette raison que l'on a donné zero pour logarithme à l'unité.

Corollaire VI.

267. Pour élever un terme quelconque à une puissance proposée, il suffit de multiplier son exposant par celui de la puissance à laquelle on veut l'élever, & faire du produit l'exposant de la même lettre, qui sera la puissance demandée, comme on l'a démontré dans la formation des puissances des quantités exponentielles. Par exemple, pour élever q^2 au cube, je multiplie son exposant 2 par 3, exposant de la puissance demandée; le produit 6 mis en exposant au devant de la même quantité, me donne q^6, qui est le cube de q^2 : donc en général pour trouver la puissance d'un nombre, par le moyen des logarithmes, il faut multiplier le logarithme de ce nombre par l'exposant de la puissance, & le produit sera le logarithme de la puissance que l'on demande, que l'on trouvera à côté de ce même logarithme.

COROLLAIRE VII.

268. Pour extraire la racine d'un terme quelconque de cette suite, il faut divifer l'expofant ou le logarithme de ce terme par l'expofant de la racine, par 2 fi c'eft la racine quarrée que l'on demande, par 3 fi c'eft la racine cubique, & ainfi des autres : car on a vu dans le Traité du calcul des expofans, que la racine des quantités exponentielles fe fait en divifant leur expofant par l'expofant de la racine. Ainfi pour extraire la racine cubique de q^9, je divife le logarithme ou expofant 9 par 3, le quotient eft 3 : ainfi q^3 eft la racine cubique de cette quantité. Donc en général, par le moyen des logarithmes, l'extraction d'une racine quarrée ou cubique fe réduit à divifer un nombre par 2 ou par 3; & c'eft principalement dans cette opération que l'on voit tout d'un coup l'importance de cette découverte, dont on eft redevable au Baron de *Neper*, Ecoffois, dont le nom fera toujours refpecté des plus grands Calculateurs.

REMARQUE.

269. Comme tout ceci eft de la derniere importance, nous allons en faire l'application fur un fyftême de logarithme quelconque, différent de celui des Tables ordinaires, après quoi nous expoferons en peu de mots la maniere dont on a trouvé les logarithmes des nombres naturels. Nous ne pouvons trop recommander aux Commençans de s'appliquer à généralifer les idées, en examinant particuliérement la poffibilité d'une infinité de fyftêmes de logarithmes, & en tâchant de découvrir les raifons qui ont déterminé les premiers qui en ont calculé des Tables, à fe fervir de la progreffion décuple. On verra que cette raifon eft prife de la nature des logarithmes confidérés comme expofans des puiffances de 10.

Logarithmes ÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9
Progreffion géométrique ∺ 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . 128 . 256 . 512 .

1°. Pour multiplier un terme quelconque de cette fuite, 8, par exemple par 16, j'ajoute enfemble leurs logarithmes 3 & 4, la fomme eft 7; & le nombre 128 qui fe trouve au deffous eft le produit de 16 par 8. De même pour multiplier le nombre 8 de la progreffion géométrique par 32, j'ajoute enfemble leurs

logarithmes 3 & 5 ; la somme 8 est le logarithme du produit 244, comme on peut s'en convaincre aisément, en faisant la multiplication.

2°. Pour diviser un nombre quelconque de la progression géométrique par un autre terme de la même progression, 128 par 4, j'ôte le logarithme de 4 du logarithme de 128 ; ces deux logarithmes sont 2 & 7, dont la différence 5 est le logarithme du quotient 32. De même pour diviser 512 par 64, j'ôte 6, logarithme ou exposant du diviseur, de 9 exposant du dividende, la différence 3 est le logarithme du quotient 8. En effet 512, divisé par 64, donne 8.

3°. Pour trouver un quatrieme terme proportionnel aux trois nombres 4, 32, 64, je prends la somme des logarithmes des deux moyens, qui est 11, j'en ôte le logarithme 2 du premier extrême 4, le reste est 9, logarithme de 512 qui est le terme que l'on demande.

4°. Pour élever 8 au cube, je multiplie son exposant ou son logarithme, qui est 3 par 3, exposant de la puissance, & j'ai 9 au produit, qui est le logarithme du cube de 8, qui est 512, comme on l'a déja vu par la Table des Cubes.

5°. Pour extraire la racine quarrée de 256, je divise son logarithme 8 par 2, exposant de la racine quarrée; le quotient 4 est le logarithme de la racine 16: élevant 16 au quarré, on aura effectivement 256, comme il est aisé de le voir.

Remarque Générale.

270. On voit par-là que toute Multiplication se réduit à l'Addition de deux nombres; que toute Division se fait par la Soustraction de deux nombres; & que toute Regle de Trois se fait par l'Addition de deux nombres, & par la Soustraction d'un troisieme de la somme des deux premiers; enfin que la formation des puissances se fait en doublant ou triplant le logarithme du nombre, dont on veut avoir le quarré ou le cube, & que l'extraction des racines se réduit à prendre la moitié, le tiers, ou le quart du logarithme d'un nombre proposé, pour avoir la racine seconde, troisieme, ou quatrieme. Mais pour cela, il faut que les nombres proposés soient précisément quelques-uns des termes de la progression, pour avoir leurs logarithmes. Ainsi afin de rendre un si grand avantage praticable sur tous les nombres possibles, il a fallu trouver leurs logarithmes,

garithmes, ou, ce qui eſt la même choſe, l'expoſant du rang que chacun occupe dans la progreſſion des nombres à laquelle on s'eſt arrêté pour calculer les logarithmes. C'eſt ce que nous allons détailler dans les articles ſuivans.

271. On a imaginé que tous les nombres naturels étoient renfermés dans une ſeule progreſſion géométrique, dont chaque terme étoit des puiſſances différentes du nombre 10; toutes puiſſances fractionnaires, excepté les termes de la progreſſion décuple, $\div\div$ 10 . 100 . 1000 . 10000, &c, qui ſont des puiſſances complettes de 10. Pour cela, on a inſéré entre 1 & 10 9999999 moyens géométriques, & entre chaque expoſant 0 & 1 de ces nombres, autant de moyens arithmétiques correſpondans aux premiers; & pour avoir plus commodément ces moyens arithmétiques, on a ajouté ſept décimales à la ſuite de chaque expoſant; ce qui ne change pas la progreſſion arithmétique. Ainſi au lieu de la premiere ſuite $\div\div 10^0 . 10^1 . 10^2 . 10^3 . 10^4 . 10^5$, on a celle-ci, $\div\div 10^{0.0000000} . 10^{1.0000000} . 10^{2.0000000} . 10^{3.0000000}$, &c. toujours telle que les expoſans ſont en progreſſion arithmétique, & que chaque terme eſt une puiſſance complette du nombre 10. En ſuppoſant donc qu'entre les expoſans 0.0000000, il y ait 999,9999 moyens arithmétiques, on trouvera que le premier eſt 0.0000001, & que le terme de la progreſſion géométrique qui lui répond, ou, ce qui eſt la même choſe que la puiſſance de 10 correſpondante à ce logarithme, eſt $10^{0.0000001}$: car, ſelon l'article 243, pour inſérer un nombre de moyens arithmétiques entre deux nombres quelconques, il faut ôter le plus petit du plus grand, & diviſer le reſte par le nombre des moyens que l'on demande, augmenté de l'unité. Suivant cette regle, j'ôte le plus petit terme 0.0000000 de 1.0000000, ou, ce qui eſt la même choſe, 0 de 1, le reſte eſt 1, que je diviſe par le nombre 9999999 des moyens arithmétiques proportionnels, augmenté de l'unité, qui eſt 10000000. Ce premier moyen arithmétique eſt donc $\frac{1}{10000000}$, ou en réduiſant cette fraction en décimales 0.00000001; le ſecond moyen arithmétique ſera 0.00000002, & le terme de la progreſſion géométrique correſpondant à ce logarithme ſera $10^{0.00000002}$, en continuant le même raiſonnement, on a conſtruit des Tables des Logarithmes de tous les nombres naturels, & l'on a trouvé que le nombre 2 eſt à peu près égal à 10, élevé à la puiſſance 0.3010300, ou $10^{0.3010300}$. On a trouvé de même que

3 étoit égal à 10, élevé à la puiſſance 0.4771213, ou égal $10^{0.4771213}$, & l'on a appellé ces nombres, logarithmes de 2 & de 3.

272. On a inſéré le même nombre de moyens arithmétiques entre les expoſans 1.0000000, & 2.0000000, ou entre les nombres 1 & 2, & l'on a trouvé que 12, par exemple, étoit égal à 10, élevé à la puiſſance 1.0791812, ou que $12 = 10^{1.0791812}$. Quand on a eu une fois trouvé les logarithmes des nombres, appellés premiers, c'eſt-à-dire qui n'ont point de diviſeur autre que l'unité, la plus grande partie du travail s'eſt trouvée achevée, puiſque pour avoir les logarithmes des nombres multiples ou ſous-multiples de ceux-ci, il n'a fallu qu'ajouter à leurs logarithmes celui du multiplicateur, ou bien en ſouſtraire celui du diviſeur. Par exemple, lorſqu'on a trouvé que le logarithme de 2 eſt 0.3010300, on a découvert aiſément & ſans calcul celui de 5, en ôtant 0.3010300 de 1.0000000, logarithme de 10, & ce logarithme eſt 6989700.

273. Il faut bien prendre garde que lorſque nous diſons que l'on a renfermé dans une ſeule progreſſion géométrique tous les nombres naturels, on ne veut pas dire pour cela que les nombres naturels ſont en progreſſion géométrique, mais ſeulement que chacun d'eux en particulier eſt un terme de cette progreſſion, dont le numéro ou le rang qu'il occupe eſt marqué par ſon logarithme. Auſſi les logarithmes de quatre nombres, pris de ſuite dans les Tables des Logarithmes, ne ſont-ils pas en progreſſion arithmétique, ce qui devroit arriver, ſi les nombres auxquels ils répondent formoient une progreſſion géométrique.

274. On appelle *caractériſtique* d'un logarithme le nombre de ce logarithme qui eſt au rang des entiers : ainſi pour peu que l'on y faſſe attention, on verra que le caractériſtique des nombres moindres que 10, eſt 0; que celui des nombres moindres que 100, eſt 1; que celui des nombres moindres que 1000, eſt 2, & qu'en général le caractériſtique du logarithme d'un nombre renferme autant d'unités que la plus proche puiſſance de 10, à laquelle un nombre eſt ſupérieur, contient de zero. Ainſi le logarithme de 99 ne peut avoir pour caractériſtique que l'unité, parce que la plus proche puiſſance de 10, à laquelle il eſt ſupérieur, qui eſt 10, n'a qu'un zero.

275. Les nombres fractionnaires, moindres que l'unité,

auront des expoſans ou des logarithmes négatifs : car dans une progreſſion arithmétique, les termes qui ſont avant le zero ſont négatifs; & d'ailleurs l'unité a zero pour expoſant. Donc, &c. De plus, les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. dont le numérateur eſt l'unité, & le dénominateur, quelques-uns des nombres naturels, auront pour logarithmes ceux des nombres entiers qui leur ſervent de dénominateurs, pris en moins ou négatifs. D'où il ſuit que l'on peut aiſément opérer ſur les fractions, par le moyen des logarithmes.

Si l'on veut avoir un plus grand détail des logarithmes, & particuliérement ſur la conſtruction de leurs Tables, on peut conſulter le Livre de Trigonométrie de M. *Rivard*. Cette étude ne peut qu'être utile, & d'ailleurs comme on eſt obligé de ſe ſervir de ces nombres artificiels dans la pratique du calcul des triangles, on agit toujours avec plus de ſûreté dans ſes opérations, lorſque l'on connoît bien les propriétés des nombres dont on ſe ſert.

Des Raiſons compoſées.

DEFINITION.

276. *Une raiſon compoſée* eſt le produit de deux rapports multipliés les uns par les autres : par exemple, la raiſon de ab à cd eſt compoſée de la raiſon de a à b, & de c à d. Ainſi une raiſon compoſée peut être regardée comme le produit de deux fractions, puiſque chaque raiſon peut être regardée comme une fraction. Il en eſt de même dans les nombres : la raiſon de 10 à 21 eſt compoſée de celle de 2 à 3, & de celle de 5 à 7. Les raiſons de la Multiplication, deſquelles réſulte la raiſon compoſée, ſont appellées *raiſons compoſantes*.

277. Si les raiſons compoſantes ſont égales, la raiſon compoſée qui en réſulte eſt appellée *raiſon doublée*, s'il y a deux raiſons égales, raiſon triplée, ſi l'on a multipliée trois raiſons égales l'une par l'autre. Par exemple, ſi l'on a la proportion $a . b :: c . d$, ou, ce qui eſt la même choſe, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, la raiſon de ac à bd eſt doublée de celle de a à b, ou de celle de c à d, puiſque la proportion ſuppoſe qu'il y a égalité entre ces deux raiſons. Si l'on a $a . b :: c . d :: f . g$, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{f}{g}$, la raiſon

de acf à bdg sera triplée de celle de a à b, ou bien de celle de c à d, puisque ces trois raisons sont égales.

278. Quand on dit que deux produits sont entr'eux en raison doublée de deux autres grandeurs, c'est comme si l'on disoit que le premier produit est au second, comme le quarré d'une grandeur est au quarré de l'autre : ainsi supposant toujours que $a . b :: c . d$, lorsque je dis que la raison de ac à bd est doublée de celle de a à b, c'est comme si je faisois cette proportion, $ac . bd :: aa . bb$. Pour démontrer cette proportion, il n'y a qu'à faire voir que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, ou que $aabd = acbb$; ce qui est évident, si l'on divise chaque membre par ab, puisque $ad = bc$.

279. De même lorsqu'on dit que la raison d'un produit de trois dimensions à un autre produit de trois dimensions, est triplée de celle d'une grandeur linéaire à une autre, c'est comme si l'on disoit que le premier produit est au second, comme le cube de la premiere grandeur est au cube de la seconde. Par exemple, si l'on a $a . b :: c . d :: f . g$, quand on dit que la raison de acf à bdg est triplée de celle de a à b, c'est comme si l'on faisoit cette proportion, $acf . bdg :: a^3 . b^3$. Pour prouver cette proportion, il n'y a qu'à faire voir que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, ou que $acfb^3 = a^3bdg$; ce qui est aisé à faire, car $ab = ab$: donc en divisant chaque membre par cette même quantité, on aura $cfb^2 = a^2dg$; mais puisque $a . b :: c . d$, $bc = ad$: donc divisant encore le premier membre par bc, & le second par ad, on aura $bf = ag$; ce qui est encore vrai, puisque $a . b :: f . g$.

PROPOSITION XVIII.

Theoreme.

280. *L'exposant des deux termes d'une raison doublée est égal au quarré de celui qui est entre les deux termes de la raison simple, & l'exposant des deux termes d'une raison triplée est égal au cube de celui des deux termes de la raison simple.*

Demonstration.

On entend ici par l'exposant d'une raison, le quotient qui résulte de la division des deux termes l'un par l'autre. Cela posé, si l'on imagine que le quotient de a, divisé par b, soit f, & que celui de c, divisé par d, soit aussi f, ce qui donnera

$a \,.\, b :: c \,.\, d$, il faut démontrer que $\frac{ac}{bd} = ff$; ce qui est évidenr, car $\frac{a}{b} = f$, & $\frac{c}{d} = f$: donc $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = ff$. De même si $a \,.\, b :: c \,.\, d :: f \,.\, g$, & que le quotient de a, divisé par b, soit q, ainsi que celui de c, divisé par d, & de f par g, on aura $\frac{acf}{bdd} = q^3$; car (*hypoth.*) $\frac{a}{b} = q$, $\frac{c}{d} = q$, $\frac{f}{g} = q$: donc $\frac{acf}{bdg} = q^3$. Il en est de même en nombres, la raison de 12 à 3 est 4, celle de 20 à 5 est 4, & celle de 12 × 20, ou de 240 à 5 × 4 & 20, & 16, quarré de 4.

COROLLAIRE.

281. La raison qui est entre les quarrés de deux nombres est doublée de celle qui est entre les racines ; la raison qui est entre les cubes de deux nombres est triplée de celle qui est entre les racines, & ainsi des autres.

Il faut bien prendre garde de confondre la raison double avec la raison doublée, & de même la raison triple avec la raison triplée. Une raison double ou triple n'est qu'une raison simple, dans laquelle l'antécédent est double ou triple du conséquent ; mais une raison doublée est une raison composée de deux raisons égales, & une raison triplée est une raison composée du produit de trois raisons égales.

Regles générales pour la résolution des Problêmes ou application du calcul analytique à la méthode de dégager les inconnues.

DEFINITION.

282. Lorsqu'une quantité est positive, & qu'elle ne se trouve qu'une seule fois dans un seul membre d'une équation, on l'appelle *quantité dégagée* : par exemple, dans l'équation $a + b = x$, la quantité x est une quantité dégagée.

AXIOME I.

283. Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les tous seront égaux.

II.

284. Si de grandeurs égales on ôte des grandeurs égales, les restes seront égaux.

III.

285. Si on multiplie des grandeurs égales par une même grandeur, les produits seront égaux.

IV.

286. Si l'on divise des grandeurs égales par une même grandeur, les quotiens seront égaux.

V.

287. Si l'on extrait la racine de quantités égales, les racines seront égales.

Premiere Regle,

Où l'on fait voir l'usage de l'Addition & de la Soustraction pour le dégagement des inconnues.

288. Pour dégager une quantité, il faut faire passer les grandeurs qui l'accompagnent dans l'autre membre avec des signes contraires, & les effacer dans le membre où elles sont. Par exemple, si l'on a cette équation $a + c = x - d$, pour dégager x, il faut faire passer $- d$ du second membre dans le premier avec le signe $+$, & l'on aura $a + c + d = x$, où la quantité x est dégagée, puisque sa valeur est $a + c + d$: car comme on n'a fait qu'ajouter d à chaque membre de l'équation, il s'ensuit par l'axiome premier, que l'on n'a point changé l'égalité.

De même pour dégager y dans l'équation $y + a = b + c$, l'on fera passer a du premier membre dans le second avec le signe $-$, pour avoir $y = b + c - a$, qui donne la valeur de y, puisque par le second axiome on n'a fait que retrancher la même grandeur de deux grandeurs égales.

Corollaire.

289. Il suit de la regle précédente, premiérement, que l'on peut rendre tous les termes d'une équation positifs, en transposant ceux qui ont le signe $-$ d'un membre de l'équation dans l'autre, & leur donnant le signe $+$. Par exemple, pour rendre positifs tous les termes de l'équation $ab - cc + cd - dd = aa + bb$, il n'y a qu'à faire passer les termes cc & dd, qui ont le signe $-$ du premier membre dans le second, en leur donnant le signe $+$; & après les avoir effacés du premier

membre, on aura $ab + cd = aa + bb + cc + dd$, où il n'y a plus de quantités négatives. De même si l'on a $aa - dd + cd - ab = ac + cc - ad$, l'on n'a qu'à faire passer dd & ab du premier membre dans le second, & aa du second dans le premier, avec des signes contraires, & l'on aura $aa + cd + ad = ac + cc + dd + ab$, où il n'y a plus de termes négatifs.

290. L'on peut encore par la même regle faire passer tous les termes d'un des membres d'une équation dans l'autre, en réduisant l'égalité à zero : car pour faire passer, par exemple, les termes du second membre de cette équation $aa + bb = cd + bc - dd$; dans le premier, l'on n'a qu'à transposer les termes, en leur donnant des signes contraires, & l'on aura $aa + bb - cd + bb + dd = 0$.

Seconde Regle,

Où l'on fait voir l'usage de la Multiplication pour dégager les inconnues, & pour délivrer les équations des fractions qu'elles contiennent.

291. Pour dégager une quantité qui se trouve divisée par quelque nombre, ou par quelque lettre, il faut multiplier les autres termes de l'équation par le diviseur de cette quantité, sans toucher à cette quantité, que pour en effacer le diviseur : ainsi pour dégager $\frac{xx}{c}$ dans l'équation $a + b = \frac{xx}{c}$, il faut multiplier le membre $a + b$ par le diviseur c, & l'on aura $ac + bc = xx$, ou xx est dégagée. De même si l'on avoit $c + b = \frac{z}{2}$, il faut pour dégager z, multiplier les termes $c + b$ par le diviseur 2, & l'on aura $2c + 2b = z$; ce qui est évident par le 3ᵉ axiome, puisqu'ayant multiplié les deux membres de cette équation par une même quantité, on n'a rien changé à l'égalité.

Corollaire.

292. Comme la division indiquée, ou autrement $\frac{a}{b}$ n'est qu'une fraction; il suit de la regle précédente, que l'on peut non seulement dégager les quantités inconnues qui sont divisées, mais que l'on peut encore délivrer de fractions les termes d'une équation, en multipliant tous les autres termes de l'équation par les dénominateurs des fractions : par exemple,

pour ôter la fraction qui se trouve dans l'équation $a + \frac{dd}{c} + b = d + c$, je multiplie tous ces termes par le dénominateur c de la fraction $\frac{dd}{c}$, & il vient $ac + dd + bc = dc + cc$, où il n'y a plus de fractions. Pour ôter les fractions de l'équation $xd + \frac{bbc}{a} - cc = dd - \frac{aad}{c} + bc$, je commence par multiplier tous les termes de l'équation par le dénominateur a de la premiere fraction, pour avoir $adx + bbc - acc = add - \frac{aaad}{c} + abc$, où il n'y a plus de fractions dans le premier membre; ensuite je multiplie tous les termes de cette nouvelle équation par le dénominateur de la seconde fraction, pour avoir $adcx + bbcc - cccc = acdd - a^3d + abcc$, où il n'y a plus de fractions. Enfin si l'on avoit une équation, comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{x}{a} = \frac{b}{c} + \frac{y}{c}$, l'on en feroit évanouir toutes les fractions, en multipliant chaque numérateur par les dénominateurs de toutes les autres fractions, & l'on aura $aacdc + abccc + bcdcx = abbdc + abcdy$.

293. Mais au lieu de multiplier l'un après l'autre chaque numérateur par tous les dénominateurs des autres fractions, on peut tout d'un coup ôter les fractions d'une équation, en multipliant chaque terme par le produit de tous les dénominateurs, & en effaçant dans les numérateurs & dénominateurs de chaque nouvelle fraction les lettres semblables.

TROISIEME REGLE,

Où l'on fait voir l'usage de la Division pour dégager les inconnues.

294. Lorsqu'une quantité inconnue, que l'on veut dégager, est multipliée par une grandeur connue, on dégagera l'inconnue, en divisant chaque membre de l'équation par cette grandeur connue. Ainsi pour dégager l'inconnue dans l'équation $ax = bb - cc$, l'on divisera chaque membre par a, & l'on aura $x = \frac{bb - cc}{a}$. De même si l'on a $cz = dd + az$, on dégagera l'inconnue z, en faisant passer az du second membre dans le premier, avec un signe contraire, pour avoir $cz - az = dd$, & divisant chaque membre par $c - a$, l'on aura $z = \frac{dd}{c-a}$;

ce

ce qui est bien évident, par l'axiome 4e, puisqu'ayant divisé chaque membre de l'équation par la même grandeur, les quotients doivent être égaux.

COROLLAIRE.

295. Il suit de cette regle, que lorsque tous les termes d'une équation sont multipliés par une même lettre, ou par une même grandeur, on peut rendre l'équation plus simple, en divisant tous les termes par cette grandeur. Par exemple, si l'on a $aa + ab = ac - ad$, où tous les termes sont multipliés par a, l'on n'a qu'à diviser les deux membres de cette équation par la même lettre a, il viendra l'équation $a + b = c - d$, qui est plus simple que la précédente: mais s'il se trouvoit quelque terme qui ne pût pas être divisé comme les autres, ne contenant pas de lettres semblables au diviseur; cela n'empêche pas que la division ne se fasse toujours, parce que quand on ne peut pas la faire effectivement sur quelque terme, on la fait par indiction. Par exemple, pour diviser cette équation $abb - cbb = cdx + bbc$ par bb, dans laquelle le terme cdx n'a point de lettres semblables au diviseur, l'on efface bb des autres termes, & l'on marque pour celui-ci $\frac{cdx}{bb}$: ainsi l'on a $a - c = \frac{cdx}{bb} + c$.

Enfin lorsque les deux membres d'une équation ont un diviseur commun, on pourra les réduire à une équation plus simple, en divisant chaque membre par le diviseur qui est commun. Par exemple, si l'on a une équation comme $bbx - bxx = abb - abx$, dont les membres ont pour diviseur commun $bb - bx$, on fera la division qui donnera cette autre équation, qui donnera $x = a$.

QUATRIEME REGLE,

Où l'on fait voir l'usage de l'extraction des racines pour dégager les inconnues.

296. Quand on a une équation, où l'un des membres ne contient que des grandeurs connues, & que l'autre où est l'inconnue est un quarré ou un cube parfait, il faut extraire la racine de ces deux membres pour avoir une nouvelle équation, dans laquelle on pourra dégager l'inconnue. Par exemple, si l'on a $xx + 2ax + aa = bc + dd$, où le premier membre de

cette équation est un quarré parfait, on extraira la racine de chaque membre. Celle du premier membre, suivant la méthode de l'article 147, est $x+a$, & celle du second, par l'article 149, est $\sqrt{bc+dd}$: donc l'équation devient $x+a=\sqrt{bc+dd}$; & faisant passer a du premier membre dans le second (art. 288), on aura $x=\sqrt{bc+dd}-a$, qui fait voir que si l'on extrait la racine de $bc+dd$, & que l'on ôte de cette racine la grandeur a, la différence sera la valeur de x.

De même pour dégager x dans l'équation $xx-2ax+aa=bb$, j'extrais la racine de chaque membre, & j'ai $x-a=b$; d'où l'on déduit en transposant $x=b+a$.

297. Comme le premier membre de cette équation est un cube parfait, $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3=aab$, en tirant la racine cube de chaque membre, on aura l'équation plus simple $x+a=\sqrt[3]{aab}$; & en transposant, l'on aura $x=\sqrt[3]{aab}-a$, qui fait voir que si l'on extrait la racine cubique de aab, & que l'on ôte de cette racine la grandeur a, le reste sera la valeur de x. De même le premier membre de cette équation $x^3-3axx+3a^2x-a^3=bdd$, étant encore un cube parfait, si l'on extrait la racine cube de chaque membre, l'on aura $x-a=\sqrt[3]{bdd}$, ou $x=a+\sqrt[3]{bdd}$, qui fait voir que la grandeur a, plus la racine cube de bdd est égale à x.

Cinquieme Regle,

Où l'on donne la maniere de substituer dans une équation la valeur des inconnues.

298. Quand on connoît la valeur de quelques lettres que l'on veut faire évanouir dans une équation, on substitue à leur place les quantités qui leur sont égales avec le même signe. Par exemple, si l'on a l'équation $a+z=y+b-c$, où l'on veut faire évanouir z; & que l'on suppose $z=d+e$, on effacera z dans l'équation, & l'on mettra à sa place sa valeur $d+e$; ce qui donnera $a+d+e=y+b-c$, où z ne se trouve plus. Si l'on a cette équation $b+d-x=c+z$, dans laquelle on veut faire évanouir x, supposant que $x=a-e$, l'on effacera x, & l'on mettra à sa place $-a+e$, à cause que x a le signe $-$, & l'on aura $b+d-a+e=c+z$, où x ne se trouve plus.

299. Si la lettre qu'on veut faire évanouir est multipliée ou divisée dans l'équation par quelqu'autre grandeur, il faut multiplier ou diviser sa valeur par cette même grandeur, & l'écrire dans l'équation avec le même signe. Par exemple, si de l'équation $bb + ax - cc = ad + aa - yy$, on veut faire évanouir x, supposant que $x = e + f$, comme x est multipliée par a dans l'équation, il faut multiplier sa valeur $e + f$, par la même lettre a, pour avoir $ax = ac + af$, & mettant $ac + af$ à la place de ax, l'on aura $bb + ac + af - cc = ad + aa - yy$, où x ne se trouve plus.

300. Pour faire évanouir de l'équation $cc + yy - 2bd = aa - bz$ la lettre z, supposant que $z = d - e + g$, il faut multiplier la valeur de z par b, pour avoir $bz = bd - be + bg$; & comme bz a le signe $-$ dans l'équation, il faut changer les signes de $bd - be + bg$, & mettre dans l'équation $-bd + be - bg$; ce qui donnera $cc + yy = aa - bd + be - bg$, où z ne se trouve plus.

301. Pour faire évanouir y de l'équation $2ab + ez = be + \frac{ddy}{a-f}$, supposant que l'on a $y = e - g$, il faut multiplier $e - g$ par dd, pour avoir $ddy = dde - ddg$; mais comme ddy est divisé par $a - f$ dans l'équation, il faut pour y substituer $dde - ddg$ le diviser aussi par $a - f$, & alors on aura $2ab + ez = \frac{dde - ddg}{a - f}$, où y ne se trouve plus.

302. Pour faire évanouir u de l'équation $aa + dd = au + bd$, supposant que l'on a $u = \frac{aa - cc + fg}{b + d}$, il faut, à cause que u est égal à une fraction, multiplier le numérateur de cette fraction par a, pour avoir $au = \frac{a^3 - acc + afg}{b + d}$, & puis mettre à la place de au dans la premiere équation, la fraction qui lui est égale, & l'on aura $aa + dd = \frac{a^3 + afg - acc}{b + d} + bd$, dans laquelle u ne se trouve plus. Si l'on veut ôter la fraction de cette équation, l'on n'aura qu'à multiplier les autres termes par le dénominateur $b + d$ (art. 283), & l'équation sera transformée en celle-ci, $aab + aad + d^3 = a^3 + acc + afg + bbd$, après avoir effacé les termes bdd, qui se trouvent dans chaque membre avec le même signe.

303. Si la lettre qu'on veut faire évanouir est le côté d'un quarré ou d'un cube, il faut quarrer ou cuber sa valeur, &

mettre son quarré ou son cube dans l'équation à la place du quarré ou du cube de la lettre qu'on veut faire évanouir. Par exemple, si l'on veut faire évanouir y de l'équation $yy - 2bd = 2ax + dd$, supposant que $y = b + d$, il faut quarrer la valeur de y pour avoir $yy = bb + 2bd + dd$, & mettre la valeur du quarré de y à la place de yy, & l'on aura cette équation, $bb + 2bd + dd - 2bd = 2ax + dd$, & effaçant $+ 2bd$ & $- 2bd$, qui se détruisent, & dd qui est commun au premier & au second membre avec le même signe, l'équation deviendra $bb = 2ax$, d'où dégageant x, il vient $x = \frac{bb}{2a}$, qui est la valeur de x. L'on pourra de même substituer dans une équation la valeur d'un cube, quand on connoîtra celle de sa racine.

Comme l'on ne fait par la substitution que mettre une grandeur égale à la place d'une autre dans une équation, il s'ensuit que les deux membres de cette équation demeurent toujours égaux.

SIXIEME REGLE,

Où l'on fait voir comment on peut faire évanouir toutes les inconnues d'une équation.

304. Pour résoudre un problême par Algebre, il faut commencer par considérer attentivement l'état de la question, & toutes les conditions qu'elle renferme; ensuite marquer ce que l'on connoît avec les premieres lettres de l'alphabet, & ce que l'on ne connoît pas avec les dernieres : considérant après cela le problême comme résolu, on tâchera de trouver autant d'équations que l'on a employé de lettres inconnues, que nous appellerons *premieres équations*.

On choisira la plus simple de toutes ces équations, pour dégager une des inconnues qu'elle renferme; & ayant trouvé la valeur de cette inconnue, on la substituera dans les autres équations aux endroits où cette inconnue se trouvera.

On recommencera de nouveau à choisir la plus simple des autres équations pour y dégager une seconde inconnue, dont on substituera, comme auparavant, la valeur dans les autres équations, & l'on réitérera la même chose pour faire évanouir l'une après l'autre toutes les lettres inconnues; & de cette maniere on trouvera la valeur connue de toutes les inconnues; ce qui donnera la solution du problême.

Pour rendre ceci plus sensible, nous allons faire évanouir toutes les inconnues des trois équations $x+y=z+a$, $y+z=b+x$, & $x+z=c+y$. Pour cela, je commence par chercher la valeur de z dans la premiere équation, en la dégageant de a, que je fais passer dans l'autre membre avec le signe contraire, afin d'avoir $x+y-a=z$, qui me donne la valeur de z; ensuite je mets cette valeur à la place de z dans les autres équations (art. 298.) qui se trouvent changées en celles-ci, $2y+x-a=b+x$, & $2x+y-a=c+y$, & comme x se trouve dans le premier & le second membre de la premiere équation avec le signe $+$, de même y dans la seconde; je les efface, & en dégageant les inconnues qui restent, il vient $2y=b+a$, & $2x=c+a$, ou bien $y=\frac{b+a}{2}$, & $x=\frac{c+a}{2}$, où les valeurs de x & de y se trouvent tout d'un coup, sans avoir été obligé de faire une seconde substitution. Si présentement on met dans la premiere équation, où l'inconnue a été dégagée, la valeur de x & de y, on aura $\frac{b+a+c+a}{2}-a=z$, ou $\frac{b+c}{2}=z$. Par conséquent on a trouvé la valeur des inconnues x, y & z en lettres connues.

Avertissement.

On s'est contenté de donner seulement un petit exemple de cette regle, parce qu'on en va voir l'application, aussi-bien que des précédentes, dans tout ce qui suit, où l'on va résoudre plusieurs problêmes curieux, que l'on a rapportés exprès pour familiariser les Commençans avec le calcul algébrique, & pour rendre intéressant ce que l'on a vu jusqu'ici, qu'il est à propos d'entendre parfaitement, pour avoir le plaisir de comprendre sans peine tout ce qui compose la suite de cet ouvrage.

Application des Regles précédentes à la résolution de plusieurs Problêmes curieux.

Premiere question.

Trois personnes ont gagné ensemble au jeu 875 livres, la seconde personne a gagné deux fois autant que la premiere, & 10 liv. de plus, la troisieme a gagné autant que la premiere & la seconde, & 15 liv. de plus. On demande combien chaque personne a gagné.

Pour résoudre cette question, j'appelle x le gain de la premiere personne; par conséquent celui de la seconde sera $2x$, parce qu'elle a gagné le double de la premiere; & comme elle a encore gagné 10 livres de plus, son gain sera $2x+10$. Or comme la troisieme personne a gagné autant que la premiere & la seconde, & même 15 liv. de plus, j'ajoute ensemble le gain des deux premieres personnes, c'est-à-dire x & $2x+10$, à quoi ajoutant 15, le gain de la troisieme personne sera $3x+25$; & comme le gain des trois personnes est égal à 875, je forme cette équation $x+2x+10+3x+25=875$; d'où je dégage la quantité inconnue, en faisant passer la somme des nombres que je connois du premier membre dans le second (art. 288.) avec le signe $-$, & réduisant le tout en un seul terme; ce qui donne cette nouvelle équation $6x=875-25$, ou $6x=840$, que je divise par 6 (art. 294.) pour avoir $x=140$, qui me fait voir que la premiere personne a gagné 140 livres. Pour avoir le gain de la seconde personne, je double 140, & j'ajoute 10 au produit, qui donne $2x+10=290$: enfin si j'ajoute cette équation à la précédente, & 15 à la somme, j'aurai le gain de la troisieme personne, c'est-à-dire $3x+25=445$; par conséquent la premiere personne a gagné 140 livres, la seconde 290 livres, & la troisieme 445; ce qui est bien évident, puisque ces trois sommes font ensemble 875 livres, & qu'elles remplissent toutes les conditions du problême.

Seconde question.

Quatre Sappeurs ont fait chacun une quantité de toises de sappe, & ils ont gagné ensemble 140 livres; le second Sappeur a gagné trois fois plus que le premier, moins 8 livres; le troisieme a gagné la moitié de ce qu'ont gagné ensemble le premier & le second, moins 12 livres; & le quatrieme a gagné autant que le premier & le troisieme: l'on demande combien ils ont gagné chacun.

Pour résoudre cette question, j'appelle x le gain du premier Sappeur; ainsi $3x-8$ sera le gain du second Sappeur; $2x-16$ le gain du troisieme; & $3x-16$ le gain du quatrieme: & comme toutes ces quantités, prises ensemble, sont égales à 240 livres, je forme cette équation $x+3x-8+2x-16+3x-16=140$, que je réduis à sa plus simple expres-

ſion, en ajoutant enſemble toutes les quantités ſemblables, & il vient $9x - 40 = 140$, ou bien $9x = 180$, en faiſant paſſer 140 du premier membre dans le ſecond. Or ſi l'on diviſe les membres de cette équation par 9 (art. 294.) pour dégager l'inconnue, l'on trouvera $x = 20$, qui montre que le gain du premier Sappeur eſt 20 livres : ainſi le gain du ſecond, qui eſt $3x - 8$, ſera 52 livres ; celui du troiſieme, qui eſt $2x - 16$, ſera 24 livres ; & celui du quatrieme, qui eſt $3x - 16$, ſera 44 livres ; ce qui eſt évident, puiſque ces quatre nombres, pris enſemble, font 140 livres, & rempliſſent les autres conditions du problême.

TROISIEME QUESTION.

Cinq Canonniers ont tiré dans une après midi 96 coups de canon ; le ſecond a tiré le double du premier, & deux coups de plus ; le troiſieme a tiré autant que le premier & le ſecond, moins ſix coups ; le quatrieme autant que le ſecond & le troiſieme, plus dix coups ; le cinquieme a tiré autant que le premier & le quatrieme, moins vingt coups : on demande combien de coups de canon ils ont tiré chacun.

Ayant nommé x le nombre de coups que le premier a tiré, je trouverai pour le ſecond $2x + 2$; pour le troiſieme $3x + 2 - 6$, ou, ce qui eſt la même choſe, $3x - 4$; pour le quatrieme $5x + 2 - 4 + 10$, ou bien $5x + 8$; enfin pour le cinquieme $6x + 8 - 20$, ou bien $6x - 12$. Or comme toutes ces quantités priſes enſemble doivent être égales à 96, je forme cette équation $x + 2x + 2 + 3x - 4 + 5x + 8 + 6x - 12 = 96$, que je réduis à ſa plus ſimple expreſſion, en ajoutant dans une ſomme les quantités connues, qui ont le ſigne + ou —, & il vient $17x - 6 = 96$, ou bien $17x = 102$, en faiſant paſſer $- 6$ du premier membre dans le ſecond : pour avoir préſentement la valeur de x, je diviſe cette équation par 17, & je trouve $x = 6$; ce qui fait voir que le premier Canonnier a tiré ſix coups ; ainſi le ſecond, qui eſt $2x + 2$, en a tiré 14 ; le troiſieme, qui eſt $3x - 4$, en a auſſi tiré 14 ; le quatrieme, qui eſt $5x + 8$, en aura tiré 38 ; & le cinquieme, qui eſt $6x - 12$, en aura tiré 24 ; ce qui eſt évident, puiſque tous ces nombres, pris enſemble, font 96.

QUATRIEME QUESTION.

Un Officier de Mineurs a fait faire en trois mois mille toifes courantes de galeries de mines; il a fait dans le fecond mois le double de l'ouvrage du premier, & 50 toifes de plus, parce qu'il a reçu un renfort de Mineurs; le troifieme mois il a fait 200 toifes d'ouvrage de moins que le fecond, parce qu'une partie de fon monde eft tombée malade : on demande combien il a fait de toifes de galeries dans le premier mois, dans le fecond, & dans le troifieme ?

Pour réfoudre cette queftion, je nomme x la quantité de toifes de galeries de mines qui s'eft faite le premier mois, $2x+50$ pour ce qui s'eft fait le fecond mois, & $2x+50-200$, ou bien $2x-150$ pour la quantité qui s'eft faite le troifieme mois; & comme la fomme de ces quantités doit être égale à 1000 toifes, je forme cette équation $x+2x+50+2x-150=1000$, qui étant réduite à fa plus fimple expreffion (art. 50.) donne $5x-100=1000$, ou bien $x=1100$, & divifant chaque membre de cette équation par 5, l'on aura $x=220$; ce qui fait voir que dans le premier mois on a fait 220 toifes courantes de galeries de mines: par conféquent on en a fait 400 le fecond mois, & 290 le troifieme; ce qui eft évident, puifque ces quantités font enfemble 1000 toifes.

CINQUIEME QUESTION.

On a fait un détachement de Grenadiers pour attaquer un pofte, parmi lefquels il s'en trouve deux qui raifonnant enfemble fur les grenades qu'ils ont dans leurs gibernes, le premier dit au fecond: Si tu m'avois donné une de tes grenades, j'en aurois autant que toi, & le fecond lui répond : fi tu m'en avois donné une des tiennes, j'en aurois le double de celles que tu as : on demande combien ils avoient de grenades chacun ?

Comme cette queftion renferme deux inconnues, je nomme y le nombre des grenades qu'a le premier Grenadier, & z le nombre de celles qu'a le fecond; & je fais autant d'équations qu'il y a d'inconnues, felon l'article 304. Pour former la premiere équation, je dis, fi y avoit une grenade de plus, & z une grenade de moins, ces deux quantités feroient égales, ce qui donne

donne $y + 1 = z - 1$. Pour avoir la seconde équation, je fais encore ce raisonnement, si z avoit une grenade de plus, & y une de moins, la premiere quantité seroit double de la seconde ; ce qui donne cette égalité $z + 1 = 2y - 2$. Présentement que j'ai autant d'équations que d'inconnues, je dégage l'inconnue z de la premiere équation, en faisant passer $- 1$ du second membre dans le premier pour avoir $y + 2 = z$: ensuite je substitue dans la seconde équation à la place de z sa valeur (art. 298), & il vient $y + 3 = 2y - 2$, où z ne se trouve plus ; & faisant passer $- 2$ du second membre dans le premier, il vient $y + 5 = 2y$, & effaçant y de part & d'autre, j'aurai cette équation $5 = y$, qui me donne la valeur de y, substituant cette valeur de y dans l'équation, où z est dégagée, l'on aura $7 = z$: par conséquent le premier Grenadier avoit cinq grenades, & le second sept ; ce qui est bien évident, puisque ces deux nombres remplissent les conditions du problême.

SIXIEME QUESTION.

Trois Bombardiers ont jetté une certaine quantité de bombes dans une Ville assiégée : le premier & le second en ont jetté ensemble 20 plus que le troisieme ; le second & le troisieme 32 plus que le premier ; & le premier & le troisieme 28 plus que le second : on demande combien chaque Bombardier a jetté de bombes ?

Comme les quantités connues dans cette question sont exprimées par des nombres, nous substituerons à leurs places les premieres lettres de l'alphabet : ainsi au lieu des nombres 20, 32, 28, nous prendrons a, b, c, supposant que $20 = a$, $32 = b$, $28 = c$, pour rendre la résolution de ce problême plus générale, & nous nommerons x la quantité de bombes que le premier Bombardier a jetté, y la quantité du second, & z la quantité du troisieme. Cela posé, je dis si de $x + y$, qui exprime la quantité de bombes qu'ont jetté le premier & le second Bombardier, je soustrais a, qui est le nombre de bombes que le premier & le second ont tiré plus que le troisieme, j'aurai $x + y - a = z$ pour la premiere équation ; $y + z - b = x$ pour la seconde, & $x + z - c = y$ pour la troisieme. Considérant que j'ai trois équations, qui renferment chacune

trois inconnues, je cherche la valeur d'une de ces inconnues, pour la substituer dans les autres équations aux endroits où cette inconnue se trouvera (art. 298). Et comme la premiere équation $x+y-a=z$, me donne la valeur de z, qui est la quantité $x+y-a$ elle-même, je la mets dans la seconde & troisieme équation à la place de z; ce qui les changera en celles-ci, $y+x+y-a-b=x$, & $x+y-a+x-c=y$, dont les termes étant rendus positifs, & réduits à leur plus simple expression, donnent $2y=a+b$, & $2x=a+c$, qui étant divisés par 2, donnent enfin $y=\frac{a+b}{2}$, & $x=\frac{a+c}{2}$. Or comme il n'y a plus d'inconnues dans ces deux équations, il faut revenir à la premiere, qui est $x+y-a=z$, afin de substituer à la place de x & de y leurs valeurs $\frac{a+b}{2}$ & $\frac{a+c}{2}$ pour avoir $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c-a=z$, ou bien $\frac{b+c}{2}$, parce que les deux termes $+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a$ qui valent a, détruisent $-a$: on a donc la valeur de z, qui est la derniere quantité qui restoit à connoître.

Présentement que je sçais que $x=\frac{a+c}{2}$, que $y=\frac{a+b}{2}$, & que $z=\frac{b+c}{2}$, je prends à la place de $\frac{a+c}{2}$ la moitié des nombres représentés par a & b, c'est-à-dire la moitié de $20+28$, qui est 24, qui sera la valeur de x; à la place de $\frac{a+b}{2}$, je prends la moitié de $20+32$ pour avoir 26, qui est la valeur de y; & enfin à la place de $\frac{b+c}{2}$, je prends la moitié des nombres 28 & 32 pour avoir 30, qui sera la valeur de z; d'où je conclus que le premier Bombardier a jetté 24 bombes, le second 26, & le troisieme 30, puisque ces trois nombres satisfont pleinement aux conditions du problême.

SEPTIEME QUESTION.

L'on assiege une Place, dont la garnison étoit composée de Troupes Allemandes, Angloises, Hollandoises & Espagnoles. La Place prise, on a trouvé qu'il y avoit eu ensemble autant d'Allemands, d'Anglois & de Hollandois de tués que d'Espagnols, moins 620 hommes; autant d'Allemands, d'Anglois & d'Espagnols ensemble que de Hollandois, moins 460 hommes; autant d'Allemands, de Hollandois & d'Espagnols

ensemble que d'Anglois, moins 380; enfin autant d'Anglois, de Hollandois & d'Espagnols, moins 500 hommes que d'Allemands : on demande combien il y a eu d'Allemands de tués, combien d'Anglois, de Hollandois & d'Espagnols ?

Ayant nommé u le nombre d'Allemands, x celui des Anglois, y celui des Hollandois, & z celui des Espagnols, nous supposerons que $620 = a$, que $460 = b$, que $380 = c$, & que $500 = d$, afin de rendre la solution du problême plus générale. Cela posé, comme les conditions du problême me donnent quatre équations, j'ai pour la premiere $u + x + y = z + a$, pour la seconde $u + x + z = y + b$, pour la troisiéme $u + y + z = x + c$; & enfin pour la quatrieme $x + y + z = u + d$. Après cela, je dégage une inconnue dans la premiere équation qui sera, par exemple z, pour avoir $u + x + y - a = z$, qui me donne la valeur de z, que je substitue dans les trois autres équations; ce qui les change en celles-ci, $u + x + u + x + y - a = y + b$, $u + y + u + x + y - d = x + c$, & $x + y + u + x + y - a = u + d$, qui deviennent, en les réduisant à leur plus simple expression, $2u = a + b - 2x$, $2y = a + c - 2u$, & $2x = a + d - 2y$, en dégageant $2u$, $2x$, & $2y$. Après cela je substitue la valeur de $2u$ dans l'équation $2y = a + c - 2u$, il vient $2y = a + c - a - b + 2x$, dans laquelle u ne se trouve plus; & si à la place de $2y$ je mets sa valeur prise dans l'égalité $2x = a + d - 2y$, il viendra cette derniere équation, $2x = a + d - a - c + a + b - 2x$, ou bien $x = \frac{a + b + d - c}{4}$, où il n'y a plus d'inconnue. Si à la place de $2x$ dans l'équation $2u = a + b - 2x$, l'on met la moitié de la valeur de $4x$, qui est $\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} d - \frac{1}{2} c$, l'on aura $2u = a + b - \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} d + \frac{1}{2} c$, ou $2u = \frac{a + b + c - d}{2}$, ou bien $u = \frac{a + b + c - d}{4}$, qui donne la valeur de u; & si l'on met dans l'équation $2y = a + c - 2u$ la moitié de la valeur de $4u$, qui est $\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} d$, l'on aura $2y = a + c - \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} d$, ou $y = \frac{a + c + d - b}{4}$, qui donne la valeur de y; enfin si l'on met dans l'équation $u + x + y - a = z$ les valeurs de u, de x & de y, l'on aura, après les réductions nécessaires, $z = \frac{b + c + d - a}{4}$.

Comme l'on vient de trouver $u = \frac{a+b+c-d}{4}$, $x = \frac{a+b+d-c}{4}$, $y = \frac{a+c+d-b}{4}$, & $z = \frac{b+c+d-a}{4}$, il s'ensuit que le problême est résolu, puisque si l'on divise 1460 — 500 par 4, qui est égal à $\frac{a+c+b-d}{4}$, l'on trouvera 240 pour la valeur de u, faisant de même pour les autres, l'on trouvera 300 pour la valeur de x, 260 pour celle de y, & 180 pour celle de z. Ainsi il y a eu 240 Allemands de tués, 300 Anglois, 260 Hollandois, & 180 Espagnols; ce qui est bien évident, puisque ces nombres répondent aux conditions du problême.

HUITIEME QUESTION.

Un Sergent de Sapeurs s'est trouvé à 32 sieges, & à plusieurs batailles, où il a reçu plusieurs blessures: le Roi lui promet de lui accorder la gratification qu'il lui demandera pour ses services. Le Sergent demande au Roi de lui donner en argent la somme des gratifications qu'il auroit eu, en supposant qu'on lui eût donné une livre pour la premiere blessure, 2 liv. pour la seconde, 4 livres pour la troisieme, & ainsi de suite en doublant toujours. Le Roi lui accorde sa demande, & il reçoit 65535 livres: on demande combien il a reçu de blessures.

Pour résoudre cette question, je la dépouille de tout ce qui lui est étranger, & je la réduis à ce qu'elle a de plus simple; je vois que le nombre 65535 est la somme des termes d'une progression géométrique, dont le premier terme est 1, le second 2, & dont la raison est aussi 2, ou, ce qui est la même chose, que ce même nombre est la somme de plusieurs puissances successives de 2, dont la derniere, augmentée de l'unité, marque le nombre des termes de la progression. Je fais attention ensuite, que si j'avois le dernier terme de cette progression, il me seroit aisé d'en connoître le nombre, puisque ce dernier terme est égal au premier, multiplié par la puissance de 2, exprimée par le nombre des termes qui précédent (art. 248). J'appelle x ce dernier terme, & je fais encore attention que la somme des antécédens est celle de tous les termes, excepté ce dernier, & que la somme des conséquens est la même somme de tous les termes, excepté le premier, qui est 1. Or (art. 250) la somme des antécédens est à la somme des conséquens,

comme un seul antécédent est à son conséquent. Ainsi en exprimant cela analitiquement, & appellant s le nombre 65535, qui est la somme des termes de la progression, j'aurai $s - x . s - 1 :: 1 . 2$, d'où l'on tire, en faisant le produit des extrêmes & des moyens, $2s - 2x = s - 1$, & dégageant x, il vient $x = \frac{s+1}{2} = \frac{65536}{2} = 32768$, qui montre que le dernier terme de la progression est 32768, qui est certainement une puissance de 2. Pour sçavoir à quelle puissance de 2 ce nombre est égal, j'éleve 2 à ses puissances successives, & je trouve qu'il est égal à la 15[e] puissance de 2 : donc ce terme est le 16[e], puisque le nombre 15 qui marque la puissance de 2 à laquelle ce terme est égal, marque aussi le nombre des termes qui le précédent : ainsi ce Sergent avoit reçu 16 blessures.

REMARQUE.

La même proportion, qui nous a servi à résoudre cette question, peut aussi servir à la solution de toutes les questions que l'on propose sur les progressions géométriques, & particuliérement dans la sommation des mêmes suites : pour en faire sentir encore mieux l'utilité, nous allons l'appliquer à la solution du problême suivant.

PROBLEME.

305. *Trouver la somme des termes d'une progression géométrique décroissante à l'infini, dont le premier terme est a, & le second b.*

SOLUTION.

Puisque le nombre des termes est infini, & que d'ailleurs la progression est supposée décroissante, le dernier terme pourra enfin être regardé comme zero : ainsi la somme des antécédens sera la somme de tous les termes, moins zero ; la somme des conséquens sera la somme de tous les termes, moins le premier : donc appellant s cette somme, on aura (art. 250.) la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme le premier terme au second, ou analitiquement $s - 0 . s - a :: a . b$, d'où l'on tire $as - a^2 = bs$, ou $as - bs = a^2$, & dégageant s, il vient $s = \frac{a^2}{a-b}$; ce qui signifie qu'en général la somme des termes d'une progression géométrique

décroissante à l'infini, est égale au quarré du premier terme, divisé par la différence du premier au second. Par exemple, si l'on veut sommer tous les termes de cette progression $\div 2 . 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16} . \frac{1}{32}$, &c; j'éleve 2 à son quarré, qui est 4, que je divise par $2 - 1$, qui est 1 : ainsi la somme des termes de cette progression est 4. D'où il suit, que toutes les fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ ne valent qu'un, en les poussant jusqu'à l'infini. De même si l'on a $\div 3 . 1 . \frac{1}{3} . \frac{1}{9} . \frac{1}{27}$, &c, je cherche le quarré de 3, qui est 9, que je divise par $3 - 1$ ou 2, & j'ai la somme des termes de la progression $s = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$: d'où il suit que tous les termes $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$, &c. ne valent que $\frac{1}{2}$, puisque les deux premiers termes font 4. Il en est ainsi des autres progressions, sur lesquelles il est aisé de faire l'application de la formule générale.

De la résolution des Equations du second degré.

DÉFINITIONS.

306. Les équations que nous venons de résoudre, sont appellées *équations du premier degré*, ainsi que les problêmes, dont elles expriment les conditions, parce que les inconnues n'y sont point multipliées par elles-mêmes, ni les unes par les autres : mais si cela arrivoit, l'équation qui seroit dans ce cas, seroit plus compliquée que les précédentes, & seroit appellée du second, troisieme, quatrieme degré, selon que l'inconnue y seroit élevée à la seconde, à la troisieme ou quatrieme puissance. Par exemple, $xx - 2ax = 30$, est une équation du second degré, $x^3 - 5x^2 + 7x + 12 = 15$, est une équation du troisieme degré. Nous ne parlerons ici que des équations du second degré, & après les avoir résolues sur quelques exemples dans des cas particuliers, nous les résolverons en général dans les formules qui comprennent tous les cas possibles de ces sortes d'équations.

REMARQUE.

307. Les regles que l'on doit suivre pour mettre un problême du second degré en équation, sont précisément les mêmes que celles que nous avons donné pour les autres problêmes : le tout consiste à bien exprimer analitiquement les conditions énoncées ou renfermées dans la question ; ce qui dépend plutôt de la sagacité de celui qui résout le problême, que d'aucune regle générale que l'on puisse établir.

308. On remarquera encore avant toutes choses, que le quarré d'une grandeur quelconque peut avoir le signe + ou — à sa racine, c'est-à-dire que ce quarré aa, peut résulter de $+a$ multiplié par $+a$, ou de $-a \times -a$, puisque l'un & l'autre donne également a^2 au produit : d'où il suit qu'en général une équation du second degré doit avoir deux racines, l'une que l'on appelle *négative*, parce qu'elle est précédée du signe —, & l'autre qu'on appelle *positive*, parce qu'elle est précédée du signe +. L'état de la question détermine ordinairement celle que l'on doit prendre; mais on ne doit point, surtout dans les commencemens, rejetter les valeurs négatives, sans avoir auparavant examiné ce qu'elles peuvent signifier, parce qu'elles ne résolvent pas moins le problême, que celles que l'on appelle *positives*, quoiqu'elles ne le résolvent pas dans le sens qu'on s'étoit proposé d'abord; & parce que d'ailleurs ces solutions nous découvrent toujours des vérités auxquelles on n'auroit peut-être jamais pensé, si l'on n'y eût été conduit par l'analyse. On verra dans la suite des exemples sensibles de ce que nous disons, dans les problêmes que nous allons résoudre.

PREMIERE QUESTION.

309. Un Soldat va rejoindre son Régiment, dont il est éloigné de 64 lieues, il fait une lieue le premier jour, trois le second, cinq le troisieme, & ainsi de suite en augmentant toujours de deux lieues: on demande combien il sera de jours à rejoindre son Régiment?

Pour résoudre cette question, je la dépouille encore de tout ce qui lui est étranger (car c'est ainsi que l'on accoutume son esprit aux idées générales; & d'ailleurs cette regle est de la derniere importance pour trouver les équations des problêmes avec facilité). Je remarque que la question se réduit à trouver le nombre des termes d'une progression arithmétique, dont le premier est 1, le second 3, & la somme est 64. Et pour généraliser encore davantage le problême, je suppose que le premier terme de la progression est a, le second b, & la somme s. J'appelle x le nombre des termes, & d l'excès de b sur a. Je sçais que la somme des termes d'une progression arithmétique est égale au produit de la somme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes (art. 238). Je connois le pre-

mier extrême, qui est a, mais je ne connois pas le dernier; cependant je sçais qu'en général ce dernier terme est égal au premier terme, plus au produit de la différence du second au premier, multipliée par le nombre des termes qui le précédent (art. 240); & comme x est le nombre des termes, $x-1$ sera celui termes qui précédent le dernier : donc ce dernier sera $a+d\times\overline{x-1}$, ou $a+dx-d$, auquel ajoutant le premier, il vient pour la somme des extrêmes $a+a+dx-d$, ou $2a+dx-d$, que je multiplie par la moitié du nombre des termes $\frac{x}{2}$ pour former l'équation $\frac{2ax+dxx-dx}{2}=s$; faisant évanouir le diviseur 2, il vient $2ax+dxx-dx=2s$, qui est l'équation qu'il faut résoudre pour avoir la solution du problême.

Pour résoudre cette équation, je commence par dégager de tout coefficient le terme qui contient la plus haute puissance de l'inconnue, qui est xx, en divisant chaque terme de l'équation par d; ce qui me donne $xx+\frac{2ax}{d}-\frac{dx}{d}=\frac{2s}{d}$, ou $xx+\frac{2ax}{d}-x=\frac{2s}{d}$, ou $xx+x\times\overline{\frac{2a}{d}-1}=\frac{2s}{d}$. Pour faciliter encore le calcul, je suppose que le coefficient du second terme, qui est $\frac{2a}{d}-1$, est égal à une seule lettre c, & au lieu de $xx+x\times\overline{\frac{2a}{d}-1}$, j'ai $xx+cx=\frac{2s}{d}$, & c'est là la forme la plus simple que puisse avoir une équation du second degré à deux termes. Présentement pour rappeller cette équation à celles du premier degré, il n'y a qu'à faire ensorte que le premier membre soit un quarré parfait, dont on puisse extraire la racine; & voici comment cela se pratique. On ajoute à chaque membre de l'équation le quarré de la moitié du coefficient de x au second terme : ainsi je prends la moitié du coefficient de x, qui est $\frac{c}{2}$, dont le quarré est $\frac{cc}{4}$ que j'ajoute à chaque membre; ce qui me donne la nouvelle équation $xx+cx+\frac{cc}{4}=\frac{cc}{4}+\frac{2s}{d}$, dans laquelle le premier membre est un quarré parfait, sçavoir celui de $x+\frac{1}{2}c$, puisqu'il contient le quarré xx du premier terme, le double produit cx, du premier par le second, & le quarré du second. Ainsi extrayant les racines de part & d'autres, il vient $x+\frac{1}{2}c=\pm\sqrt{\frac{1}{4}cc+\frac{2s}{d}}$, & transposant $\frac{1}{2}c$,

$x=$

$x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{cc}{4} + \frac{2s}{d}}$. Pour appliquer cette expression ou formule générale à notre problême, je fais $a = 1$, puisque 1 est le premier terme de la progression arithmétique ; $b = 3$, puisque le second jour il fait trois lieues; $b - a$, ou $d = 3 - 1 = 2$, qui est la différence du second au premier terme, & $s = 64$, qui est la somme de tous les termes. Je cherche par le moyen de ces valeurs celle de c, que j'ai fait égal à $\frac{2a}{d} - 1$, que je trouve être $\frac{2 \times 1}{2} - 1$, ou $\frac{2}{2} - 1$, ou $1 - 1 = 0$; ainsi c est zero, ou rien dans notre question: par conséquent en l'effaçant partout où il se trouve dans l'expression ou formule générale $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{cc}{4} + \frac{2s}{d}}$, elle se réduit à ceci, $x = \pm \sqrt{\frac{2s}{d}} = \pm \sqrt{\frac{2 \times 64}{2}} = \pm \sqrt{64} = \pm 8$; c'est-à-dire que le Soldat, dont il est question, a été huit jours en chemin : ce qui m'apprend en même-tems que le nombre 64, qui est la somme des termes de la progression, est aussi le quarré du nombre des termes de la même progression : ensorte que les huit premiers termes de la progression des nombres impairs ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 font ensemble 64, & c'est une propriété commune à tant de termes que l'on voudra de cette progression, pourvu que l'on prenne toujours depuis l'unité. Cette propriété mérite beaucoup d'attention, comme on le verra par la suite dans le Traité du jet des bombes.

Seconde question.

310. La somme de deux nombres est 6, la somme de leurs quarrés est 20 : on demande chacun de ces deux nombres?

Solution.

Soit x l'un de ces nombres, l'autre sera $6 - x$, puisque leur somme est 6. Les quarrés de ces nombres sont xx & $36 - 12x + xx$, dont la somme doit être égale à 20, par la seconde condition du problême, ce qui donne $2xx - 12x + 36 = 20$. Je fais passer d'abord 36 de l'autre côté, ce qui me donne $2xx - 12x = 20 - 36$, ou en divisant chaque membre de l'équation par 2 ; $xx - 6x = 10 - 18 = -8$. Selon la regle générale, pour rendre le premier membre de cette équa-

tion un quarré parfait, j'ajoute de part & d'autre le quarré 9 de la moitié 3 de 6, coefficient de x au second terme : pour, avoir $xx - 6x + 9 = 9 - 8 = 1$, j'extrais les racines de part & d'autre, & je trouve $x - 3 = \pm \sqrt{1} = \pm 1$, & laissant x tout seul dans un membre, il vient $x = 3 \pm 1 = 4$ ou 2. Si je prends 4 pour x, le second membre sera 2; si au contraire je prends 2, le second nombre sera 4, puisque ces deux nombres donnent également 6 pour somme, & 20 pour la somme de leurs quarrés, où l'on remarquera encore que la racine négative résout le problême dans le sens qu'on s'étoit proposé aussi-bien que la positive.

TROISIEME QUESTION.

311. On propose de trouver un nombre qui soit tel qu'en lui ajoutant la racine quarrée de son produit par 10, la somme soit 20.

Soit x le nombre cherché, & supposons $10 = a$, & $20 = 2a$, on aura par les conditions du problême $x + \sqrt{ax} = 2a$. Je laisse le radical seul dans un membre, & j'ai $\sqrt{ax} = 2a - x$; pour faire disparoître le radical, j'éleve chaque membre au quarré, ce qui me donne $ax = 4a^2 - 4ax + xx$, & réduisant $xx - 5ax = -4a^2$. Pour completter le quarré, j'ajoute de part & d'autre le quarré de la moitié du coefficient, qui est $\frac{25}{4}a^2$, & j'ai $xx - 5ax + \frac{25}{4}a^2 = \frac{25}{4}a^2 - \frac{16}{4}a^2 = \frac{9}{4}a^2$, tirant la racine de part & d'autre, il vient $x - \frac{5}{2}a = \pm \sqrt{\frac{9}{4}a^2} = \pm \frac{3}{2}a$, & laissant x tout seul, il vient $x = \frac{5}{2}a \pm \frac{3}{2}a$, ou $x = 4a$, & $x = a$, c'est-à-dire que l'un des nombres est 10 & l'autre 40.

Il est évident que le nombre 10 est tel que la racine quarrée de son produit par 10, qui est 100, & dont la racine est 10, fait effectivement 20: mais on ne voit pas de même comment la racine quarrée de 40 multiplié par 10, satisfait aussi aux conditions du problême. Pour cela, je remarque que 400 peut avoir à sa racine -20 ou $+20$, puisque $-20 \times -20 = 400$, & que $+20 \times +20 = 400$: donc en ajoutant cette racine de 400, qui est -20 au nombre 40, j'ai $40 - 20 = 20$.

QUATRIEME QUESTION.

312. On demande les trois termes d'une progression géomé-

trique, dont le premier terme est 4, & dont la différence du second au troisieme soit 3.

Solution.

Soit x le second terme, le troisieme sera $x+3$ par une des conditions du problême, & par l'autre on aura $4 . x :: x . x+3$, d'où l'on tire $xx = 4x + 12$, ou $xx - 4x = 12$; j'ajoute à chaque membre le quarré de la moitié du coefficient, qui est 4, & j'ai $xx - 4x + 4 = 16$, d'où l'on déduit en prenant les racines de chaque membre, $x - 2 = \pm 4$, c'est-à-dire que l'une des valeurs de x est 6, & l'autre est $2 - 4$ ou -2, & ces valeurs sont telles, qu'il n'y en a réellement qu'une qui résolve le problême dans le sens qu'on s'étoit proposé, en donnant cette progression $4 . 6 :: 6 . 9$; mais on peut dire aussi que l'autre ne résout pas moins le problême que la premiere, en donnant cette autre progression géométrique, $4 . -2 :: -2 . 1$; car il est évident que ces trois grandeurs sont en progression géométrique, puisque le produit des extrêmes est égal au quarré du moyen, & que selon la seconde condition, la différence du second terme au 3e est 3 : car il est évident que la différence de -2 à 1 est 3, comme on peut voir en ôtant -2 de 1.

Cinquieme question.

313. Deux Commerçans ont placé dans le commerce une somme de 1300 liv. sur laquelle ils gagnent 900; le premier, tant pour sa mise que pour l'intérêt de son argent, qui a été trois mois dans le commerce, a retiré 870l.; & le second pareillement, tant pour sa mise que pour l'intérêt de son argent, qui a été six mois dans le commerce, reçoit 1330 livres : on demande la mise de chacun en particulier.

Solution.

Soit x la mise du premier, celle du second sera $1300 - x$, puisqu'ils ont mis à eux deux 1300 dans le commerce. Le gain du premier sera $870 - x$, & celui du second sera $1330 - 1300 + x$, ou en réduisant $30 + x$: car il est clair que pour avoir le gain que fait l'un & l'autre, il faut ôter sa mise du nombre qui contient par hypothese la mise & le gain de chacun. Or par les conditions du problême, la mise & le gain du premier sont renfermés dans sa part 870, & de même la mise & le gain du second sont contenus dans sa part, qui est 1330.

On ſçait de plus que les gains ſont dans la raiſon composée des miſes & des tems, c'eſt-à-dire comme les produits des miſes par les tems : car il eſt évident que ſi un homme a placé dans le commerce trois fois plus qu'un autre dans le même tems, il doit gagner trois fois davantage, & s'il a mis ſon argent pendant un tems quadruple, il doit encore par-là gagner quatre fois plus que l'autre, c'eſt-à-dire que ſon gain ſera 4 fois 3 fois plus grand que celui du ſecond, ou qu'il ſera à celui du ſecond, comme 12 à 1, qui ſont les produits des miſes par les tems ; multipliant donc la miſe du premier, qui eſt x, par ſon tems 3, & celle du ſecond par ſon tems 6 ; puis faiſant une proportion avec les produits & les gains particuliers, on aura $3x . \overline{1300 - x} \times 6 :: 870 - x . 30 + x$, & diviſant chaque terme de la premiere raiſon par 3, $x . \overline{1300 - x} \times 2 :: 870 - x . 30 + x$: prenant enſuite le produit des extrêmes & des moyens, on aura cette égalité $30x + xx = 2262000 - 4340x + 2xx$, qui renferme toutes les conditions du problême. Ôtant xx de chaque membre, & faiſant paſſer $30x$ de l'autre côté, & 2262000 dans le premier membre, il vient $-2262000 = xx - 4370x$, ou $xx - 4370x = -2262000$. Ajoutant à chaque membre le quarré de 2185, moitié du coefficient, pour compléter le quarré, on aura $xx - 4370x + 4774225 = 4774225 - 2262000 = 2512225$; & tirant enſuite la racine de chaque membre, il vient $x - 2185 = \pm \sqrt{2512225} = \pm 1585$, ou enfin $x = 2185 \pm 1585$, qui donne pour une des valeurs de x, 3770, & pour l'autre 600 livres, que l'on regarde comme celle qui réſout le problême dans le ſens que l'on s'étoit propoſé, comme il eſt aiſé de le voir, en déterminant la part de gain total pour 600, par une Regle de Trois, dont le premier terme ſera la ſomme des miſes, multipliées par leurs tems, le ſecond terme le gain total, le troiſieme la miſe 600 livres du premier, multipliée par ſon tems, & le quatrieme le gain du même premier.

Remarque générale & importante ſur la ſolution de ce Problême.

314. On remarquera 1°. que la valeur de l'inconnue qui ſatisfait aux conditions du problême, eſt celle qui eſt déterminée par la racine négative du quarré, qui étoit ſous le ſigne

radical ; d'où il suit que l'on ne doit pas établir pour regle générale que les quantités déterminées par les racines négatives sont étrangeres à la question, puisque dans ce cas la négative donne la solution du problême dans le sens qu'on s'étoit proposé. Pour voir présentement ce que signifie l'autre racine 3770, je fais attention que puisque la somme des mises est égale à 1300, en ôtant l'une de ce nombre, je dois avoir l'autre. J'ôte donc 3770 de 1300, & quoique cela ne soit pas possible dans un sens, cependant de l'autre il est vrai de dire qu'en ôtant 3770 de 1300, le reste est — 2470, puisqu'en ajoutant ce reste à la quantité retranchée, il vient 1300, ce qui m'apprend d'abord que l'un des Commerçans, au lieu d'avoir mis dans le commerce, en a réellement ôté 2470 livres ; je multiplie ensuite les mises quelles qu'elles soient par leurs temps, multipliant 3770 par 3, il vient 11310, & multipliant de même la mise du second — 2470 par son tems 6, il vient au produit — 14820 ; la somme de ces deux produits, qui est censée la cause du gain total est — 3510. Je fais après cela une Regle de Trois, dont le premier terme soit — 3510, le second, la mise du premier multipliée par son tems 3, le troisieme, le gain total, que l'on suppose de 900, & appellant x le quatrieme terme, qui sera le gain du premier, j'ai cette proportion $-3510 . 11310 :: 900 . x = \frac{11310 \times 900}{-3510} = -2900$, dont le quatrieme terme fait voir que le premier, au lieu d'avoir gagné a réellement perdu 2900, & cette perte est telle que la somme de la perte — 2900, & de la mise 3770 fait précisément 870. Puisque le premier perd, il faut nécessairement que le second qui a ôté son argent du commerce gagne, puisqu'il manque de perdre, & cela d'autant plus qu'il a ôté plus d'argent, & qu'il y a plus de tems qu'il a ôté son argent, c'est-à-dire que le gain qu'il fait est dans la raison composée de l'argent qu'il a ôté du commerce, multiplié par le tems, ou comme le produit de cet argent par le tems qui s'est passé depuis qu'il l'a retiré. Je fais encore une proportion pour déterminer son gain, dont le premier terme soit la somme des produits des mises par leurs tems, le second le produit de la mise de ce Commerçant par son tems ; le troisieme le gain total, & le quatrieme le gain de ce Commerçant, ce qui me donne $-3510 . -14820 :: 900 . x = \frac{-14820 \times 900}{-3510}$, ou $= \frac{-13338000}{-3519} =$

+ 3800 livres, puiſque — diviſé par — doit donner +; & ce gain eſt encore tel qu'en l'ajoutant avec la miſe négative — 2470, il vient pour la ſomme 1330, qui eſt le nombre exprimé par les conditions du problême.

On voit par-là que quoique les valeurs algébriques paroiſſent quelquefois ne rien ſignifier, parce qu'elles ſont extrêmement éloignées de ce que nous aurions imaginé, elles n'en ſont pas pour cela moins vraies ni moins bien raiſonnées; & quoique l'on ne doive pas s'appliquer dans tous les cas à les reconnoître, parce que cela deviendroit inutile, il eſt auſſi ridicule de ne les pas rechercher dans quelques-uns, pour s'accoutumer aux expreſſions algébriques, & pour être en état d'interprêter au beſoin les oracles que nous donne l'analyſe.

315. Ces exemples ſuffiſent pour connoître l'uſage que l'on doit faire des racines négatives. Nous allons préſentement réſoudre en peu de mots les équations du ſecond degré dans leurs formules générales, parce que la méthode eſt toujours la même. Si l'on a une équation du ſecond degré, comme celle-ci, $xx - 4x = 12$, on fait paſſer ordinairement le terme 12 de l'autre côté du ſigne d'égalité, & alors on dit que l'équation eſt égale à zero, & elle ſe marque ainſi: $xx - 4x + 12 = 0$. Cela poſé, toute équation du ſecond degré peut ſe rappeller à l'une des ſix formules ſuivantes.

$$xx + px + q = 0$$
$$xx - px - q = 0$$
$$xx - px + q = 0$$
$$xx + px - q = 0$$
$$xx - q = 0$$
$$xx + q = 0$$

316. Ces équations ſe réſolvent comme les précédentes. Le terme q repréſente toutes les quantités connues: la lettre p déſigne tous les coefficients qui multiplient l'inconnue au ſecond terme. On tranſporte après cela le terme q dans l'autre membre, & l'on ajoute à chacun, le quarré de la moitié du coefficient p, & l'on prend la racine du premier membre, qui devient un quarré parfait, & l'on met les quantités qui ſont dans l'autre membre ſous le ſigne radical, pour marquer que l'on en prend la racine; ce qui donne les ſix formules ſuivantes correſpondantes aux équations précédentes.

Premiere $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$

Seconde $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$

Troisieme $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$

Quatrieme $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$

Cinquieme $x = \pm \sqrt{q}$

Sixieme $x = \pm \sqrt{-q}$.

Voici ce que l'on peut remarquer sur ces formules. Dans la premiere & la troisieme, le problême sera toujours possible, tant que $\frac{1}{4}pp$ sera plus grand que q, ou au moins égal; mais s'il étoit moindre, le problême seroit impossible, puisque dans ce cas $\sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$ seroit une quantité imaginaire. On appelle imaginaire une quantité négative, soumise à un radical, parce qu'il n'y a point de quantité qui donne — au quarré. Tous les problêmes qui se rapportent à la seconde & à la troisieme formule, seront toujours possibles, puisque jamais la quantité $\sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$ ne pourra être imaginaire.

Enfin la cinquieme formule aura toujours deux valeurs égales, l'une positive, qui est $+\sqrt{q}$, & l'autre négative, qui est $-\sqrt{q}$; & la sixieme renfermera toujours quelque absurdité, puisque $\pm \sqrt{-q}$ sera toujours une quantité imaginaire.

317. Il y a certaines équations du quatrieme degré qui se résolvent de même que celles du second, comme on va voir dans l'exemple suivant.

SIXIEME QUESTION.

On demande deux nombres, dont le produit soit 12, & la différence des quarrés 7.

SOLUTION.

Soient x & y ces deux nombres, la premiere condition du problême donne $xy = 12$, d'où l'on tire $y = \frac{12}{x}$, & la seconde donne $xx - yy = 7$; & substituant à la place de yy sa valeur $\frac{144}{xx}$, on aura $xx - \frac{144}{xx} = 7$, multipliant par xx pour faire évanouir la fraction $\frac{144}{xx}$, il vient $x^4 - 144 = 7xx$, ou

$x^4 - 7xx = 144$. J'ajoute à chaque membre le quarré de la moitié du coefficient de x, qui est celui de $3\frac{1}{2}$, il vient $x^4 - 7xx + 12\frac{1}{4} = 12 + \frac{1}{4} + 144$, dont le premier membre est un quarré parfait, & tirant les racines de part & d'autre, après avoir réduit le second membre, on aura $xx - 3\frac{1}{2} = \pm \sqrt{156\frac{1}{4}}$; la racine de $156\frac{1}{4}$ est $12\frac{1}{2}$: ainsi $xx - 3\frac{1}{2} = \pm 12\frac{1}{2}$. Dégageant xx, on a $xx = \pm 12\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = 16$ ou -9, & tirant encore les racines pour avoir x au premier degré, on aura $x = \pm \sqrt{16}$, & $x = \pm \sqrt{-9}$, dont les deux premieres sont ± 4, & les deux autres sont imaginaires, c'est-à-dire que l'une des valeurs de x est 4. Je divise 12 par 4 pour avoir $y = \frac{12}{x}$, & le quotient est 3 : donc les nombres demandés sont 3 & 4, puisque leur produit est 12, & que la différence de leurs quarrés 16 & 9 est 7. On auroit pu résoudre ce problême, en se servant de la seconde formule, & faisant $-7 = -p$, & $-144 = -q$; ce qui auroit donné la même solution.

Du calcul des radicaux, des opérations qui leur sont particulieres, & de la maniere de les réduire, de les ajouter, soustraire, multiplier ou diviser.

318. On appelle *radicale* une quantité, dont on ne peut pas extraire la racine exactement. Pour peu que l'on veuille résoudre quelques problêmes du second degré, on trouve nécessairement de ces sortes d'expressions, que l'on appelle *radicales* ou *incommensurables*; mais quoiqu'elles ne puissent pas avoir de racines exactes, il y a cependant bien des cas où on peut simplifier leurs expressions, d'autres dans lesquels on est obligé d'opérer sur ces grandeurs par Addition, Multiplication ou Division, ce qui arrive principalement dans les équations du quatrieme degré réductibles au second ; c'est pourquoi il est à propos d'enseigner de quelle maniere on doit pratiquer toutes ces opérations, & c'est en cela que consiste le calcul des radicaux ou incommensurables que nous allons expliquer en peu de mots. Il y a autant de radicaux qu'il y a de puissances différentes ; mais pour ne point entrer dans un trop grand détail, nous ne parlerons que des radicaux du second degré, auxquels on ajoutera quelques exemples de radicaux du troisieme. Les regles

regles étant générales, on pourra de soi-même les appliquer à des radicaux plus compliqués.

Réduire les quantités irrationnelles ou incommensurables à leur plus simple expression.

319. On examinera si la quantité soumise au radical n'a pas parmi ses facteurs quelque puissance de même nom que le radical, soit que cette puissance soit une quantité complexe, soit qu'elle ne soit qu'un monome : pour reconnoître ses facteurs, il faut sçavoir décomposer une quantité, c'est-à-dire trouver les autres quantités, de la multiplication desquelles résulte la grandeur donnée. Cela posé, lorsqu'on aura trouvé un ou plusieurs facteurs de même puissance que la racine, on en extraira la racine, & l'on mettra le reste sous le radical.

Par exemple, $\sqrt{a^3b} = a\sqrt{ab}$: car il est évident que $a^3b = a^2 \times ab$: donc en prenant la racine du quarré complet a^2, & laissant le reste sous le radical, on aura $a\sqrt{ab}$; tout de même $\sqrt{16a^2b - 32a^3} = \sqrt{16a^2 \times \overline{b - 2a}}$. Or il est visible que $16a^2$ est un quarré parfait, celui de $4a$: donc on extraira cette racine, & l'on aura pour la plus simple expression de ce radical $4a\sqrt{b - 2a}$. Si l'on avoit $\sqrt[3]{a^3c^2 - a^3bd}$, on voit que a^3, qui est commun aux deux termes, est un cube parfait, dont on peut prendre la racine cubique ; ainsi l'on écrira $a\sqrt[3]{c^2 - bd}$. De même si l'on avoit $\sqrt{50ffgg - 25ffmm + 75bdff}$, il est aisé d'appercevoir qu'il y a dans cette quantité un quarré parfait, commun à tous les termes, que l'on peut mettre hors du radical, c'est $25ff$; car on auroit pu écrire cette quantité comme il suit, $\sqrt{25ff \times \overline{2gg - mm + 3bd}}$, & prenant la racine, on auroit eu $5f\sqrt{2gg - mm + 3bd}$. Il en seroit de même des autres quantités. Par exemple, $\sqrt{3a^2b^2fg + 6a^2bcfg + 3a^2c^2fg}$ auroit pu s'écrire ainsi : $\sqrt{a^2 \times \overline{b^2 + 2bc + c^2} \times 3fg}$, & prenant la racine des deux facteurs, qui sont des quarrés parfaits, on aura $a \times \overline{b + c} \times \sqrt{3fg}$. Si l'on avoit à réduire cette autre expression $\sqrt{27a^2b^2 - 36a^2fg + 9a^3c}$, je remarque que cette quantité est le produit de $9a^2$ par $3b^2 - 4fg + ac$: ainsi j'écrirai

en prenant la racine $3a\sqrt{3b^2 - 4fg + ac}$; si l'on avoit $\sqrt{64m^2g^2 - 36ffgg + 48abgg}$, on auroit en simplifiant ce radical, $2g\sqrt{16mm - 9ff + 12ab}$, & ainsi de tous les autres.

320. Il est quelquefois à propos de compliquer un radical, pour faciliter certaines opérations, & de faire précisément l'inverse de ce que nous venons d'enseigner, c'est-à-dire de faire passer sous le radical une quantité qui est hors du même signe : voici comme cela se pratique. On éleve la quantité qui est hors du signe, à la puissance marquée par l'exposant du radical, & on multiplie cette puissance par les quantités soumises au même signe. Il est aisé de voir que cette nouvelle expression n'est différente de la premiere qu'en apparence, & non en valeur ; car la quantité élevée à la puissance du radical & soumise au même radical, ne vaut que la racine de cette même quantité : ainsi $a\sqrt{ab} = \sqrt{a^2 \times ab}$, $a + b\sqrt{fg} = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 \times fg}$ $= \sqrt{a^2fg + 2abgf + b^2fg}$.

321. On peut multiplier ou diviser l'exposant d'un radical sans en changer la valeur : pour cela, il faut élever la quantité qui est sous ce signe à la puissance marquée par le nombre qui multiplie l'exposant du radical, ou tirer de la quantité qui est soumise au même radical, la racine marquée par le diviseur ; ce qui se peut faire en deux manieres, ou bien en indiquant cette racine par de nouveaux signes radicaux, ou bien en divisant les exposans des quantités qui sont sous le signe, par le nombre qui doit diviser l'exposant du radical : car on a vu qu'en divisant ainsi les exposans par des nombres, c'est prendre la racine marquée par ce même nombre (art. 142). D'ailleurs si l'on multiplie ou si l'on divise, il est évident que la quantité proposée reçoit autant par l'élévation de la quantité soumise au radical, à la puissance marquée par le multiplicateur de l'exposant du radical ; que la racine que l'on prend ensuite diminue par la multiplication du même exposant, & réciproquement lorsque l'on divise les exposans des quantités qui sont sous le signe radical, on diminue ces grandeurs de la quantité dont elles ont été augmentées par la division de l'exposant du radical. Des exemples éclairciront tout ceci. Si l'on a $\sqrt{ab}$, je dis que l'on peut faire ces égalités, $\sqrt{ab} = \sqrt[6]{a^3b^3} =$

$\sqrt[2m]{a^m b^m}$; car $\sqrt[m]{a^m b^m} = ab$, en prenant les racines de chaque lettre : donc $\sqrt[2m]{a^m b^m} = \sqrt{ab}$, & ainſi des autres. De même $\sqrt[5]{a^3 b^2} = \sqrt[\frac{5}{5}]{a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{2}{5}}}$, ou en général $\sqrt[m]{a^n b^p} = \sqrt[\frac{m}{r}]{a^{\frac{n}{r}} b^{\frac{p}{r}}} =$ $\sqrt[\frac{m}{r}]{\sqrt[r]{a^n b^p}}$: car $\sqrt[\frac{1}{r}]{a^{\frac{n}{r}} b^{\frac{p}{r}}} = a^n b^p$: donc $\sqrt[\frac{m}{r}]{a^{\frac{n}{r}} b^{\frac{p}{r}}} = \sqrt[m]{a^n b^p}$, & ainſi des autres : car il eſt évident que lorſque l'expoſant du radical eſt égal à l'expoſant des grandeurs ſoumiſes au même ſigne, on peut ſupprimer le radical, & écrire les quantités toutes ſimples, comme ſi l'on a $\sqrt[3]{a^3}$, on met a, & pour $\sqrt[5]{a^5 b^{10}}$, on met ab^2 ; c'eſt ce qui arrive ici, car l'expoſant $\frac{m}{r}$ peut s'écrire ainſi, $m \times \frac{1}{r}$, & de même les expoſans $\frac{n}{r}, \frac{p}{r}$ peuvent ſe marquer ainſi, $n \times \frac{1}{r}$, $p \times \frac{1}{r}$: donc notre quantité deviendroit $\sqrt[m \times \frac{1}{r}]{a^{n \times \frac{1}{r}} b^{p \times \frac{1}{r}}}$, où il eſt viſible que l'on ne fait que multiplier les expoſans du radical & des quantités qui lui ſont ſoumiſes par la même grandeur $\frac{1}{r}$; ce qui rentre dans le premier cas.

322. On tire delà la méthode de réduire pluſieurs radicaux à la même dénomination ſans changer leurs valeurs, c'eſt-à-dire de donner à deux radicaux différens un même ſigne. Par exemple, ſi l'on me donne ces deux incommenſurables $\sqrt{a^3}$ & $\sqrt[3]{a^2 b^3}$, j'éleve le premier a^3 à ſon cube, & je multiplie l'expoſant 2 du radical par 3, ce qui me donne $\sqrt[6]{a^9} = \sqrt{a^3}$: de même j'éleve $a^2 b^4$ à ſon quarré pour avoir $a^4 b^8$, & je multiplie l'expoſant du ſigne radical qui lui eſt joint par l'expoſant 2 du premier, ce qui me donne $\sqrt[6]{a^4 b^8} = \sqrt[3]{a^2 b^4}$. De cette maniere il eſt viſible que les deux quantités irrationnelles propoſées ont changé de forme ou d'expreſſion, ſans avoir changé de valeur, & de plus qu'elles ont le même ſigne radical $\sqrt[6]{\ }$, & ainſi des autres. En général pour réduire deux radicaux quelconques $a \sqrt[m]{b^p}$, $c \sqrt[n]{d^r}$, on écrira $a \sqrt[mn]{b^{pn}}$, $c \sqrt[mn]{d^{mr}}$. Les opérations

que nous venons de voir, sont particulieres aux quantités irrationnelles : nous allons présentement expliquer celles qui leur sont communes avec les autres quantités.

De l'Addition des Radicaux.

323. On ajoutera les radicaux, en les joignant avec leurs signes tels qu'ils sont, & observant de les réduire avant de faire l'addition. De plus, si les radicaux sont les mêmes de part & d'autre, il suffira d'ajouter les quantités qui précédent le signe radical, & d'en multiplier la somme par le même radical : suivant cette regle, la somme de $a\sqrt{b}$ & de $c\sqrt{d}$ est $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$; celle de $ff\sqrt[3]{g^2}$, & de $mn\sqrt{dc}$ est $ff\sqrt[3]{g^2}+mn\sqrt{dc}$; celle de $af\sqrt{mn}$ & de $bg\sqrt{mn}$ est $\overline{af+bg}\sqrt{mn}$. De même en nombres, $3\sqrt{5}$ & $4\sqrt{7}$ donnent pour somme $3\sqrt{5}+4\sqrt{7}$, $4\sqrt{8}$ & $6\sqrt{8}$ donnent $10\sqrt{8}$, &c.

De la Soustraction des Radicaux.

324. La Soustraction des radicaux se fait de même que celle des autres quantités algébriques, en changeant le signe $+$ en $-$, & le signe $-$ en $+$ de la quantité que l'on veut soustraire, observant de simplifier auparavant les radicaux proposés, & de multiplier la différence par le même radical, en cas qu'il soit commun aux deux radicaux. Par exemple, la différence de $a\sqrt{c}$ à $b\sqrt{c}$ est $\overline{a-b}\sqrt{c}$; celle de $10\sqrt[3]{9}$ à $4\sqrt[3]{9}$ est $\overline{10-4}\sqrt[3]{9}$, ou $6\sqrt[3]{9}$, &c.

De la Multiplication des Radicaux.

325. On peut multiplier un radical par un entier, par une fraction, ou par un autre radical ; ce qui fait trois cas particuliers, qui n'ont aucune difficulté.

326. Pour multiplier un radical par un entier, s'il a déja quelque grandeur qui le précéde, on multipliera cette quantité qui est hors du radical par l'entier proposé. Par exemple, le produit de $a\sqrt{b}$ par $3c$ est $3ac\sqrt{b}$; le produit de $\sqrt[3]{c^2}$ par $a+2b$ est $\overline{a+2b}\sqrt[3]{c^2}$, ou $a\sqrt[3]{c^2}+2b\sqrt[3]{c^2}$, & ainsi de suite. Si l'on ne vouloit pas que le multiplicateur fût devant le radi-

cal, il faudroit l'élever à la puissance marquée par l'exposant du radical. Ainsi pour multiplier $\sqrt[3]{bc}$ par af, j'éleve af à son cube, & je multiplie ce qui est sous le radical par a^3f^3, & j'ai $\sqrt[3]{a^3bcf^3}$. Il en seroit ainsi des autres en nombres ou en lettres, quelque soit le multiplicateur incomplexe ou polynome.

327. Pour multiplier un radical par une fraction, on multipliera la quantité qui est hors du signe par la fraction proposée, & la multiplication sera faite. Si le radical n'avoit d'autre coefficient que l'unité, & qu'on jugeât à propos de ne point lui en donner, il faudroit élever la fraction à la puissance marquée par l'exposant du radical, & multiplier le numérateur de la nouvelle fraction par la quantité soumise au radical. Ainsi pour multiplier le radical $f\sqrt{ab}$ par $\frac{c}{d}$, j'écris $\frac{cf}{d}\sqrt{ab}$; de même $3\sqrt{c}$ par $\frac{6}{5} = \frac{18}{5}\sqrt{c}$; de même $\sqrt[3]{cf}$, multiplié par $\frac{2a}{b} = \sqrt[3]{\frac{8a^3cf}{b^3}}$, par la seconde partie de cette regle.

328. Si le multiplicateur est aussi un radical de même exposant que celui du multiplicande, on multipliera les quantités soumises au même radical les unes par les autres, suivant les regles ordinaires, & on donnera au produit le signe du multiplicande ou du multiplicateur, observant de multiplier les quantités qui précédent les radicaux les unes par les autres, & de tirer hors du nouveau radical les puissances de même nom, que la multiplication auroit pu produire. Par exemple, $a\sqrt{cb}$, multiplié par $f\sqrt{cd} = af\sqrt{c^2db} = acf\sqrt{bd}$; de même $f\sqrt[3]{a^2bc} \times g\sqrt[3]{ac^2d} = fg\sqrt[3]{a^3bc^3d} = acfg\sqrt[3]{bd}$, & ainsi des autres.

329. Si le radical n'a pas le même exposant, on commencera par les y réduire (art. 321), & l'on fera la multiplication comme dans le cas précédent. Par exemple, pour multiplier $a\sqrt{bc}$ par $d\sqrt[3]{fg}$, je réduis d'abord $a\sqrt{bc}$ en $a\sqrt[6]{b^3c^3}$, & $d\sqrt[3]{fg}$ en $d\sqrt[6]{f^2g^2}$, & multipliant ensuite j'ai $ad\sqrt[6]{b^3c^3f^2g^2}$. Il en seroit de même des radicaux plus compliqués. Il faut bien remarquer que si le radical du multiplicateur est le même que celui du multiplicande, la multiplication se fait en supprimant le radical, & multipliant par cette quantité le produit des quantités qui précédent. Ainsi $a\sqrt{bc} \times d\sqrt{bc} = adbc$

$3\sqrt{fg} \times 4\sqrt{fg} = 12fg$; ce qui eſt évident, puiſque toute racine multipliée par elle-même doit néceſſairement ſe reproduire.

Si l'on avoit des radicaux complexes à multiplier par des radicaux monomes ou complexes, la multiplication s'en feroit, en ſuivant les mêmes regles, & celles de la multiplication des polynomes.

De la Diviſion des Radicaux.

330. On peut diviſer un radical par un entier ou par une fraction, ou par un autre radical : toutes ces opérations ſont les inverſes des précédentes ; c'eſt pourquoi nous ne nous y arrêterons pas long-tems.

331. Pour diviſer un radical par un entier, on diviſera le coefficient par l'entier propoſé : ainſi pour diviſer $a\sqrt{b}$ par c, j'écris $\frac{a}{c}\sqrt{b}$; de même $3\sqrt{5}$ diviſé par $4 = \frac{3}{4}\sqrt{5}$, & de même des autres.

332. Pour diviſer un radical par une fraction, on multipliera le coefficient du radical par la fraction inverſe, à moins que l'on ne voulût faire paſſer le diviſeur ſous le ſigne radical ; auquel cas il faudroit multiplier ce qui eſt ſous le radical par le quarré de la fraction inverſe. Suivant ces regles, le quotient de $a\sqrt{bc}$ diviſé par $\frac{d}{f} = \frac{af}{d}\sqrt{bc}$, le quotient de $3\sqrt{bd}$; diviſé par $\frac{4}{5} = \frac{15}{4}\sqrt{bd}$; & celui de $\sqrt[3]{fg}$ par $\frac{a}{d} = \frac{d}{a}\sqrt[3]{fg}$, ou en mettant la fraction ſous le radical $\sqrt[3]{\frac{d^3 fg}{a^3}}$.

Pour diviſer un radical par un autre, on diviſera les coefficients & les radicaux l'un par l'autre, en obſervant d'effacer le radical, lorſqu'il eſt commun au diviſeur & au dividende. Ainſi $a\sqrt{b}$ diviſé par $c\sqrt{d} = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{d}}$, $a\sqrt{cd}$ diviſé par $b\sqrt{cd} = \frac{a}{b}$, & ainſi des autres.

Formation des Puiſſances des Radicaux.

333. Pour élever un radical à une puiſſance propoſée, il faut élever à cette puiſſance les quantités qui précédent le radical, & celles qui lui ſont ſoumiſes, ou bien diviſer l'expoſant du radical par l'expoſant de la puiſſance à laquelle on veut élever ce radical : ainſi le cube de $a\sqrt{bc}$ eſt $a^3\sqrt{b^3c^3}$, ou

$a^3bc\sqrt{bc}$, en ſimplifiant la derniere expreſſion : on peut dire auſſi que le cube de cette même quantité eſt $a^3\sqrt[\frac{2}{3}]{bc}$: car ſi l'on ſe ſouvient de ce que nous avons déja dit ſur les radicaux & les expoſans (art. 142.) $a^3\sqrt[\frac{2}{3}]{bc} = a^3b^{\frac{1}{\frac{2}{3}}}c^{\frac{1}{\frac{2}{3}}} = a^3b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}} = a^3\sqrt{b^3c^3}$, par le même article. Toutes les fois que l'expoſant du radical ſera diviſible par celui de la puiſſance à laquelle on veut l'élever, il faudra faire la diviſion préférablement à toute autre méthode.

Extraction des racines des radicaux.

334. Pour tirer la racine d'un radical, il n'y aura qu'à tirer la racine de ce qui précéde ce radical, & multiplier l'expoſant du ſigne radical par l'expoſant de la racine propoſée ; car puiſque nous venons de voir que la formation des puiſſances de ces quantités ſe fait par la diviſion des expoſans, par celui de la puiſſance ; dans l'extraction des racines, il faut faire le contraire : ainſi la racine cubique de $a^3\sqrt{b^2c}$ eſt $a\sqrt[6]{b^2c}$, celle de $a^4\sqrt[5]{b^2c^3}$ eſt $a\sqrt[3]{a}\sqrt[15]{b^2c^3}$. Si l'on vouloit on pourroit encore faire la même choſe, après avoir fait paſſer tout ce qui précéde le ſigne ſous le même ſigne : ainſi la racine cubique de $a^4\sqrt[5]{b^2c^3}$, ou celle de $\sqrt[5]{a^{20}b^2c^3}$ eſt $\sqrt[15]{a^{20}b^2c^3}$.

335. Il faut bien remarquer que toutes les opérations que l'on fait ſur les radicaux peuvent ſe faire d'une autre maniere, en cherchant la quantité exponentielle égale au radical propoſé : car nous avons démontré (art. 141 & ſuivans) qu'il n'y a point de radical qu'on ne puiſſe convertir en quantité exponentielle & réciproquement.

Les Commençans confondent quelquefois les racines imaginaires avec les grandeurs incommenſurables ; il y a une différence totale entre les unes & les autres. On peut déterminer par la Géométrie la grandeur abſolue des quantités incommenſurables, quoiqu'on ne puiſſe pas déterminer en nombres leurs rapports avec l'unité, au lieu que l'on ne peut connoître ce que ſignifient les imaginaires ; car on ne connoît point de racine qui puiſſe donner un quarré négatif : c'eſt ce qui a fait regarder ces quantités comme abſolument impoſſibles, & comme abſurdes les équations ou problêmes qui ne donnent que de pareilles ſolutions. Mais on a reconnu que l'on ne doit

point établir cette proposition comme un principe général; & d'ailleurs si l'on considere les racines d'une équation dans leur nature & leur essence, qui est d'être des diviseurs exacts de cette même équation, on verra que les imaginaires ne sont pas moins racines d'une équation, que celles que l'on appelle vraies ou réelles, puisque comme celles-ci, elles concourent par leur multiplication à former l'équation qui les a données, & qu'elles en sont par conséquent des diviseurs exacts, comme il est aisé de s'en convaincre par l'exemple suivant.

Soit proposé de résoudre cette équation du second degré, $xx - 4x + 12 = 0$. On trouvera, en suivant les regles ordinaires, $x = 2 \pm \sqrt{-8}$, ou, ce qui est la même chose, en égalant les deux valeurs de x à zero, les deux équations $x - 2 + \sqrt{-8} = 0$, & $x - 2 - \sqrt{-8} = 0$, que l'on peut regarder comme des racines de la proposée, parce qu'en les multipliant l'une par l'autre, on retrouve au produit, après la réduction & l'évanouissement des radicaux l'équation proposée $xx - 4x + 12 = 0$.

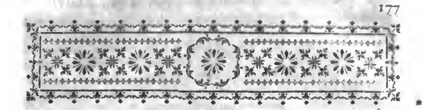
Il faut encore remarquer que dans une équation quelconque, délivrée de tout signe radical, les racines imaginaires ne peuvent être qu'en nombre pair. Ainsi dans une équation du second degré, les racines sont toujours toutes les deux vraies, ou toutes deux imaginaires.

Je me borne à ces exemples sur la maniere de résoudre les équations du second degré, afin d'en faciliter l'usage qui est fort fréquent dans les questions Mathématiques. L'on trouvera vers la fin de ce volume ce qui appartient à celles du troisieme & du quatrieme degré, quoiqu'elle ne soient pas aussi absolument nécessaires que celles-ci.

Fin des équations du second degré, & du second Livre.



NOUVEAU



NOUVEAU COURS
DE
MATHÉMATIQUE.

LIVRE TROISIEME,

Où l'on considere les différentes positions des Lignes droites les unes à l'égard des autres.

DÉFINITIONS.

I.

336. LES *lignes paralleles* sont celles qui, étant prolongées autant que l'on voudra, sont toujours également éloignées entr'elles, & dont les extrêmités ne peuvent jamais se rencontrer, comme les lignes A B & C D. Planche I. Figure 7.

II.

337. L'*angle* est l'inclinaison d'une ligne sur une autre : on l'appelle *angle rectiligne*, lorsque les deux lignes qui le forment sont droites, comme l'angle ABC; il est appellé *curviligne*; Figure 8. lorsque les lignes qui le forment sont des lignes courbes, comme l'angle D E F, & *mixtiligne*, lorsqu'une des lignes est droite Figure 9. & l'autre courbe, comme G H I. Figure 10.

III.

338. Les lignes droites ou courbes, dont l'inclinaison respective fait un angle quelconque, sont appellées *côtés de l'angle*. Le point où ces deux lignes se rencontrent mutuellement,

eſt appellé *le ſommet de l'angle*. Il ſuit delà que la grandeur d'un angle ne dépend pas de la longueur de ſes côtés, mais ſeulement de l'inclinaiſon de ces lignes l'une ſur l'autre, qui ſeule conſtitue la nature de l'angle. Il ſuit encore delà qu'un angle ne renferme aucun eſpace fini ou déterminé. Pour marquer un angle, on ſe ſert ordinairement de trois lettres, & celle qui ſe trouve au milieu, déſigne le ſommet de l'angle.

IV.

339. L'*angle droit* eſt celui qui eſt formé par la rencontre de deux lignes perpendiculaires l'une à l'autre, comme les angles ABC ou ABD. *Figure 11.*

V.

340. L'*angle oblique* eſt celui qui ſe fait par la rencontre de deux lignes qui ne ſont pas perpendiculaires l'une à l'autre, & que l'on appelle pour cette raiſon des lignes *obliques*, comme ſont les lignes IH & LK. Il y a deux ſortes d'angles obliques, ſçavoir l'angle *aigu* & l'angle *obtus*. *Figure 12.*

VI.

341. L'*angle aigu* eſt celui qui eſt plus petit, ou moins ouvert qu'un droit, comme l'angle HIK; & l'angle obtus eſt celui qui eſt plus grand ou plus ouvert qu'un droit, comme LHI. Il eſt viſible qu'une ligne HI tombant ſur une autre, forme avec elle deux angles inégaux, qui pris enſemble, valent deux droits: car ſi l'on imagine la droite IF perpendiculaire à la ligne LK au point I, l'angle aigu $HIL = FIL - FIH$, & l'angle obtus $HIK = FIK + FIH$. Ainſi en ajoutant les membres de ces deux équations, on aura $HIL + HIK = FIL + FIL = 2FIL$, puiſque tous les angles droits ſont égaux. *Figure 12.*

VII.

342. Le *cercle* eſt une ſurface plane, terminée par une ſeule ligne courbe, qu'on appelle *circonférence de cercle*, dont tous les points ſont également éloignés d'un point A, que l'on appelle *centre du cercle;* les lignes AB, AC, AD menées du centre A à la circonférence, ſont appellées *rayons du cercle*, & ſont toutes égales entr'elles, puiſqu'elles meſurent la diſtance du centre à chaque point de la circonférence, & que *Figure 13.*

cette distance est partout la même, selon la définition du cercle.

VIII.

343. Le *diametre d'un cercle* est une ligne droite qui passe par le centre, & dont les extrêmités vont aboutir à la circonférence, comme ED: cette ligne divise le cercle & sa circonférence en deux parties égales, que l'on appelle indifféremment *demi-cercle*, & dont la moitié par conséquent se nomme *quart de cercle*. *Figure 14.*

IX.

344. On appelle *arc de cercle* une partie de la circonférence plus petite ou plus grande que la demi-circonférence.

X.

345. Les Mathématiciens ont divisé la circonférence du cercle en 360 parties égales, qu'ils ont appellées *degrés*, & chaque degré en 60 autres parties égales, qu'ils ont appellées *minutes*, dont chacune a été encore divisée en 60 autres parties égales, nommées *secondes*. Ces divisions ont été imaginées particuliérement pour mesurer les angles, & déterminer plus exactement les rapports qu'ils ont entr'eux. Il ne faut pas s'imaginer que degré soit une grandeur fixe & absolue, mais au contraire c'est une quantité variable, selon les différens cercles, quoique constamment la même, par rapport à chacun en particulier, dont chaque degré est la 360ᵉ partie: d'où il est aisé de conclure qu'un grand cercle a des degrés plus grands que ceux d'un petit: il en est de même des minutes, des secondes & des tierces, &c.

XI.

346. La *mesure d'un angle* est un arc de cercle décrit à volonté de sa pointe, & terminé par ses côtés: ainsi l'on connoît que la mesure de l'angle ABC est l'arc AC; de sorte qu'autant l'arc AC contiendra de degrés de minutes, &c, autant l'angle ABC vaudra de degrés de minutes, &c. Pour concevoir comment les arcs de cercles sont la mesure des angles, & peuvent servir à déterminer leur grandeur, on peut imaginer que l'angle CBA a été formé par le mouvement de la ligne BC, autour du point B comme d'une charniere, laquelle étoit d'abord appliquée sur la ligne BA: car il est évident *Figure 16.*

qu'en prenant sur cette ligne un point A, & sur la ligne BC un point C, également distant du point B, que le point A, l'arc AC exprimera la quantité de chemin qu'a parcouru le point A pour s'éloigner de la ligne AB. Si cette ligne se fût éloignée deux fois davantage, l'angle eût été deux fois plus grand, ainsi que l'arc qui marque l'espace parcouru par le point C pour s'éloigner du point A. On peut remarquer que la mesure d'un angle droit est toujours le quart de la circonférence d'un cercle, c'est-à-dire de 90 degrés: car si l'on considere les deux diametres AB, CD qui se coupent à angles droits, on verra qu'ils divisent la circonférence du cercle en quatre parties égales, & que chacune est la mesure de l'angle droit qui lui correspond : par conséquent on peut dire encore qu'un demi-cercle est la mesure de deux angles droits.

Figure 15.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

Figure 17.

347. *D'un point* A *donné hors d'une ligne* BC *sur le même plan, mener une perpendiculaire* AD *à cette ligne.*

Pour tirer du point donné A une perpendiculaire sur la ligne BC, décrivez du point A, comme centre, un arc de cercle qui vienne couper la ligne donnée dans les points B & C; ensuite de ces points & d'une même ouverture de compas, moindre que AB, décrivez deux arcs de cercle qui se couperont en un point E, par lequel & par le point A, faisant passer une droite AED, cette ligne sera la perpendiculaire demandée. Pour le prouver, considérez que par la construction, les lignes AB & AC sont égales, étant rayons d'un même cercle, & que les lignes EB & EC le sont aussi, par la même raison; ce qui fait voir que la ligne AD est perpendiculaire sur la ligne BC, puisqu'elle n'est pas plus inclinée d'un côté que de l'autre.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

Figure 18.

348. *D'un point* A *donné sur une ligne* BC, *élever une droite* AD *perpendiculaire à cette ligne.*

Pour élever une perpendiculaire sur la ligne BC au point donné A, prenez deux points B & C également éloignés de A;

& de ces points comme centre, décrivez avec la même ouverture de compas deux arcs de cercle qui se coupent en un point comme D ; puis tirez du point D au point A la ligne DA, elle sera perpendiculaire sur BC. Il est aisé d'appercevoir que la ligne AD est perpendiculaire sur BC ; car elle a par construction deux points A & D, également éloignés de deux points B, C, de la ligne BC : donc elle ne penche pas plus d'un côté que de l'autre ; & par conséquent elle est perpendiculaire sur BC.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

349. *Diviser une ligne donnée en deux parties égales.* *Figure 19.*

Pour diviser une ligne, telle que AB, en deux parties égales, décrivez des extrêmités A & B comme centres, avec une même ouverture de compas, deux arcs de cercle qui se coupent aux points C & D ; tirez par ces deux points la ligne CD, qui la coupera en deux également au point E.

Puisque la ligne CD a deux points C, D, également éloignés des extrêmités de la ligne AB, tous ses points seront également éloignés des mêmes extrêmités A & B : donc le point E, qui est un des points de la ligne CD & de la ligne AB, est aussi à égale distance de A & de B : donc il est le milieu de cette ligne. C. Q. F. T.

PROPOSITION IV.

THÉOREME.

350. *D'un même point sur une ligne donnée, on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire.* *Figure 20.*

DÉMONSTRATION.

Si du point C de la ligne AB, on a élevé la ligne CE perpendiculaire à cette ligne, il est visible que si on vouloit en élever une autre, telle que CD, qui passât par le même point C, on ne le pourroit faire, sans que cette ligne ne soit plus inclinée d'un côté que d'un autre, comme ici plus vers A que vers B ; & comme ce seroit agir contre la définition des lignes perpendiculaires, il s'ensuit qu'on n'en peut élever qu'une d'un même point sur une même ligne. D'ailleurs si cette ligne, outre

ce point C, a encore un autre point commun avec la perpendiculaire CE, elle se confond avec elle, puisque deux points déterminent la position d'une ligne droite (art. 13) : donc par un point donné sur une ligne, on ne peut élever qu'une perpendiculaire. C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

Théoreme.

Figure 21. 351. *D'un point* A *donné hors d'une ligne* DE, *on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire* AB.

Demonstration.

Si du point A l'on a mené à la ligne DE la perpendiculaire AB, & que les points D,E soient également éloignés du point A, il est certain que le point B, où la perpendiculaire AB rencontre la ligne DE, sera aussi également éloigné des extrêmités D,E de la même droite. Mais comme on ne peut tirer du point A à la ligne DE aucune ligne, telle que AC, différente de AB, sans que le point C ne soit à droite ou à gauche du milieu B, il s'ensuit que les points D, E ne seront pas également éloignés du point C; & par conséquent que la ligne AC ne sera point perpendiculaire sur DE. C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

Theoreme.

Figure 22. 352. *Une ligne perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener d'un point à une ligne.*

Demonstration.

Si l'on a mené du point D la ligne DC perpendiculaire à la ligne AB, je dis que cette ligne est la plus courte de toutes celles que l'on peut mener du point D à la même ligne AB, comme la ligne DF.

Pour le prouver, soit prolongée la perpendiculaire DC jusqu'en E, au delà de la ligne AB, par rapport au point D, ensorte que CE = CD, & soit tirée la ligne EF, la ligne DE sera certainement plus courte que la ligne DFE : car, selon la définition de la ligne droite, elle est la plus courte de toutes celles que l'on peut mener du point D au point E. D'ailleurs,

puisque la ligne DE est perpendiculaire sur AB, réciproquement la ligne AB est perpendiculaire sur DE, & *par construction* la coupe en deux également; donc le point F de cette ligne est également éloigné des extrêmités de la ligne D, E; & par conséquent FD = FE: ainsi prenant les moitié des lignes DE, CFE, la droite DC sera plus courte que la droite DF. On démontrera la même chose de toute autre ligne différente de DF, prise à droite ou à gauche de la ligne DC: donc cette ligne est la plus courte de toutes celles que l'on peut mener du point D à la ligne AB.

On pourroit présentement regarder ce théorême comme une définition de la ligne perpendiculaire à une autre, puisque cette propriété est une des plus importantes, & de laquelle on peut déduire les autres.

PROPOSITION VII.

THEOREME.

353. *Lorsque deux lignes droites se coupent, elles forment les angles opposés au sommet qui sont égaux.* Figure 24.

DEMONSTRATION.

Soient deux lignes droites quelconques AB, CD, qui se coupent dans un point E, & forment par leur rencontre ou intersection mutuelle, les angles BED, AEC, que l'on appelle *opposés au sommet*, parce qu'ils ont effectivement leur sommet au même point E, l'un d'un côté, l'autre de l'autre, je dis que ces angles sont égaux. Pour le prouver, du point E comme centre, avec un rayon quelconque EB, je décris une portion de circonférence qui coupe les lignes AB, CD aux points A, C, D, B. Cela posé, puisque le centre du cercle est au point d'intersection des deux lignes, il est dans l'une & dans l'autre: donc chaque ligne AB, CD est à un diametre du cercle, & les arcs ADB, DAC seront chacuns égaux à la demi-circonférence; ce qui donne ADB = DAC, & ôtant de part & d'autre l'arc AD commun, on aura l'arc DB = AC; mais ces arcs sont la mesure des angles AEC, DEB: donc aussi les angles opposés au sommet, formés par les droites AB, CD, sont égaux. C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

Figure 25. 354. *Lorsque deux lignes droites* AB, CD, *paralleles entr'elles viennent aboutir sur une troisieme ligne* EF, *elles forment des angles égaux d'un même côté.*

DEMONSTRATION.

Pour démontrer que les deux paralleles AB, CD qui viennent tomber sur la ligne EF, forment sur cette ligne d'un même côté les angles égaux ABF, CDF, considérez que l'angle n'étant autre chose que l'inclinaison d'une ligne sur une autre (art. 337), l'égalité de ces inclinaisons fera l'égalité des angles, & que les lignes AB,CD ne peuvent être paralleles comme on le suppose, qu'elles ne soient également inclinées sur la ligne EF; autrement elles concourroient en quelque point: donc l'angle ABF est égal à l'angle CDE, puisque la ligne AB est autant inclinée sur EF que la ligne CD. C. Q. F. D.

DÉFINITIONS.

Figure 26. 355. Lorsqu'une droite EF coupe deux paralleles AB,CD, elle forme avec elle des angles auxquels on a donné différens noms, selon leurs positions par rapport à ces mêmes lignes.

I.

356. Les angles, tels que BGH, DHG, AGH, CHG, sont appellés angles *internes* ou *intérieurs du même côté.*

II.

357. Les angles BGE, DHF, ou AGE, CHF sont appellés angles *externes* ou *extérieurs du même côté.*

358. Les angles, tels que AGE, DHF, pris, l'un à droite, & l'autre à gauche, au dehors des paralleles AB, CD, sont nommés *alternes externes*, de même que les angles EGB,CHF.

359. Les angles intérieurs, comme AGH, DHG, pris, l'un à droite & l'autre à gauche, de la sécante EF, sont appellés angles *alternes internes*, ainsi que les angles BGH, CHG.

PROPOSITION IX.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

360. *Si deux lignes droites* AB, CD *paralleles entr'elles, sont coupés par une même ligne* EF, *je dis*, 1°. *que les angles alternes internes ou alternes externes sont égaux ; 2°. que les angles internes ou externes pris d'un même côté de la sécante, sont égaux à deux droits.* Figure 26.

DEMONSTRATION.

1°. Il faut démontrer que l'angle externe EGB est égal à son alterne CHF. Puisque les droites AB, CD sont paralleles, elles sont également inclinées d'un même côté sur la sécante EF (art. 354) ; ainsi l'on aura l'angle EGB égal à l'angle GHD, mais GHD est égal à l'angle CHF, qui lui est opposé au sommet (art. 353) : donc EGB = CHF. On démontrera de même que l'angle AGE est égal à son alterne DHF ; que l'angle interne AGH est égal à son alterne GHD, & que l'angle interne BGH est égal à son alterne CHE. C. Q. F. 1°. D.

2°. Les angles internes BGH, DHG pris d'un même côté de la sécante EF, ou les externes BGE, DHF pris d'un même côté, sont ensemble égaux à deux droits. Puisque les droites AB, CD sont paralleles, les angles BGE, DHG qu'elles forment d'un même côté avec la sécante EF sont égaux entr'eux, ainsi que les angles BGH, DHF ; mais (art. 341.) BGE + BGH est égal à deux droits : donc aussi DHG + BGH est égal à deux droits.

On démontrera de même que les angles externes BGE + DHF pris ensemble valent deux droits, ou que les angles internes AGH + CHG, & les externes du même côté AGE, CHF sont ensemble égaux à deux droits. C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION X.

THEOREME.

361. *Supposant toujours une droite* EF *qui coupe deux autres lignes droites* AB, CD, *je dis que ces lignes seront paralleles, si les angles alternes internes, ou alternes externes sont égaux, ou bien, si les angles internes ou externes d'un même côté valent ensemble deux droits.*

DEMONSTRATION.

1°. Par *hypotheſe*, l'angle interne DHG eſt égal à ſon alterne AGH, & (art. 353.) AGH = BGE qui lui eſt oppoſé au ſommet: donc on aura l'angle DHG égal à l'angle BGE; ainſi les droites AB, CD ſont parelleles, puiſqu'elles forment des angles égaux d'un même côté avec la ſécante EF.

On démontrera de même que ces droites ſont paralleles, en ſe ſervant des angles alternes internes égaux BGH, CHG, ou des angles alternes externes égaux EGB, CHF; AGE, DHF. C. Q. F. 1°. D.

2°. Par *hypotheſe*, les angles internes DHG, BGH pris du même côté de la ſécante EF valent enſemble deux droits, & (art. 341.) les angles BGH & BGE de ſuite, pris enſemble, valent auſſi deux droits: donc on aura DHG + BGH = BGH + BGE, & ôtant de chaque membre BGH, on aura DHG = BGE; ce qui montre que les lignes AB, CD font des angles égaux d'un même côté ſur la ſécante EF: donc ces mêmes lignes ſont paralleles. C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

362. *Une ligne* AB *& un point* H *ſur le même plan étant donnés, on propoſe de mener par ce point* H *une ligne parallele à la ligne* AB.

SOLUTION.

Par le point H on menera une droite quelconque HG, qui coupe la droite AB donnée dans un point G; on prendra la meſure de l'angle KGH, en décrivant une portion de cercle du rayon GH; enſuite du point H comme centre avec le même rayon, on décrira un arc de cercle indéfini, ſur lequel on prendra l'arc GM égal à l'arc HK, & la ligne HM ſera la parallele demandée; car puiſque les arcs de cercles ſont égaux, les angles, dont ils ſont la meſure, ſont auſſi égaux, l'angle AGH ſera donc égal à ſon alterne GHM: donc par la propoſition précédente les lignes AB, MH ſont paralleles. C. Q. F. T. & D.

Il faut remarquer que l'on pourra toujours de la même maniere faire avec une ligne donnée, un angle égal à un autre angle donné.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

363. *Trois points* A, D, B *étant donnés sur le même plan, trouver le rayon du cercle qui passe par ces trois points.* *Figure 27.*

SOLUTION.

On menera par ces points les droites AB, DB, sur le milieu de la droite AB, on élevera la perpendiculaire indéfinie EC; sur le milieu de BD, on élevera parcillement la droite FC perpendiculaire à BD, qui coupera la premiere au point C; je dis que ce point sera le centre du cercle qui passe par les points A, B, D.

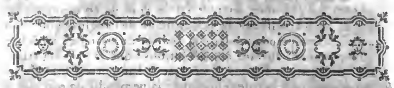
DEMONSTRATION.

Le point C, en tant qu'il appartient à la ligne EC perpendiculaire à AB, est également éloigné des extrémités A & B, puisque cette ligne divise AB en deux également, par construction; de même en tant qu'il appartient à la droite EF perpendiculaire à BD, il est aussi également éloigné des extrémités B, D de la droite BD, par la même raison: donc il est également éloigné des trois points A, B, D: donc il est le centre du cercle qui passe par les mêmes points. C. Q. F. T. & D.

COROLLAIRE.

364. Si les points A, B, D étoient disposés de maniere que les perpendiculaires FC, EC se trouvassent paralleles, le rayon du cercle seroit infini; ainsi l'on peut conclure delà qu'un cercle ne peut pas avoir trois points sur une ligne droite, à moins que la ligne droite sur laquelle se trouvent les trois points ne soit infiniment petite par rapport au rayon, comme il arrive ici, auquel cas cette ligne devient un des côtés du cercle, que l'on peut regarder comme un polygone d'une infinité de côtés. Je dis, que dans notre supposition les trois points sont sur une même ligne droite; car il est visible que les perpendiculaires EC, FC ne peuvent être paralleles qu'autant que les droites AB, BD formeront une même ligne droite.

Fin du troisieme Livre.



NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE QUATRIEME,

Qui traite des propriétés des Triangles & des Parallelogrammes.

DÉFINITIONS.

365. FIGURE *rectiligne* est une surface plane, terminée par des lignes droites, appellées *côtés*; il y a plusieurs sortes de figures, parmi lesquelles il y en a quelques-unes auxquelles on a donné des noms particuliers, selon le nombre de leurs côtés, & leurs dispositions respectives les uns à l'égard des autres. La plus simple de toutes les figures est celle qui est renfermée sous trois côtés, & on l'appelle *triangle*: on nomme *quadrilateres* toutes les figures comprises sous quatre côtés, & *polygones* en général toutes les figures qui ont plus de quatre côtés.

366. On considere le triangle par rapport à ses côtés, ou par rapport à ses angles. Si le triangle a les trois côtés égaux, on l'appelle *équilatéral*, s'il n'a que deux côtés égaux, il est appellé *isoscele*, & *scalene*, s'il a les trois côtés inégaux; ce qui fait trois sortes de triangles.

Le triangle considéré par rapport à ses angles, est encore de trois sortes: on l'appelle *rectangle* s'il a un angle droit, *obtusangle*, ou *amblygone* s'il a un angle obtus, *acutangle* ou *oxygone* s'il a ses trois angles aigus ou moindres qu'un droit; d'où il suit qu'il y a six sortes de triangles en tout.

367. La *base* d'un triangle est le côté de ce triangle, sur lequel on a abaissé une perpendiculaire de l'angle opposé. On appelle cette perpendiculaire la *hauteur* du triangle : ainsi l'on voit aisément, suivant ces définitions, que la base du triangle ACB est la ligne AB, & que sa hauteur est ED. Si les deux angles sur la base sont aigus, la perpendiculaire tombera sur le côté AB ; si l'un des angles sur la même base étoit obtus, la perpendiculaire ou hauteur du triangle tomberoit sur le prolongement de la base. Comme on peut prendre à volonté dans un triangle donné telle ligne que l'on voudra pour base de ce triangle, il est toujours possible de faire tomber la perpendiculaire sur ce côté, que l'on regarde comme base ; au dedans du triangle, les parties dans lesquelles la perpendiculaire CD divise la base AB, sont appellées *segmens* de cette même base. Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est ordinairement regardé comme la base de ce triangle, & on lui a donné le nom d'*hypothenuse*. *Figure 28.*

368. On appelle *trapeze* un quadrilatere qui n'a aucun de ses côtés paralleles, comme G. *Figure 29.*

369. *Trapezoide* est un quadrilatere qui a deux de ses côtés opposés paralleles, comme H. *Figure 30.*

370. *Parallelogramme* est une figure quadrilatere, dont les côtés opposés sont égaux & paralleles, comme EF. *Figure 31.*

371. *Diagonale* est une ligne droite, comme CD, tirée dans un parallelogramme ou un rectangle d'un angle quelconque C à celui D qui lui est opposé.

372. Si par un point quelconque A de la diagonale CD, on mene une ligne BAG parallele à ED, & une autre HI parallele à DF, l'on aura deux parallelogrammes AE, AF, que l'on appellera *complémens* du parallelogramme EF.

PROPOSITION I.

THEOREME.

373. *L'angle extérieur* BDC *d'un triangle* ABD *est égal aux deux intérieurs opposés, & les trois angles du même triangle pris ensemble, valent deux droits.* *Figure 33.*

DEMONSTRATION.

Pour prouver que l'angle extérieur BDC est égal aux deux

intérieurs opposés, en A & en B : par le point D, soit menée la droite DE parallele au côté AB du triangle ABD. Cela posé (art. 360.) l'angle BDE est égal à son alterne ABD, l'angle EDC est égal à l'angle BAD, puisque les lignes AB, DE sont paralleles entr'elles ; donc la somme des angles BDE & EDC, ou l'angle extérieur BDC est égal à la somme des angles intérieurs opposés ABD, BDA. C. Q. F. 1°. D.

2°. Je dis que les trois angles du triangle ABD, pris ensemble, valent deux droits ; car la ligne BD tombant obliquement sur la droite AC, forme deux angles de suite BDA, BDC, qui pris ensemble, valent deux droits. Mais nous venons de voir que l'angle extérieur BDC est égal à la somme des intérieurs BAD + ABD ; on aura donc en leur ajoutant l'angle BDA, BAD + ABD + BDA = BDC + BDA = deux droits. C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE I.

374. Il suit delà que la somme des angles d'un polygone quelconque vaut toujours autant de fois deux angles droits moins quatre, que le polygone a de côtés. Soit le quadrilatere
Figure 29. ABCD d'un point G pris au dedans de ce quadrilatere, comme on voudra, soient menées les lignes GA, GB, GC, GD aux angles A, B, C, D, qui partageront cette figure en quatre triangles, il est évident que les angles autour du point G, & les angles du quadrilatere forment tous les angles des triangles dont il est composé. On aura donc huit angles droits, puisque chaque triangle vaut deux droits, mais la somme des angles autour du point G vaut quatre droits : donc les angles du polygone valent aussi quatre droits ou 8 — 4, c'est-à-dire autant de fois deux droits moins quatre que ce polygone a de côtés.

COROLLAIRE II.

375. Donc la somme des angles extérieurs d'un polygone quelconque ne vaut que quatre droits : car tous les angles extérieurs sont supplémens des angles intérieurs ; ainsi la somme des uns & des autres vaut deux fois autant deux angles droits que le polygone a de côtés, & les mêmes angles intérieurs avec les angles autour du point G font la même somme : donc les angles extérieurs sont égaux à la somme des angles autour du

point G, c'est-à-dire à quatre droits; ce seroit la même démonstration pour tout autre polygone.

COROLLAIRE III.

376. Il suit de cette proposition, que connoissant deux angles dans un triangle, on pourra connoître le troisiéme, en soustrayant la somme des deux angles connus de la valeur de deux angles droits, & la différence sera la valeur de l'angle inconnu. Ainsi connoissant dans le triangle EDF l'angle E de 50 degrés, & l'angle D de 70, pour avoir la valeur de l'angle F, on ajoutera ensemble 50 & 70, qui font 120, qu'il faut soustraire de 180 degrés: la différence 60 sera la valeur de l'angle E que l'on cherchoit. *Figure 32.*

COROLLAIRE IV.

377. Il suit encore delà, que si deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, le troisiéme du premier triangle sera égal au troisieme du second: car si l'angle A est égal à l'angle D, l'angle C à l'angle F, il est certain qu'il manquera autant de degrés à la somme des deux angles A & C pour valoir deux droits, qu'à la somme des deux angles D & F pour valoir aussi deux droits, & ces différences égales ne sont autre chose chacune, que la valeur du troisieme angle; d'où il suit que l'angle B sera égal à l'angle E.

DEFINITION.

378. Deux triangles sont dits être *parfaitement égaux*, lorsqu'ils ont les trois angles & les trois côtés égaux chacun à chacun; & *simplement égaux*, lorsqu'ils ont une égale superficie comprise sous des côtés inégaux.

PROPOSITION II.

THEOREME.

379. *Deux triangles sont parfaitement égaux, lorsque les trois côtés du premier sont égaux aux trois côtés du second.*

DEMONSTRATION.

Pour démontrer que le triangle G, dont on suppose les côtés AB, BC, AC, égaux aux côtés DE, EF, DF du triangle H, est entiérement égal à ce dernier triangle, il n'y a qu'à faire voir *Figure 34.*

que l'égalité des côtés emporte nécessairement l'égalité des angles opposés aux côtés égaux. Si l'angle D n'est pas égal à son correspondant A, il ne peut être que plus petit ou plus grand: or cela ne peut arriver sans impliquer contradiction. Que l'angle D, s'il est possible, soit plus petit que son correspondant A; soit fait l'angle LAC égal à l'angle D, & sur le côté indéfini AL du nouvel angle, soit prise la partie AL = AB ou DE, il est clair que le côté CL du triangle LAC sera dans ce cas plus petit que le côté CB: car puisque l'angle est plus petit, les points C, L, pris à égale distance du sommet A, que les points C, B, doivent être plus près l'un de l'autre, que dans une plus grande ouverture d'angle, telle que CAB: donc au triangle CAL le côté CL sera plus petit que le côté CB. On ne peut donc pas supposer dans le triangle DEF l'angle D plus petit que l'angle en A, sans supposer en même-tems le côté EF plus petit que le côté AB; ce qui est contre l'hypothese: de même on ne pourroit pas supposer l'angle D plus grand que l'angle A sans une pareille contradiction. L'angle D est donc égal à l'angle A. On fera voir de même que l'angle F est égal à l'angle C; & l'angle E égal à l'angle B: donc ces triangles sont parfaitement égaux, puisqu'ils ont, outre les côtés égaux, les angles compris entre ces côtés aussi égaux chacun à chacun. C. Q. F. D.

380. On verra par la suite que les trois angles d'un triangle peuvent être égaux chacun à chacun aux trois angles d'un autre triangle, sans qu'il y ait aucune égalité entre ces deux triangles: ainsi de ce que l'égalité des côtés emporte avec elle l'égalité des angles, il ne faut pas conclure que l'égalité des angles emporte celle des côtés. De plus, il est bon d'avertir que le triangle est le seul de toutes les figures qui ait cette propriété. Par exemple, deux quadrilateres peuvent avoir les côtés égaux chacun à chacun, sans avoir leurs angles égaux ou leurs superficies; & par conséquent sans être parfaitement égaux.

PROPOSITION III.

Theoreme.

Figure 34. 381. *Deux triangles* G, H *sont égaux en tout, lorsqu'ils ont un angle égal* B, E *compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*

Demonstration.

DEMONSTRATION.

Pour démontrer que le triangle G est égal au triangle H, si le côté BA est égal au côté DE, le côté BC égal au côté EF, & l'angle B égal à l'angle E, imaginons que le côté DE est appliqué sur le côté AB: comme ces deux côtés sont égaux, par hypothese, en mettant le point E sur le point B, le point D tombera sur le point A; & parce que l'angle E est égal à l'angle B, le côté EF tombera sur le côté BC, & le point F sur le point C, puisque BC = EF: donc le côté DF tombera sur le côté AC; ce qui montre que les deux triangles conviennent parfaitement: donc ils sont parfaitement égaux. C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

382. *Deux triangles* ABC, DEF *sont parfaitement égaux, lorsqu'ils ont un côté* AC *égal au côté* DF, *avec les angles en* A *& en* C *égaux aux angles en* D *& en* F *chacun à chacun.*

DEMONSTRATION.

Si le côté AC du triangle G est égal au côté DF du triangle H, & que l'angle A soit égal à l'angle D, l'angle C à l'angle F, il est aisé de voir que ces deux triangles sont parfaitement égaux: car si l'on imagine le côté AC posé sur le côté DF, comme ces côtés sont égaux, par hypothese, en mettant le point A sur le point D, le point C tombera sur le point F; d'ailleurs à cause de l'égalité des angles en A & en C, à ceux en D & en F, le côté AB tombera sur le côté DE, & le côté CB sur le côté FE: donc ces lignes se couperont au même point E: ainsi les triangles G, H conviendront en tout, & seront parfaitement égaux. C. Q. F. D. *Figure 34.*

PROPOSITION V.

THEOREME.

383. *Deux parallelogrammes* ABDC, EBDF *sont égaux, lorsqu'ils ont une base commune, & sont compris entre les mêmes paralleles.* *Figure 35.*

DEMONSTRATION.

Il est aisé de voir que les triangles ABE, CDF sont égaux

Bb

en tout : car puisque ABDC est un parallelogramme, le côté AB du premier est égal au côté CD du second ; par la même raison, puisque EBDF est aussi un parallelogramme, le côté BE du premier triangle est égal au côté DF du second : enfin le troisieme côté AE est égal au troisieme côté CF ; car AC = BD, & BD = EF, puisque ce sont des côtés opposés des parallelogrammes AD, BF : donc AC = EF, & ajoutant à chacun la ligne CE, on a AE = CF ; d'où il suit que ces triangles sont parfaitement égaux (art. 378) : donc en leur ôtant la partie commune CGE, on aura le trapeze ABGC égal au trapeze EGDF ; & en leur ajoutant à chacun le triangle BDG, on aura le parallelogramme ABDC égal au parallelogramme EBDF, compris entre les mêmes paralleles. C. Q. F. D.

Corollaire.

384. Il suit de la proposition précédente, que les parallelogrammes qui ont des bases égales, & qui sont renfermés entre les mêmes paralleles, sont égaux : car pour prouver que le parallelogramme AD est égal au parallelogramme GF ; si les bases CD & EF sont égales, il n'y a qu'à tirer les lignes CG & DH, qui formeront le parallelogramme CH, & considérer que ce parallelogramme est égal au parallelogramme AD, parce qu'ils ont la même base CD, & qu'il est aussi égal au parallelogramme GF, parce qu'ils ont la même base GH ; d'où il suit évidemment que les parallelogrammes AD, GF sont égaux, puisque chacun d'eux est égal à un même troisieme.

Figure 36.

PROPOSITION VI.

Theoreme.

Figure 37. 385. *Deux triangles* BCD, BFD *sont égaux, lorsqu'ayant une base commune* BD *ils sont compris entre les mêmes paralleles* BD, CF.

Demonstration.

Par le point D, soit menée la ligne DA parallele au côté CB, & la ligne DE parallele au côté BF, on aura deux parallelogrammes AB, BE, qui seront égaux entr'eux, puisqu'ils ont même base, & qu'ils sont compris entre paralleles ; d'ailleurs ces parallelogrammes sont doubles des triangles

BCD, BFD, puisque les triangles CAD, DEF ont les côtés égaux chacun à chacun à ceux des triangles CBD, DBF : donc les triangles BCD, BFD ou les moitiés des parallelogrammes AB, BE sont égaux entr'eux. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

386. Il suit de cette proposition, que si un parallelogramme AD, & un triangle AEC, renfermés entre les mêmes paralleles, ont la même base AC, le triangle est la moitié du parallelogramme, parce que le triangle BAC qui lui est égal, est aussi la moitié du même parallelogramme. *Figure 38.*

COROLLAIRE II.

387. Comme le triangle BAC est égal au triangle AEC, il est constant qu'ayant la même base, ils doivent avoir la même hauteur; & comme la hauteur du premier est la perpendiculaire BA, la hauteur du second sera aussi la même perpendiculaire BA, ou sa parallele EF, abaissée de l'angle E sur la base AC prolongée; ce qui fait voir que la hauteur d'un triangle incliné est la perpendiculaire abaissée de son sommet sur le prolongement de sa base. Ce sera la même chose pour les parallelogrammes inclinés.

COROLLAIRE III.

388. Un triangle ABC étant la moitié d'un parallelogramme AG, il sera égal au parallelogramme ADEC, dont la hauteur HF est supposée la moitié de la perpendiculaire BF, qui sert de hauteur commune au triangle & au parallelogramme. Or, comme pour trouver la superficie du parallelogramme ADEC, il faut multiplier la base AC par sa hauteur HF, moitié de la perpendiculaire BF; il s'ensuit qu'en *multipliant la base d'un triangle par la moitié de la perpendiculaire, qui en mesure la hauteur, ou, ce qui revient au même, la hauteur entiere par la moitié de la base, le produit donnera la superficie du triangle.* *Figure 39.*

COROLLAIRE IV.

389. Si l'on considere qu'un triangle ABC est composé d'une infinité de lignes paralleles, qui en sont les élémens, & que toutes ces lignes étant également éloignées se surpassent de la même quantité, on verra qu'elles composent une

progression arithmétique d'une quantité infinie de termes; dont le premier est o, & dont la somme est exprimée par la perpendiculaire BD. Or comme on trouvera la valeur du triangle, ou autrement la somme de toutes ces paralleles, en multipliant la plus grande, qui est la base, par la moitié de la grandeur qui exprime le nombre des termes, il s'ensuit que l'on peut tirer de ce raisonnement le principe suivant : *Qui est que la somme des termes des quantités infinies en progression arithmétique, à commencer par o, est égale au produit du plus grand terme, par la moitié de la grandeur qui exprime la quantité de ces termes.* C'est ce que nous avons déja démontré directement (art. 238).

Il faut s'attacher à bien comprendre ce corollaire, parce que nous en servirons utilement dans la suite.

PROPOSITION VII.

THÉOREME.

Figure 31. 390. *Les complémens* AE, AF *d'un parallelogramme* EF *sont égaux entr'eux.*

DEMONSTRATION.

Pour prouver que les complémens AE & AF du parallelogramme EF sont égaux, considérez que le parallelogramme EF est divisé en deux triangles égaux DEC, DFC, de même que les parallelogrammes BI, GH, formés sur les parties AD, AC de la diagonale CD : donc si l'on retranche du triangle DEC les triangles ADH, ABC, & de son égal DCF les triangles égaux correspondans ADG, AIC, il restera d'une part le complément AE égal au complément AF. C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII.

THÉOREME.

391. *Les parallelogrammes, qui ont même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases.*

DEMONSTRATION.

Figure 41. Je dis que si les parallelogrammes EF ont même hauteur, ou, ce qui revient au même, sont compris entre paralleles, ils seront entr'eux dans la raison de leurs bases. Pour le

prouver, soit a la base du premier, b celle du second, & c la hauteur commune, la surface du premier sera représentée par ac, & celle du second par bc: or il est évident que l'on a $ac : bc :: a : b$, puisque $abc = abc$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

392. Il suit de cette proposition, que si deux triangles ABC, CDB, ont même hauteur, ou bien leur sommet au même point, ils seront entr'eux dans la raison de leurs bases AC CD: car ces triangles étant moitié des parallelogrammes correspondans de même base & de même hauteur, il en sera des moitiés comme des tous. *Figure 42.*

PROPOSITION IX.

THÉOREME.

393. *Si l'on coupe les deux côtés* AB, AC *d'un triangle* BAC *par une ligne* DE, *parallele à la base* BC *de ce triangle, je dis que les côtés* AB, AC *seront coupés proportionnellement, ou, ce ce qui est la même chose, que l'on aura cette proportion* AD : DB :: AE : EC. *Figure 43.*

DEMONSTRATION.

Pour démontrer cette proposition, soient tirées les lignes BE, DC. Cela posé, il est évident que les triangles DBE, DCE sont égaux, puisqu'ils ont même base DE, & qu'ils sont compris entre paralleles. Mais les triangles ADE & DEB ayant même sommet, sont entr'eux comme leurs bases (art. 392); ainsi que le même triangle ADE, & le triangle CDE qui ont aussi même sommet en D.
On aura donc AD : DB :: ADE:DEB ; & parce que DEB = DCE . . . ADE:DEB::ADE:DCE :: AE : EC; & comme la suite des rapports égaux n'est pas interrompue, on en concluera que AD : DB :: AE : EC, c'est-à-dire que les côtés AB, AC sont coupés proportionnellement. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

394. Puisque AD : DB :: AE : EC, on aura *componendo* AD : AD + DB :: AE : AE + EC, ou en réduisant AD : AB :: AE : AC, c'est-à-dire que les côtés AB, AC sont proportionnels à leurs parties AD, AE.

COROLLAIRE II.

395. Il suit delà que deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés réciproques, c'est-à-dire que les côtés de l'un sont les extrêmes d'une proportion, dont les côtés de l'autre sont les moyens : car si aux triangles égaux DBE, DCE, on ajoute le même triangle ADE, on aura deux nouveaux triangles égaux en superficie ADC, AEB, qui ont un angle en A commun, & par conséquent égal ; d'ailleurs, par le corollaire précédent, on a AD : AB :: AE : AC, où l'on voit que les côtés AD, AC du triangle ADC sont les extrêmes, tandis que les côtés AB, AE du triangle BAE sont les moyens. Comme les parallelogrammes sont doubles des triangles, il suit encore des deux articles précédens, que deux parallelogrammes sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés réciproques.

COROLLAIRE III.

396. Si par le point E on mene la ligne EF parallele au côté AB, les côtés AC, CB seront aussi coupés en parties proportionnelles, & l'on aura AC : CE :: BC : CF, & AE : AC :: BF : BC; mais à cause des paralleles BD, EF; BF est égale à DE : on aura donc AE : AC :: DE : BC, c'est-à-dire que les parties AC, AE sont proportionnelles au côté BC, & à la sécante DE.

DEFINITION.

397. Deux triangles, ou en général deux figures quelconques, sont dites être *semblables*, lorsque tous les angles de l'une sont égaux aux angles de l'autre, & que les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels. Par exemple, les deux triangles
Figure 44. MN seront semblables, si l'on a l'angle A égal à l'angle D, l'angle C égal à l'angle F, l'angle B égal à l'angle E; & les côtés AB, BC, AC proportionnels aux côtés DE, EF, DF.

REMARQUE.

398. Il faut bien remarquer que le triangle est le seul de toutes les figures qui puisse être semblable à un autre, ayant ses trois angles égaux chacun à chacun, ou ses côtés proportionnels; ensorte que l'une de ces conditions emporte l'autre, au lieu que dans une figure, tous les côtés peuvent être pro-

portionnels à ceux d'une autre, ſans que les angles oppoſés à ces côtés ſoient égaux, comme on le verra par la ſuite.

PROPOSITION X.

THEOREME.

399. *Deux triangles* ABC, DEF *ſont ſemblables, lorſque les trois côtés* AB, BC, AC *du premier ſont proportionnels aux trois côtés* DE, EF, DF *du ſecond.*

DEMONSTRATION.

Pour démontrer cette propoſition, il n'y a qu'à faire voir que les angles A, B, C du premier triangle ſont égaux aux angles D, E, F du ſecond, oppoſés aux côtés proportionnels à ceux du triangle ABC : pour cela, ſur le côté AB proportionnel au côté DE du triangle DEF, ſoit priſe la ligne BG égale à DE, & ſoit menée par ce point la parallele GK au côté AC, on aura (art. 393.) $AB : BG :: BC : BK = \frac{BG \times BC}{AB} = \frac{DE \times BC}{AB}$, puiſque par conſtruction $DE = BG$: mais par hypotheſe, puiſque les trois côtés du premier triangle ſont proportionnels aux trois côtés du ſecond, $AB : DE :: BC : EF = \frac{DE \times BC}{AB}$; d'où il ſuit que le triangle BGK a le côté BK égal au côté EF du triangle DEF : on démontrera de même, que ce même triangle BGK a auſſi le côté GK égal au côté DF du triangle DEF : donc ces triangles ſont parfaitement égaux, puiſqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun (art. 378) : donc les angles en D & en F ſont égaux aux angles en G & en K, ou aux angles en A & en C, à cauſe des paralleles : donc le triangle DEF eſt ſemblable au triangle ABC. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

400. Réciproquement ſi deux triangles ſont ſemblables, ils auront les côtés proportionnels ; car s'ils étoient ſemblables ſans avoir les côtés proportionnels, la propoſition que nous venons de démontrer ſeroit fauſſe ; ce qui ne peut arriver.

PROPOSITION XI.

THÉOREME.

401. *Deux triangles* ABC, DEF *sont semblables, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels.*

DEMONSTRATION.

Supposons que l'angle E du triangle DEF est égal à l'angle B du triangle ABC, & que l'on a AB : BC :: DE : EF, il faut démontrer que les angles en A & en C seront égaux aux angles en D & en F, & que l'on aura AB : AC :: DE : DF. Soit pris sur le côté AB la ligne BG égale à DE, & la ligne BK égale à EF, à cause de l'angle en B, supposé égal à l'angle en E, le triangle BGK sera parfaitement égal au triangle EDF (art. 381) : donc GK est égal à DF, & l'angle D est égal à l'angle G, de même que l'angle K à l'angle F. De plus les côtés BA, BC sont coupés proportionnellement par la ligne GK : donc la ligne GK est parallele à la base AC, & le triangle BGK est semblable au triangle BAC : donc on aura AB : BG :: AC : GK, ou AB : DE :: AC : DF, ou *alternando* AB : AC :: DE : DF. D'où il suit que les angles du triangle DEF sont égaux aux angles du triangle ABC ; d'ailleurs les côtés opposés à ces angles sont proportionnels à ceux qui sont opposés aux mêmes angles dans le triangle ABC : donc le triangle DEF est semblable au triangle ABC. C.Q.F.D.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

402. *Deux triangles* ABC, DEF *sont semblables, lorsque deux angles de l'un sont égaux aux deux angles de l'autre.*

DEMONSTRATION.

Figure 44 & 45. Supposons que l'angle A est égal à l'angle D, & que l'angle C est égal à l'angle F. Sur le côté AC prolongé, on prendra une partie CD = DF, & par le point C, on menera la droite CE parallele au côté AB, & par le point D, la droite DE parallele au côté CB. Le triangle CED sera entiérement égal au triangle DEF (art. 352), puisque ces triangles ont deux angles égaux chacun à chacun sur un même côté : reste à faire voir

voir que le triangle CED est semblable au triangle ABC. Pour cela soient prolongées les lignes AB, DE, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en F; les côtés AD, AF seront coupés proportionnellement par la ligne BC, & l'on aura AB : AC :: BF : CD, ou en mettant à la place de BF, CE = BF, à cause du parallelogramme CF, AB : AC :: CE : CD : donc le triangle CDE ou son égal DEF a les côtés proportionnels à ceux du triangle ABC, & lui est par conséquent semblable. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

403. Il suit de tout ce que nous venons de voir, que lorsqu'on aura des triangles semblables, on pourra toujours faire une proportion par la comparaison des côtés du premier aux côtés du second: Par exemple, si les triangles, M, N sont semblables, & que l'on représente les côtés AB, AC du premier par a & par b, & les côtés correspondans du triangle N, DE, DF par c & d, on aura $a : b :: c : d$; donc $ad = bc$: ce qui montre qu'avec deux côtés, pris dans deux triangles semblables, & deux autres pris dans les mêmes triangles, on peut toujours faire des rectangles égaux, pourvu que les côtés soient opposés à des angles égaux. *Figure 44.*

COROLLAIRE II.

404. Il suit encore que si l'on a deux triangles semblables, dont on connoît deux côtés dans l'un, & un côté dans l'autre, qu'on pourra trouver ce second côté: car supposant, par exemple, que dans les triangles M, N les côtés a, b soient de 12 pieds, & 8 pieds, & le côté c de 9 pieds, & que l'on veuille connoître le côté d, il n'y aura qu'à faire une Regle de Trois, & dire $12 : 8 :: 9 : x = \frac{9 \times 8}{12} = 6$, qui sera la valeur du côté d, & ainsi des autres.

DÉFINITION.

405. On appelle dans des triangles semblables, & dans toutes les autres figures, côtés *homologues* ou *correspondans*, ceux qui sont opposés à des angles égaux dans l'un & dans l'autre triangles; & l'on ne peut former de proportion qu'avec des côtés homologues, soit dans les triangles, soit dans les autres figures.

AVERTISSEMENT.

Les propositions précédentes sont les plus importantes de la Géométrie, dont elles sont la base & le fondement; c'est pourquoi il faut s'appliquer à les bien comprendre, si l'on veut entendre les suivantes, & faire quelque progrès dans toutes les parties des Mathématiques qui ne peuvent se passer de ces propositions.

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

Figure 46. 406. *Si de l'angle droit* B *d'un triangle rectangle* ABC, *on abaisse une perpendiculaire* BD *sur l'hypoténuse* AC, *elle divisera le même triangle en deux autres triangles* ABD, BDC, *qui lui seront semblables, & par conséquent semblables entr'eux.*

DEMONSTRATION.

Pour démontrer que la perpendiculaire BD divise le triangle ABC en deux autres semblables ABD, BDC; considérez que chacun de ces triangles a un angle commun avec le grand triangle & un angle droit. L'angle A pour le triangle ABD & le triangle ABC, l'angle C au triangle BDC & au triangle ABC: donc ils sont chacun semblables au grand triang le, & semblables entr'eux. C. Q. F. D.

PROPOSITION XIV.

THÉOREME.

Figure 47. 407. *Dans un triangle rectangle* ABC, *le quarré de l'hypoténuse* AC *est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés.*

DÉMONSTRATION.

Soit abaissée de l'angle droit la perpendiculaire BD sur la base AC, soit nommé AC, a, BA, b, BB, c, AD, x; DC sera $a - x$. Cela posé, nous ferons voir aisément que AC^2 (aa) $= AB^2 + BC^2$ ($bb + cc$).

Comme la perpendiculaire BD divise le triangle rectangle en deux autres qui lui sont semblables, ADB, BDC, les côtés homologues de ces triangles seront proportionnels à ceux du grand triangle ABC, & donneront AC (a) : AB (b) :: AB (b) : AD (x), & AC (a) : CB (c) :: CB (c) : DC ($a - x$);

d'où l'on tire ces équations $ax=bb$, & $cc=aa-ax$, en prenant les produits des extrêmes & des moyens. En ajoutant ensemble ces deux équations, on aura $ax+aa-ax=bb+cc$, ou en réduisant $aa=bb+cc$, ou enfin $AC^2=AB^2+BC^2$. C. Q. F. D.

Si assuré que l'on soit d'une proposition, l'esprit, ou plutôt la raison qui veut toujours être éclairée, a encore quelque chose à désirer, lorsqu'elle ne joint pas la derniere évidence à la certitude entiere, & cette évidence est d'autant plus à désirer, que les propositions sont plus importantes.

Comme celle-ci est une des plus belles propositions qu'il y ait, tous les grands Géometres se sont appliqués à en donner des démonstrations palpables, parmi lesquelles je regarde la suivante comme une des plus belles & des plus claires que l'on puisse donner, attendu qu'elle ne suppose pas d'autre principe que celui-ci, que deux triangles sont égaux en tout, lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

SECONDE DEMONSTRATION.

Soit prolongé le côté AB en K, ensorte que l'on ait BK = BC; soit de même prolongé le côté BC, ensorte que BL = AB. Soient achevés les quarrés sur les côtés BC, AB, dont les côtés IK, HL, prolongés autant qu'il le faut, se rencontrent en G : enfin soit menée la droite GB, & la perpendiculaire à la base BD, & construit le quarré ACEF sur l'hypoténuse AC.

Il est aisé de voir que la droite BG est parallele à la droite CE : car le triangle GBK est égal au triangle ABC, puisque GK = BL = AB, que BK = BC, & que l'angle en K est droit : donc on aura GB = AC = CE : donc l'angle GBK est égal à l'angle BCA, ou à l'angle ABD du triangle ABD semblable au grand triangle, c'est-à-dire que l'angle GBK est égal à son opposé ou sommet : donc les lignes GB, BD ne sont qu'une seule ligne droite, & cette ligne GBD est parallele à CE, puisque chacune est perpendiculaire sur le côté AC. GBCE sera donc un parallélogramme, ainsi que ABGF, puisque les lignes BC, GI sont paralleles aussi-bien que les lignes BK, GF, & les droites AF, GD, CE. De plus ces parallélogrammes ont même base que les quarrés BI, BH, & sont compris entre les mêmes paralleles : donc ils leur sont

égaux (art. 383): reste à faire voir que la somme de ces parallélogrammes ou la figure ABCEGF est égale au quarré CF fait sur AE; ce qu'il est aisé de reconnoître: car le côté FE = AC, le côté GE = BC, & le côté GF = AB: donc en ôtant le triangle FGE de la figure ABCEGF, & mettant à sa place le triangle ABC, son égal, on aura la somme des parallélogrammes CG, BF, ou des quarrés BI, BH égale au quarré de l'hypoténuse AC. C. Q. F. D.

TROISIEME DÉMONSTRATION.

Soit prolongée la perpendiculaire BD, jusqu'à ce qu'elle rencontre en O le côté NM du quarré fait sur l'hypoténuse, qu'elle divisera en deux rectangles DM, DN; du point B, sommet de l'angle droit, soient menées aux points M, N les droites BM, BN, & par les points A, C aux points I, H les lignes AI, CH, on aura quatre triangles ACI, BCM; CAH, BAN, qui seront parfaitement égaux deux à deux: car l'angle ACI du premier est égal à l'angle BCM du second, puisque chacun est la somme d'un angle droit & de l'angle commun BCD. De plus, le côté CI du premier est égal au côté BC du second, puisque ce sont les côtés d'un même quarré, & le côté AC du triangle ACI est, par la même raison, égal au côté CM: donc ces triangles sont parfaitement égaux, puisqu'ils ont un angle égal, compris entre côtés égaux chacun à chacun (art. 381): donc les rectangles ADNO, DCMO, dont ces triangles sont les moitiés, seront aussi égaux. Or il est visible que le triangle ACI est moitié du quarré fait sur BC, puisqu'ils ont même base CI, & qu'ils sont compris entre paralleles AK, CI. Il est encore évident que le triangle BCM est moitié du rectangle DM, puisqu'ils ont même base BM, & sont compris entre les mêmes paralleles BM, BDO: donc le quarré fait sur BC est égal au rectangle DM. On démontrera précisément de la même maniere que le quarré fait sur AB est égal au rectangle DN; mais la somme des rectangles DM, DN est égal au quarré construit sur l'hypoténuse: donc la somme des quarrés faits sur les deux côtés AB, BC est égale au quarré de l'hypoténuse AC. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

408. Cette proposition est la fameuse 47[e] du premier Livre

d'*Euclide*, pour la découverte de laquelle *Pythagore* offrit aux Muſes un ſacrifice de cent bœufs, en reconnoiſſance de la faveur qu'il croyoit avoir reçu d'elles. Pour être prévenu de l'uſage que nous en ferons dans la ſuite, il faut remarquer que connoiſſant les quarrés de deux côtés d'un triangle rectangle, on pourra toujours connoître celui du troiſieme : car ſi l'on connoît AC^2 (aa), & AB^2 (bb), on voit qu'on aura toujours $AC^2 - AB^2$ ($aa - bb$) $= BC^2$ (cc), qui donne la valeur du côté BC : on voit de plus, que connoiſſant les deux côtés qui comprennent l'angle droit d'un triangle rectangle, on pourra connoître l'hypoténuſe, en quarrant ces deux côtés, & extrayant la racine des deux membres de l'équation $aa = bb + cc$, on aura $a = \sqrt{bb + cc}$; & ſi connoiſſant l'hypoténuſe avec un autre côté, on vouloit trouver le troiſieme, on n'auroit qu'à ſouſtraire du quarré de l'hypoténuſe le quarré du ſecond côté que l'on connoît ; & la racine quarrée de la différence, donnera la valeur du côté qu'on cherche. Ainſi connoiſſant les deux côtés BC & AC, on voit que $AB = \sqrt{aa - cc}$.

COROLLAIRE II.

409. Il ſuit de cette propoſition, que la perpendiculaire tirée de l'angle droit d'un triangle rectangle ſur l'hypoténuſe, eſt moyenne proportionnelle entre les parties de l'hypothenuſe : car comme cette perpendiculaire diviſe le triangle ABC en deux autres triangles ſemblables ADB, BDC, en les comparant enſemble, on aura AD : DB :: DB : DC. Ainſi connoiſſant la baſe d'un triangle rectangle ABC, & les deux ſegmens AD, DC de cette baſe, on pourra connoître les autres côtés de ce triangle ; il n'y aura qu'à chercher une moyenne proportionnelle entre les ſegmens donnés, ajouter le quarré de cette ligne au quarré de chaque ſegment, & extraire les racines des deux ſommes qui ſeront les deux côtés demandés.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

410. *Dans un triangle obtus-angle* ABC, *le quarré du côté* AC, *oppoſé à l'angle obtus, eſt égal au quarré des deux autres côtés, plus à deux rectangles compris ſous le côté* BC *prolongé juſ-* *Figure* 48.

qu'à la rencontre de la perpendiculaire abaissée de l'angle A, *& la partie* BD *ou le prolongement du même côté* BD; *c'est-à-dire que l'on aura* $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BD$.

DÉMONSTRATION.

Soit fait $AC = a$, $AB = c$, $BC = b$, $BD = x$, $AD = d$; il faut démontrer que $aa = cc + bb + 2bx$, ou que $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BD$. Le triangle rectangle ADC donne $AC^2 = AD^2 + DC^2$, ou $aa = dd + bb + 2bx + xx$: car $DC = DB + BC = b + x$; & le triangle rectangle ADB donne $AB^2 = AD^2 + DB^2$, ou $cc = dd + xx$; si l'on retranche les deux membres de cette équation des deux membres de la premiere, on aura $aa - cc = dd + bb + 2bx + xx - dd - xx$, & réduisant le dernier membre $aa - cc = bb + 2bx$, & faisant passer cc de l'autre côté du signe d'égalité, $aa = bb + cc + 2bx$, ou $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BD$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

411. Si l'on avoit un triangle ABC, dont on connût les trois côtés, on pourroit par cette proposition trouver la perpendiculaire AD, qui détermine la hauteur du triangle: car comme on a $aa = cc + bb + 2bx$, si l'on fait passer $cc + bb$ du second membre dans le premier, il viendra $aa - cc - bb = 2bx$, qui étant divisé par $2b$, donne la valeur de x, ou $\frac{aa - cc - bb}{2b} = x$, qui fait voir qu'on trouvera la valeur de la ligne DB, en soustrayant du quarré du côté AC opposé à l'angle obtus; les quarrés des côtés AB & BC, & en divisant le reste par le double du côté BC. Mais dans le triangle rectangle ADB, on connoît le côté AB par l'hypothese, on connoît le côté BD par le présent corollaire: donc on pourra connoître l'autre côté AD, ou la perpendiculaire qui mesure la hauteur du triangle, & l'on aura $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$, ou $d = \sqrt{cc - xx}$. Si le triangle donné étoit rectangle, la perpendiculaire AD se confondroit avec le côté AB, & l'on auroit $\frac{aa - cc - bb}{2b} = 0 = BD$.

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

412. *Dans tout triangle* ABC, *le quarré d'un côté* AB *opposé à un angle aigu, est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés, moins deux rectangles égaux, compris sous le côté* AC, *opposé au plus grand angle, sur lequel on a abaissé une perpendiculaire* BD; *& la partie* CD *du même côté* AC, *comprise entre l'angle* C, *auquel ce côté* AB *est opposé, & la perpendiculaire* BD; *c'est-à-dire que l'on aura* $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times DC$. Figure 49.

DEMONSTRATION.

Soit fait $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, $BD = d$, $DC = x$, AD sera $c - x$. Cela posé, le triangle rectangle BAD donne $AB^2 = BD^2 + AD^2$, ou analytiquement $aa = dd + cc - 2cx + xx$; & par la même raison, le triangle rectangle BDC donne $BC^2 = BD^2 + DC^2$, ou en termes analytiques, $bb = dd + xx$. Si l'on retranche les termes de cette derniere égalité des termes de la précédente, on aura $aa - bb = dd + cc - 2cx + xx - dd - xx = cc - 2cx$; en effaçant ce qui se détruit, & faisant passer dans l'autre membre le terme $-bb$, on aura $aa = bb + cc - 2cx$, ou $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times DC$. C. Q. F. D.

On démontreroit de la même maniere que l'on auroit $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \times AD$.

COROLLAIRE.

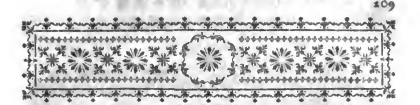
413. Puisque l'on a $aa = bb + cc - 2cx$, on aura, en faisant passer $-2cx$ dans le premier membre, & aa dans le second, $2cx = bb + cc - aa$, d'où l'on tire $x = \frac{bb + cc - aa}{2c}$. Ce qui fait voir que pour avoir la valeur du segment DC, il faut de la somme des quarrés des côtés AC, BC, ôter le quarré du côté AB opposé à l'angle C, & diviser le reste par $2c$, ou deux fois le côté sur lequel on a abaissé la perpendiculaire BD. D'où il suit que par la connoissance des trois côtés d'un triangle quelconque, on peut toujours trouver la surface; car la

surface d'un triangle est égal au produit de sa base par la perpendiculaire, & nous voyons par le présent corollaire, que l'on peut toujours avoir la perpendiculaire BD. Pour cela, il n'y a qu'à ôter le quarré du segment DC du quarré de BC, & prendre la racine quarrée de la différence, que l'on multipliera par le côté AC, pour avoir la surface du triangle ABC.

Fin du quatrieme Livre.



NOUVEAU



NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE CINQUIEME,

Où l'on traite des propriétés du Cercle.

DÉFINITIONS.

I.

414. L'ON nomme *cercles concentriques*, ceux qui ayant été décrits du même centre, ont leurs circonférences paralleles : tels sont les deux cercles qui ont pour centre commun le point A. Planche III. *Figure* 50.

II.

415. Les *cercles excentriques*, sont ceux qui ayant été décrits par des centres differens, n'ont pas leurs circonférences paralleles, comme B & C. *Figure* 51.

III.

416. L'on nomme *couronne*, l'espace renfermé entre les circonférences de deux cercles concentriques, comme est l'espace BB, terminé par les circonférences E & F. *Figure* 50.

IV.

417. Le *segment de cercle* est la partie de la surface d'un cercle, terminée par une ligne droite, & par une partie de sa circonférence, comme ABC. Si la ligne droite AC ne *Figure* 52.

passe pas par le centre, le cercle sera divisé en deux segmens inégaux.

V.

Figure 53. 418. Le *secteur de cercle* est une partie de sa surface, terminée par deux rayons DC, DE, & par une partie de sa circonférence, comme CDE.

VI.

419. *L'arc de cercle* est une partie de la circonférence, plus grande ou plus petite que la demi-circonférence.

VII.

Figure 52. 420. On nomme *cordes* toutes les lignes droites, comme AC, terminées par la circonférence d'un cercle.

VIII.

Figure 54. 421. Quand une ligne touche la circonférence d'un cercle sans le couper, cette ligne est nommée tangente : ainsi la ligne AB, qui ne touche la circonférence du cercle D qu'au point *d*, est dite tangente à ce cercle au point *d*.

IX.

422. Si une ligne rencontre la circonférence d'un cercle, de maniere qu'elle passe au dedans, cette ligne est appellée sécante, comme est, par exemple, la ligne BE.

PROPOSITION I.

THEOREME.

Figure 55. 423. *Si du centre d'un cercle on abaisse une perpendiculaire* BDE *sur une corde* AC, *elle la divisera en deux parties égales aussi-bien que l'arc* AEC *soutenu par cette corde.*

DEMONSTRATION.

Soient menés aux extrêmités A, C de la corde AC les rayons AB, BC; il est aisé de voir que les triangles rectangles ABD, CBD sont égaux en tout; car ils ont, outre l'angle droit, deux côtés AB, BC égaux, puisque ce sont les rayons d'un même cercle; & de plus, le côté BD est commun à l'un & à l'autre : donc la ligne AD est égale à la ligne DC. On peut encore démontrer cette proposition par la propriété des triangles rec-

tangles : car puisque par hypothese BD est perpendiculaire sur AC, on aura $AD^2 = AB^2 - BD^2$, & $DC^2 = BC^2 - BD^2 = AB^2 - BD^2$: donc $AD^2 = DC^2$, ou $AD = AC$.

2°. Puisque les triangles ABD, CBD sont égaux en tout, l'angle ABD sera égal à l'angle CBD ; & prolongeant le côté BD jusqu'à la circonférence du cercle en E, les arcs AE, EC qui mesurent les angles ABE, CBE sont égaux ; & par conséquent l'arc AC est aussi divisé en deux parties égales au point E.

PROPOSITION II.

THEOREME.

414. *Si une droite* BD *passe par le centre, & divise la corde ou son arc* AC *en deux parties égales ; elle sera perpendiculaire à cette corde.*

DEMONSTRATION.

Soient tirés les rayons AB, BC aux extrêmités de la corde AC. Cela posé, puisque la droite BD divise la corde AC en deux parties égales, le point D de cette droite sera également éloigné des extrêmités A, C de la droite AC ; & parce que, *par hypothese*, la même droite BD passe par le centre B, son point B sera encore également éloigné des mêmes extrêmités A, C : donc elle sera perpendiculaire à cette corde.

Si l'on suppose que l'arc AC est coupé en deux également par la droite BD, prolongée en E, il est visible que les angles ABE, CBE, mesurés par ces arcs, seront égaux ; & parce que le point B est le centre du cercle, les rayons BC, AB seront aussi égaux : donc les triangles ABD, CBD auront un angle égal compris entre côtés égaux ; ainsi ils seront parfaitement égaux (art. 381.). Donc l'angle BDC est égal à l'angle BDA : donc la ligne BD ne penche pas plus d'un côté que de l'autre sur la ligne AC, & par conséquent lui est perpendiculaire. C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

THEOREME.

415. *Si une ligne droite* EDB *perpendiculaire à une corde* AC, *divise cette corde ou son arc en deux parties égales, je dis que cette ligne passe nécessairement par le centre.*

DEMONSTRATION.

Puisque la ligne EB est perpendiculaire sur le milieu de la corde AC, elle passe nécessairement par tous les points également éloignés de A & de C; mais le centre B est également éloigné des points A & C, qui sont à la circonférence, par la définition du cercle & de son centre : donc la ligne EDB passe nécessairement par le centre B. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

426. Il suit des trois propositions précédentes, que de ces trois conditions, *passer par le centre*, *être perpendiculaire à la corde*, & *la couper en deux parties égales*, deux, comme l'on voudra, étant posées, la troisieme s'ensuit nécessairement.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

Figure 56. 427. *Si du centre D d'un cercle on mene une ligne DC au point C, où une tangente AB touche le cercle, je dis que cette ligne sera perpendiculaire à la tangente.*

DEMONSTRATION.

Puisque la ligne AB est supposée tangente en C, tout autre point de cette ligne, comme F, sera au dehors du cercle, & partant la ligne DF, menée du centre D à ce point, sera plus grande que le rayon DC : donc le rayon DC est la plus courte de toutes les lignes qu'on puisse mener du point D à la tangente AB : donc ce rayon DC est perpendiculaire à la même tangente. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

428. Réciproquement si une ligne CB est perpendiculaire à l'extrêmité d'un rayon DC, elle sera tangente en C; car toute autre ligne, comme DF, étant plus longue que le rayon DC, aura son extrêmité F sur la ligne AB hors du cercle; & par conséquent la ligne AB perpendiculaire à l'extrêmité du rayon, sera tangente au cercle en ce point. C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

THEOREME.

419. *L'angle* ABC, *qui a son sommet à la circonférence d'un cercle, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.* *Figure 57*

DEMONSTRATION.

Par le sommet B de l'angle ABC, & le centre D, soit menée la ligne BDE, & les rayons DA, DC; il est évident que l'angle total ABC est égal à la somme des angles ABE, CBE, & que l'angle au centre ADC est égal à la somme des angles ADE, CDE. Cela posé, l'angle CDE extérieur au triangle isoscele CDB est égal aux deux angles intérieurs en B & en C, ou double de l'angle en B; & de même l'angle ADE étant extérieur au triangle isoscele ADB, est égal à la somme des intérieurs opposés en B & en A, ou double de l'angle ABD: donc l'angle total ADC est double de l'angle total ABC: donc l'angle à la circonférence n'est que la moitié de l'angle au centre. C. Q. F. D.

430. On déduit de cette proposition plusieurs conséquences, qui sont d'un très-grand usage. 1°. Qu'un angle, tel que ABC, est droit, lorsqu'il est appuyé sur le diametre, ou sur une demi-circonférence, puisqu'il a pour mesure la moitié de l'arc AOC, qui est de 90 degrés, ou un quart de cercle. *Figure 59.*

431. 2°. Qu'un angle, comme DEF, qui est renfermé dans un segment plus petit qu'un demi-cercle est obtus, puisqu'il a pour mesure un arc plus grand qu'un quart de cercle, étant appuyé sur l'arc DOF, plus grand que la demi-circonférence. *Figure 60*

432. 3°. Qu'un angle, comme GHI, qui est renfermé dans un segment plus grand qu'un demi-cercle, est aigu, puisqu'il a pour mesure la moitié de l'arc GOI, qui est plus petite qu'un quart de cercle. *Figure 61.*

433. 4°. Que les angles, comme ABC & ADC, qui sont renfermés dans le même segment sont égaux, puisqu'ils ont chacun pour mesure la moitié de l'arc AOC. *Figure 62.*

434. Que deux angles qui sont appuyés sur une même corde DF, l'un d'un côté, l'autre de l'autre, sont supplémens l'un de l'autre, puisqu'ils ont ensemble pour mesure la moitié de la circonférence, tels sont les angles DEF, DOF. *Figure 60.*

PROPOSITION VI.

THEOREME.

Figure 58. 435. *Si l'on a un angle* BAD, *formé par une tangente & par une corde* AD, *cet angle aura pour mesure la moitié de l'arc* AFD, *compris entre la corde & la tangente.*

DEMONSTRATION.

Tirez du centre E le rayon EA au point d'attouchement A, qui sera perpendiculaire sur la tangente AB (art. 427), & tirez du centre E la droite EGF perpendiculaire sur AD, qui la divisera en deux également, aussi-bien que l'arc AFD (art. 423). Cela posé, à cause du triangle rectangle AGE, l'angle GAE, joint à l'angle AEG vaut un droit, & le même angle GAE, joint à GAB vaut aussi un droit : donc l'angle GAB est égal à l'angle AEG; mais l'angle AEG étant au centre du cercle, a pour mesure l'arc AF compris entre ses côtés, & moitié de l'arc AFD soutenu par la corde AD : donc l'angle BAD formé par une tangente & par une corde, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre la corde & cette tangente. C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

THEOREME.

Figure 63. 436. *Un angle* AEC *qui a son sommet placé au dedans du cercle dans un point quelconque* E, *différent du centre & des points de la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc* AC, *sur lequel il est appuyé; plus la moitié de l'arc* BD *compris entre le prolongement de ses côtés* AE, EC.

DEMONSTRATION.

Soit tirée la droite BC du point B au point C. L'angle AEC étant extérieur au triangle BEC, est égal à la somme des angles intérieurs BCE, CBE : mais ces mêmes angles ayant leur sommet à la circonférence, ont pour mesure la moitié de l'arc compris entre leurs côtés; sçavoir, l'angle CBE ou CBA, la moitié de l'arc AC, & l'angle BCE ou BCD son égal, la moitié de l'arc BD : donc l'angle AEC, qui est égal à leur

somme, a pour mesure la somme de la moitié des mêmes arcs, c'est-à-dire la moitié de l'arc AC compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc BD, compris entre le prolongement des mêmes côtés. C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII.

Theoreme.

437. *L'angle* BAC, *dont le sommet est au dehors de la circonférence d'un cercle, & dont les côtés se terminent à la partie concave de la même circonférence en* B *& en* C, *a pour mesure la moitié de l'arc concave* BC, *moins la moitié de l'arc convexe* DE *compris entre ses côtés.* *Figure 64.*

Demonstration.

Soient menées les lignes BE, CD, qui donneront les triangles BAE, DAC. L'angle BDC étant extérieur au triangle DAC est égal à l'angle DAC, plus à l'angle ACD : donc l'angle DAC, ou son égal BAC, est égal à l'angle BDC, moins l'angle DCE : mais chacun de ces angles étant à la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés; sçavoir l'angle BDC, la moitié de l'arc BC, & l'angle ACD, la moitié de l'arc DE : donc l'angle BAC a pour mesure la moitié de la différence des mêmes arcs, c'est-à-dire la moitié de l'arc concave BC sur lequel il est appuyé, moins la moitié de l'arc convexe DE. C. Q. F. D.

Corollaire.

438. Il suit de tout ce que nous venons de dire, que, si l'on a un angle à la circonférence, tel que ADC, formé par une corde DC & une droite AD, dont le prolongement coupe le cercle, cet angle aura pour mesure la moitié de l'arc compris entre la corde DC, plus la moitié de l'arc soutenu par le côté AD, prolongé jusqu'à la circonférence du cercle en B : car puisque la ligne ADB est une ligne droite, ainsi que la ligne DC, les angles BDC, ADC sont ensemble égaux à deux droits, & par conséquent doivent avoir pour mesure la moitié de la circonférence; mais l'angle BDC ayant son sommet à la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc BC : donc l'angle ADC doit avoir pour mesure la moitié de l'arc DC, plus la moitié de l'arc BD, qui sont ensemble la moitié du reste de la circonférence. *Figure 64.*

PROPOSITION IX.

THEOREME.

Figure 63. 439. *Si l'on a deux droites quelconques* AB, CD, *qui se coupent au dedans d'un cercle dans un point* E, *je dis que le rectangle compris sous les parties* AE & EB *de l'une, est égal au rectangle compris sous les parties* DE & EC *de l'autre.*

DEMONSTRATION.

Soient menées les cordes AC & DB; considérez que les triangles ACE & DBE sont semblables, ayant les angles égaux en E, puisqu'ils sont opposés au sommet, & que de plus l'angle en C est égal à l'angle en B, puisque chacun d'eux est appuyé sur le même arc: donc les côtés opposés aux angles égaux seront proportionnels, & donneront AE : ED :: EC : EB (art. 402): donc en prenant le produit des extrêmes & des moyens, on aura $AE \times EB = ED \times EC$. C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

THEOREME.

Figure 64. 440. *Si du point* A, *pris au dehors d'un cercle sur le même plan, on mene deux lignes droites* AB, AC *qui aillent se terminer à la partie concave de la circonférence; je dis que le rectangle compris sous une sécante entiere* AB, *& sa partie* AD *extérieure au cercle, est égal au rectangle compris sous l'autre sécante entiere* AC, *& sa partie extérieure* AE.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire les lignes BE & CD, on aura deux triangles semblables ABE & ACD: car l'angle A leur est commun, & les angles B & C ont chacun pour mesure la moitié de l'arc DE (art. 429): donc les côtés opposés aux angles égaux seront proportionnels (art. 403), & donneront AB : AC :: AE : AD: par conséquent en prenant le produit des extrêmes & des moyens, on aura $AB \times AD = AC \times AE$. C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

PROPOSITION XI.

THÉOREME.

441. *Si d'un point* B *quelconque de la circonférence* ABC, *on abaisse une perpendiculaire* BD *sur le diametre* AC; *je dis que le quarré de cette perpendiculaire sera égal au rectangle des parties* AD, DC *du diametre.* *Figure 65.*

DEMONSTRATION.

Soient tirées les droites AB, BC du point B aux extrêmités du diametre AC, le triangle ABC sera rectangle en B, puisque l'angle ABC est appuyé sur la demi-circonférence (art. 430), & sera partagé en deux autres triangles ABD, BDC aussi rectangles, & qui lui seront semblables (art. 406). Comparant ces deux triangles semblables, & prenant les côtés homologues, on aura AD : BD :: BD : DC : donc en prenant le produit des extrêmes & celui des moyens, $AD \times DC = BD^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

442. Il suit de cette proposition, qu'à quelque point du diametre qu'on éleve une perpendiculaire, elle est toujours moyenne proportionnelle entre les deux parties du même diametre; & c'est ce que nous appellerons dans la suite, la propriété principale du cercle, de laquelle on déduit son équation.

COROLLAIRE II.

443. Il suit aussi de la démonstration précédente, qu'une corde quelconque AB est moyenne proportionnelle entre le diametre entier AC, & la partie comprise entre l'origine de cette corde & la perpendiculaire BD, abaissée de son extrêmité : car le triangle rectangle BDA est semblable au grand triangle CBA, puisqu'ils ont un angle commun en A, outre l'angle droit : donc en comparant les côtés homologues, on aura AC : AB :: AB : AD ; donc $AD \times AC = AB^2$. On démontreroit de même que BC est moyenne proportionnelle entre AC & CD.

COROLLAIRE III.

444. On auroit pu déduire cette derniere proposition de la

proposition neuvieme ; car puisque deux droites quelconques, qui se coupent dans le cercle, s'y coupent de maniere que les produits de leurs parties sont égaux ; lorsque l'une des sécantes sera coupée en deux également par une droite A C, comme la ligne B F, le produit B D × D F deviendra le quarré B D; & si l'on suppose de plus que l'autre sécante A C passe par le centre, ou qu'elle est perpendiculaire au milieu de la sécante B F; cette supposition nous donnera précisément l'énoncé du dernier théorême.

Figure 65.

DEFINITION.

445. La perpendiculaire BD, menée d'un point B de la circonférence du cercle sur le diametre A C, est appellée *ordonnée* à ce diametre, & les parties du diametre déterminées par sa rencontre en D, comme A D, D C sont appellées *abscisses* ou *coupées* du même diametre. On exprime généralement le théorême précédent, en disant *que dans un cercle, les quarrés des ordonnées sont égaux aux produits de leurs abscisses.*

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

Figure 66.

446. *Un cercle* B E *étant donné avec un point* D *sur le même plan, mener une droite* D B *qui aille toucher le cercle en un point* B.

SOLUTION.

Par le centre C & le point donné D, menez une ligne C D; sur cette ligne, comme diametre, décrivez un demi-cercle C B D qui coupe le cercle donné dans un point B ; menez la ligne B D, qui sera la tangenre demandée, & qui ne rencontre le cercle qu'au seul point B.

DEMONSTRATION.

Pour concevoir la raison de cette opération, tirez encore au centre C du point B la ligne B C. Il est visible que l'angle CBD est droit (art. 430), étant appuyé sur le diametre ; d'ailleurs, la ligne B D est perpendiculaire à l'extrêmité du rayon C B, & passe par le point D : donc elle est la tangente demandée. C. Q. F. T. & D.

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

447. *Si d'un point* B *hors d'un cercle, on mene une tangente* BA, *& une sécante* BC, *je dis que le quarré de la tangente* AB *est égal au rectangle, compris sous la sécante entiere* BC, *& sa partie extérieure* BD. *Figure 67.*

DEMONSTRATION.

Soient menées les cordes AC & AD du point de contingence A, aux points C, D, où la sécante BC rencontre le cercle. Les triangles CAB, ADB seront semblables, car ils ont un angle commun en B; & de plus, l'angle ACB, fol. par la corde AC & la sécante CB, est égal à l'angle BAD, fol. par la tangente AB & la corde AD, puisqu'ils ont chacun pour mesure la moitié de l'arc AD, compris entre leurs côtés (art. 429 & 435): donc ces triangles sont semblables (art. 402); & par conséquent les côtés homologues sont proportionnels; & donnent $BC : AB :: AB : BD$: donc $AB^2 = BC \times BD$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

448. Il suit delà, que si deux tangentes AB, BF se rencontrent dans un point A, les parties AB, BF de ces tangentes, prises depuis le point de rencontre jusqu'aux points de contact, sont égales entr'elles: car on démontrera de même que pour la tangente AB, que l'on auroit $BF^2 = BD \times BC$: donc puisque $AB^2 = BC \times BD$, on aura $AB^2 = BF^2$, & par conséquent $AB = BF$.

Il est à remarquer, que l'on auroit pu déduire cette proposition, immédiatement de la dixieme: car si l'on imagine que la sécante AB tourne au tour du point A comme d'une charniere, on verra que les points B, D s'approchant continuellement l'un de l'autre, se confondront enfin, lorsque la ligne AB sera devenue tangente dans un seul point, & alors le rectangle $AB \times AD$ deviendra le quarré de la même tangente, qui sera égal au produit de la sécante entiere AC par sa partie extérieure AE. *Figure 64.*

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

Figure 68. 449. *Si l'on a une tangente* CD *perpendiculaire à l'extrêmité d'un diametre* AB, *je dis que si l'on tire autant de lignes qu'on voudra du point* A *à la tangente, telles que* AC, AD, *le quarré du diametre* AB *sera égal au produit de cette ligne* AC *par la partie intérieure* AE.

DEMONSTRATION.

Soit menée la droite BE de l'extrêmité inférieure du diametre au point E, où la droite AC coupe le cercle : on aura deux triangles rectangles semblables ABC, AEB : car le premier ABC est rectangle en B, à cause de la tangente AD, qui est perpendiculaire au diametre AB, le second AEB est rectangle en E, puisque cet angle est appuyé sur le diametre ; de plus, ces triangles ont un angle commun en A : donc ils sont semblables (art. 402), & les côtés homologues nous donnent $AC:AB::AB:AE$; donc $AB^2 = AC \times AE$. C. Q. F. D.

DÉFINITION.

450. L'on dit qu'une ligne est divisée en moyenne & extrême raison, lorsque la ligne entiere est à la plus grande partie ; comme la même plus grande partie est à la plus petite : & la plus grande partie est appellée *médiane*.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

Figure 69. 451. *Diviser une ligne donnée* AB *en moyenne & extrême raison, c'est-à-dire de maniere que l'on ait* $AB:AF::AF:FB$.

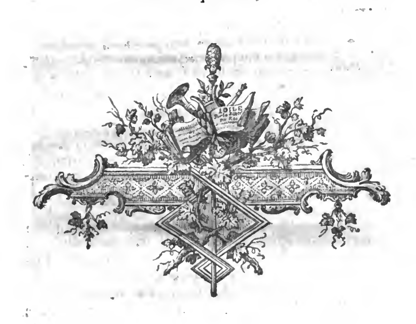
SOLUTION.

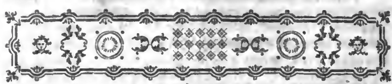
A l'extrêmité B de la ligne donnée AB, soit élevée la perpendiculaire BD, égale à la moitié de la même ligne AB : du point D, & de l'intervale ou rayon BD, soit décrit un cercle EBC, ensuite par le point A & le centre D, soit menée la sécante AC : enfin soit prise AF égale à la partie extérieure AE de la sécante AC ; je dis que le point F divise la ligne AB en moyenne & extrême raison, ou, ce qui revient au même, que l'on a $AB:AF::AF:FB$.

DEMONSTRATION.

Soit nommé AF ou AE x, AB a, CE sera aussi a, AC sera $a+x$, & FB sera $a-x$. Cela posé, par la proposition 13, on a AC : AB :: AB : AE, ou AF ; & en termes analytiques, $a+x : a :: a : x$, & faisant le produit des extrêmes & des moyens, il vient $aa = ax + xx$, faisant passer ensuite ax du second membre dans le premier, il vient $aa - ax = xx$, ou $\overline{a-x} \times a = xx$, d'où l'on déduit cette proportion $a : x :: x : a-x$, ou AB : AF :: AF : FB. C.Q.F.T.&D.

Fin du cinquieme Livre.





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE SIXIEME,

Qui traite des Polygones réguliers, inſcrits & circonſcrits au cercle.

Définitions.

I.

452. On dit qu'un polygone régulier ou irrégulier eſt *inſcrit* au cercle, lorſque tous les ſommets de ſes angles ſont à la circonférence du cercle.

II.

453. On dit qu'une figure rectiligne, réguliere ou irréguliere eſt *circonſcrite* au cercle, quand chacun de ſes côtés touche la circonférence du cercle, ou autrement, quand chaque côté eſt une tangente au cercle.

III.

454. On appelle *polygone régulier*, une figure dont tous les angles & les côtés ſont égaux entr'eux, & *polygones ſymétriques*, ceux dont les côtés oppoſés ſont égaux, & paralleles deux à deux.

IV.

455. Un polygone régulier ſe nomme *pentagone*, lorſqu'il a cinq côtés; *exagone*, quand il a ſix côtés, *eptagone*, quand il

en a sept; *octogone*, quand il en a huit; *ennéagone*, quand il en a neuf; *décagone*, quand il en a dix; & enfin *ondécagone* ou *dodécagone*, quand il en a onze ou douze.

V.

456. Comme tout polygone régulier peut être inscrit dans un cercle, on distingue dans tout polygone régulier deux sortes d'angles, les angles du *centre*, & les angles du *polygone* ou de la *circonférence*.

VI.

457. L'angle au centre est un angle, comme B A C, formé par deux rayons A B & A C, tirés du centre aux extrêmités d'un des côtés du polygone. Planche IV. *Figure* 70.

VII.

458. L'angle du polygone, est un angle comme B C D, formé par la rencontre des deux côtés B C & C D du même polygone.

Corollaire.

459. Comme l'angle du centre du polygone a pour mesure l'arc, dont un des côtés du polygone est la corde, l'on trouvera toujours la valeur de cet angle, en divisant 360, ou les degrés de la circonférence entiere, par le nombre des côtés du polygone. Ainsi pour trouver l'angle au centre d'un exagone, je divise 360 par 6, & le quotient 60, est la mesure de l'angle que je cherche. Or comme l'angle B C D du polygone est double de l'angle A B C, & que par conséquent il est égal aux deux angles de la base du triangle isoscele A B C, il s'ensuit qu'il est égal à la différence de l'angle du centre à deux droits: ainsi on trouvera la valeur de l'angle du polygone, en retranchant l'angle du centre de 180 degrés.

PROPOSITION I.

Probleme.

460. *Inscrire un exagone dans un cercle.*

Solution.

Pour inscrire un exagone dans un cercle, il faut prendre le rayon du cercle avec le compas, & le porter six fois sur la circonférence; cette opération détermine les points qui servent à tracer l'exagone. *Figure* 70.

DEMONSTRATION.

Considérez que le côté BC de l'exagone est égal au rayon AB ; car comme l'angle du centre BAC de l'exagone est de 60 degrés, la somme des deux angles de la base du triangle isoscele BAC sera de 120 degrés, double de l'angle au centre ; chacun d'eux sera donc de 60 degrés : donc le triangle BAC est équilatéral, & le côté BC est égal au rayon AC. C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

Figure 71. 461. *Décrire un dodécagone dans un cercle, ou, ce qui est la même chose, une figure de douze côtés.*

SOLUTION.

Pour décrire un dodécagone dans un cercle, il faut porter le rayon AC sur la circonférence, afin d'avoir l'arc CD de 60 degrés, ou autrement égal à la sixieme partie de la même circonférence, & diviser ensuite cet arc en deux également en E, la corde DE sera le côté du dodécagone, puisqu'elle est la corde d'un angle de 30 degrés, qui font la douzieme partie de la circonférence. C. Q. F. D.

LEMME.

Figure 72. 462. *Si l'on a un triangle isoscele* ABC, *dont chaque angle de la base soit double de celui du sommet ; je dis que si l'on divise l'un des angles de la base, comme* BAC *en deux également par une ligne* AD, *qui va rencontrer le côté opposé en* D, *cette ligne divisera ce même côté* AC *en moyenne & extrême raison au point* D, *ensorte que l'on aura* BC : BD :: BD : DC.

DEMONSTRATION.

Considérez que les triangles ABC & DAC sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun en C, & que l'angle DAC est égal à l'angle B, puisque l'angle B est par supposition moitié de l'angle BAC, dont celui-ci est aussi la moitié. On aura de plus le triangle BDA, qui sera isoscele, puisque l'angle DBA est égal à l'angle BAD : donc les côtés AD, BD seront égaux. Cela posé, les triangles semblables ABC, DAC nous

nous donnent par la comparaison des côtés homologues BC : AC :: AC : DC, & mettant BD à la place de AC, auquel il est égal, on aura BC : BD :: BD : DC. C. Q. F. D.

Corollaire I.

463. Cette proposition donne un moyen de faire un triangle isoscele, dont les angles de la base soient chacun doubles de celui du sommet; car pour faire, par exemple, un triangle comme ABC, l'on n'aura qu'à diviser le côté BC en moyenne & extrême raison (art. 451), & sur la plus petite partie DC comme base, faire un triangle isoscele par le moyen de deux sections, avec une ouverture de compas de la grandeur de la médiane BD, & l'on aura le point A, qui servira à former le triangle ABC. Comme il n'y a qu'une maniere de diviser une ligne en moyenne & extrême raison, il n'y a aussi qu'un triangle qui ait la propriété que nous venons de voir.

Corollaire II.

464. Il suit encore delà que si du point B, comme centre, l'on décrit un cercle, dont le rayon soit BA ou BC, la base AC du triangle isoscele ABC sera le côté du décagone inscrit dans ce cercle : car puisque, par construction, les deux angles de la base sont chacun doubles de l'angle au sommet, les trois angles du même triangle, pris ensemble, vaudront cinq fois l'angle du sommet; & comme la valeur des trois angles d'un triangle quelconque est de deux angles droits, on aura la valeur de l'angle au sommet, en divisant deux droits ou 180 degrés par 5, & ce qui donnera 36 pour le nombre des degrés de l'angle au centre B, lequel nombre est précisément la dixieme partie de la circonférence, ou de 360 degrés.

PROPOSITION III.

Probleme.

465. *Inscrire un décagone dans un cercle.*

Pour inscrire un décagone dans un cercle, il faut diviser le rayon de ce cercle en moyenne & extrême raison, la médiane sera le côté du décagone; ainsi l'on n'aura qu'à porter dix fois cette ligne sur la circonférence, & l'on aura les points qui serviront à tracer le décagone; ce qui est évident, puisque par le

corollaire précédent, la médiane d'une ligne quelconque, divisée en moyenne & extrême raison, est le côté du décagone inscrit au cercle qui auroit cette ligne pour rayon.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

Figure 74. 466. *Si l'on a une ligne droite* BD *égale à la somme des côtés de l'exagone & du décagone inscrit au même cercle, elle sera divisée en moyenne & extrême raison au point de jonction de ces deux côtés.*

Demonstration.

Soit la ligne BC égale au côté du décagone inscrit au cercle, qui a pour rayon BA ou AC. Soit prolongée cette ligne en D, de maniere que l'on ait DC = AC, puisque le rayon est le côté de l'exagone; il faut faire voir que l'on aura BD : DC :: DC : BC. Pour cela, soit tirée la ligne AD qui nous donnera le triangle isoscele DCA, & le nouveau triangle BDA semblable au triangle BAC, puisque ces triangles ont l'angle B commun, & que l'angle BDA est égal à l'angle CAB; car à cause du triangle isoscele DCA, l'angle ACB qui lui est extérieur, est double de l'angle CAD, ou CDA; mais par la nature du côté du décagone, le même angle est double de l'angle BAC au centre A: donc l'angle BDA est égal à l'angle CAB: donc les triangles BDA, BAC sont semblables, & les côtés homologues seront proportionnels; ainsi l'on aura BD:BA::BA:BC, ou en mettant DC au lieu de BA qui lui est égal, BD:DC::DC:BC. C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

Theoreme.

Figure 75. 467. *Le quarré du côté du pentagone inscrit dans un cercle est égal à la somme des quarrés de l'exagone & du décagone inscrits au même cercle.*

Demonstration.

Si l'on a dans un cercle le côté AB du pentagone, & qu'on divise en deux également au point C l'arc ACB, la corde AC ou CB sera le côté du décagone, & le rayon AD ou BD le côté de l'exagone. Il faut démontrer que l'on aura $AB^2 = BD^2$

$+ AC^2$. Pour cela, soit encore divisé l'arc AC en deux également en F, soit mené le rayon FD & du point E, où il coupe le côté AB du pentagone, soit tirée la droite EC. Le triangle AEC sera isoscele & semblable au triangle ACD; car puisque la droite FD coupe l'arc AC en deux parties égales, & passe par le centre; elle coupe aussi la corde en deux parties égales, & lui est perpendiculaire: donc tous les points de cette droite FD sont également éloignés des extrêmités AC, ainsi l'on aura $AE = EC$. De plus, ce triangle a un angle commun avec le triangle isoscele ACB: donc ils sont semblables; & comparant les côtés homologues, on aura $AB : AC :: AC : AE$; donc $AC^2 = AB \times AE$. De même le triangle ADB est semblable au triangle DEB, car ces triangles ont un angle commun en B, qui vaut 54 degrés; mais l'angle BDF est aussi de 54 degrés, ayant pour mesure l'arc FB, qui vaut CB de 36 degrés, plus FC de 18 degrés, puisque FC est moitié de l'arc AC; ce triangle DEB sera donc isoscele, ainsi que le triangle ADB, & comparant les côtés homologues, on aura $AB : BD :: BD : BE$; donc $BD^2 = AB \times BE$. Et ajoûtant aux membres de cette équation ceux de l'équation précédente, on aura $BD^2 + AC^2 = AB \times AE + AB \times BE$. Mais $AB \times AE + AB \times BE = AB \times (AE + BE) = AB \times AB = AB^2$: donc $BD^2 + AC^2 = AB^2$. C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

Probleme.

468. *Inscrire un Pentagone dans un cercle.*

Solution.

Pour inscrire un pentagone dans un cercle, tirez le rayon CF, perpendiculaire sur le diametre AB, & divisez le demi-diametre CB en deux également au point E; de ce point comme centre, & de l'intervalle EF, décrivez l'arc FD, & la ligne FD sera le côté du pentagone inscrit au cercle AFD. *Figure 76.*

Démonstration.

Pour le prouver, considérez que le triangle DFC est rectangle, par construction, & que le côté CF étant celui de l'exagone, il suffira de faire voir que le côté DC est celui du décagone: car pour que la ligne FD soit le côté du pentagone,

on sçait, par le théorême précédent, qu'il faut que le quarré de ce côté soit égal aux quarrés des côtés de l'exagone & du décagone. Pour cela, nous nommerons CF ou CB, a; par conséquent CE sera $\frac{1}{2}a$, l'inconnue DC sera nommée x, ainsi BD sera $a+x$. Cela posé, comme EF est égal à ED, on aura, à cause du triangle rectangle ECF, $CE^2+CF^2=EF^2$, ou en termes analytiques $aa+\frac{1}{4}aa=xx+ax+\frac{1}{4}aa$, ou $aa=xx+ax$, en effaçant $\frac{1}{4}aa$ de part & d'autre; d'où l'on tire $a+x:a::a:x$, ou DB:CB::CB:DC, qui montre que la ligne DB est divisée en moyenne & extrême raison au point C; & par conséquent (art. 466) la ligne DC est le côté du décagone, puisque BC est celui de l'exagone. C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

469. *Inscrire un quarré dans un cercle.*

Figure 77. Pour inscrire un quarré dans un cercle, tirez le diametre AB, sur le milieu de ce diametre, élevez un second diametre CED perpendiculaire au premier: ces deux diametres couperont la circonférence en quatre parties égales dans les points A, C, B, D, par lesquels vous menerez les droites AC, CB, BD & DA, qui formeront un quarré; car toutes ces lignes sont égales, puisqu'elles sont des cordes d'arcs égaux; & de plus, chacun des angles de cette figure est droit, puisqu'il est appuyé sur le diametre. C. Q. F. T. & D.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

Figure 77. 470. *Inscrire un octogone dans un cercle.*

Pour inscrire un octogone dans un cercle, il faut d'abord diviser sa circonférence en quatre parties égales, comme si l'on vouloit y inscrire un quarré, & diviser en deux également chaque quart de cercle, tel que CB; la corde CF ou FB sera le côté de l'octogone.

AVERTISSEMENT.

Nous n'avons point parlé de la maniere d'inscrire dans un cercle l'*eptagone*, l'*ennéagone*, ni l'*ondécagone*, parce que l'on

n'a pas encore trouvé le moyen de tracer géométriquement ces trois polygones, simplement avec la regle & le compas, étant obligé d'avoir recours à la Géométrie composée, c'est-à-dire à la Géométrie des courbes. Il s'en faut beaucoup que que les solutions des problêmes, par le moyen des courbes, soient aussi simples que celles que l'on trouve par la regle & le compas, c'est ce qui a fait regarder jusqu'ici ces sortes de problêmes comme très-difficiles, ainsi que celui de la trisection de l'angle, où il s'agit de diviser un angle donné en trois parties égales, & dont l'équation monte au troisieme degré. Comme nous ne parlons pas de ces sortes d'équations dans ce Traité, nous allons donner le moyen de tracer une courbe, que l'on a nommé *quadratrice* de *Dinostrate*, du nom de son inventeur, par le moyen de laquelle on pourra diviser les angles & les arcs de cercles, en autant des parties égales que l'on voudra; mais auparavant il faut être prévenu des deux problêmes suivans.

PROBLEME I.

471. *Diviser une ligne droite en autant de parties égales que l'on voudra.* *Figure* 80.

Pour diviser une ligne AB, par exemple, en neuf parties égales, tirez la ligne AC, qui fasse avec AB un angle à volonté; du point A comme centre, & du rayon AB, décrivez l'arc BC, qui sera la mesure de l'angle CAB; ensuite avec la même ouverture de compas, & du point B comme centre, décrivez l'arc AD égal à BC, & tirez la ligne BD, qui donnera l'angle ABD égal à l'angle CAB. Cela posé, marquez sur le côté AC avec une ouverture de compas à volonté, un nombre de parties égales, tel que celui dans lequel on veut diviser la ligne AB, c'est-à-dire qu'en commençant du point A, il faut marquer neuf parties égales sur la ligne AC; après quoi il en faudra faire autant sur la ligne BD, en commençant du point B: après cela, si l'on tire les lignes 9A, 81, 72, &c. elles diviseront la ligne AB en neuf parties égales; ce qui est bien évident: car comme les lignes que l'on a tirées sont paralleles entr'elles, elles donneront les triangles semblables A1E, A9B, qui font voir que puisque A1 est la neuvieme partie de A9, AE sera la neuvieme partie de AB, ainsi des autres.

PROBLEME II.

472. *Diviser un arc de cercle en un nombre de parties égales, pairement paires, c'est-à-dire qui soit divisible par les nombres deux, & ses puissances 4, 8, 16, 32.*

SOLUTION.

Figure 81. Si l'on veut diviser, par exemple, le quart de cercle ABC en seize parties égales, il faut des points A & C décrire avec la même ouverture de compas la section D, & tirer la ligne BD, qui divisera l'arc AC en deux également au point E; diviser de la même maniere l'arc EC en deux également au point F, l'arc FC encore en deux également au point G, & l'arc GC en deux également au point H, pour avoir l'arc CH, qui sera la seizieme partie de AC, & ainsi des autres.

C'est ainsi qu'on pourra diviser géométriquement un arc de cercle en un nombre infini de parties égales, pourvu que l'on divise le tout, & ses parties toujours de deux en deux.

Maniere de décrire la Quadratrice.

473. Pour décrire cette courbe, il faut diviser le rayon AB en un grand nombres de parties égales; de maniere que le quart de cercle puisse être divisé dans le même nombre de parties égales. Nous supposerons donc que l'on a divisé le quart de cercle en seize parties égales, ainsi que le rayon AB. Cela posé, après avoir tiré du centre B à l'extrêmité de chaque partie égale du quart de cercle, les droites BC, BD, BE, BF, &c. l'on tirera par les points G, H, I, K des parties égales du rayon, parallélement au diametre BF, les droites GL, HM, IN, KO; & les rencontres de ces droites, avec les rayons qui divisent le quart de cercle, donneront les points L, M, N, O, &c. avec lesquels on tracera la courbe AS, que l'on pourra faire beaucoup plus juste, en divisant le quart de cercle & le rayon BA en un plus grand nombre de parties égales que l'on n'a fait ici, afin d'avoir les points L, M, N, O beaucoup plus près les uns des autres, & que le point R, formé par la rencontre du dernier rayon BP, & la parallele QR approche le plus près qu'il est possible du demi-diametre BT, pour rendre insensible l'erreur que l'on pourroit faire, en continuant méchani-

quement la courbe AR, jusqu'à la rencontre du demi-diametre.

Il faut bien remarquer que par la génération de cette courbe, si l'on mene des paralleles HM & KO, qui aillent rencontrer la courbe aux points M & O, & que l'on tire par ces points des rayons BD & BF, qu'il y aura même raison de l'arc AD à l'arc DF, que de la ligne AH à la ligne HK ; & c'est dans cette proportion que consiste la nature de cette courbe.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

474. *Diviser un angle en trois parties égales.*

Supposant que l'on ait tracé sur un morceau de corne ou de carton bien uni la courbe AD, de la façon qu'on vient de l'enseigner, on propose de diviser l'angle OPQ en trois parties égales. *Figure 83 & 85.*

Pour résoudre ce problême, supposant que la courbe soit accompagnée de son quart de cercle AC, je fais l'angle ABE égal à l'angle donné, & au point F, où le rayon BE coupe la courbe AD, j'abaisse la perpendiculaire FG sur le demi-diametre AB, qui me donne la partie AG, que je divise en autant de parties égales qu'on veut que l'angle donné soit divisé ; ainsi je la partage en trois parties égales, aux points H & K, desquels je mene les paralleles KL & HI, qui me coupent la courbe aux points L & I, par lesquels je mene les rayons BM & BN, qui divisent l'arc AE en trois parties égales, aux points M & N ; puisque par la propriété de la courbe, il y a même raison de AK à AG, que de AM à AE ; & comme AK est la troisieme partie de AG, l'arc AM sera aussi la troisieme partie de l'arc AE.

Mais si l'on proposoit de diviser un angle obtus, comme RST en trois parties égales, il semble que cela souffriroit quelque difficulté, parce que l'arc RT ne peut pas être contenu dans l'arc AC, puisqu'il est supposé plus grand que lui : en ce cas, il faut diviser en deux également l'angle obtus donné, pour avoir l'angle aigu RSV, que nous supposerons être le même que l'angle ABE : ainsi divisant l'angle aigu en trois parties égales, aux points M & N, l'on n'aura qu'à prendre l'arc AN, qui étant double de la sixieme partie de l'arc RT, sera par conséquent le tiers du même arc RT. C. Q. F. T. & D. *Figure 84.*

PROPOSITION X.

Probleme.

Figure 78. 475. *Décrire un ennéagone dans un cercle.*

Pour décrire un ennéagone dans un cercle, il faut porter le rayon du cercle six fois sur la circonférence, pour avoir les poinrs B, C, D, E, F, G, qui la diviseront en six parties égales; & tirant des lignes du premier point au troisieme, du troisieme au cinquieme, & du cinquieme au premier, on aura un triangle équilatéral BDE, qui divisera la circonférence en trois parries égales; si on divise après cela un de ces arcs, comme BCD, en trois parties égales, par le problême précédent, l'on aura la neuvieme partie de la circonférence du cercle, dont la corde sera le côté de l'*ennéagone.* C. Q. F. T. & D.

PROPOSITION XI.

Probleme.

476. *Décrire un eptagone dans un cercle.*

Pour décrire un eptagone dans un cercle, il faut diviser le quart de la circonférence du cercle en sept parties égales: ainsi chacune de ces parties sera la 28e partie de toute la circonférence. Or prenant un arc égal au quatre septiemes du quart de cercle, il sera égal à la septieme partie de la circonférence du même cercle, & par conséquent la corde qui le soutient sera le côté de l'eptagone demandé. C. Q. F. T. & D.

PROPOSITION XII.

Probleme.

477. *Décrire un ondécagone dans un cercle.*

Pour décrire un polygone de onze côtés qui soit inscrit au cercle, il faut diviser le quart de cercle en onze parties égales, & si l'on prend la corde d'un angle, qui feroit les quatre onziemes du quart de cercle, elle sera le côté de l'ondécagone demandé. C. Q. F. T. & D.

Remarque.

L'on a nommé *quadratrice*, la courbe que nous venons d'examiner,

miner, parce qu'elle contribue à la quadrature méchanique du cercle: car ſuppoſons qu'on ait trouvé le point D, où cette courbe rencontre le rayon BC, il eſt démontré dans *Pappus*, dans *Clavius*, & dans pluſieurs autres Auteurs, que le demi-diametre BC eſt moyen proportionnel entre la baſe BD de la quadratrice & la circonférence AEC du quart de cercle; enſorte que l'on a cette proportion BD : BC :: BC : AEC. D'où il ſuit qu'en connoiſſant cette baſe, on pourroit déterminer une ligne droite égale à la circonférence du quart de cercle.

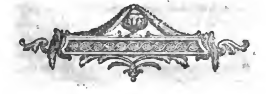
PROPOSITION XIII.

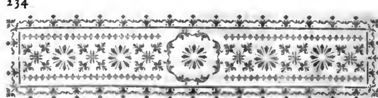
PROBLEME.

478. *Circonſcrire un polygone quelconque autour d'un cercle donné.*

Quand on veut circonſcrire un polygone autour d'un cercle, il faut commencer par en inſcrire un ſemblable dans le même cercle : ainſi voulant, par exemple, circonſcrire un exagone autour du cercle BEC, il faut commencer par en tracer un dans le cercle, & diviſer un de ſes côtés, tels que BC, en deux également, par un rayon AE, & à l'extrêmité E, mener la tangente FG, qu'il faut terminer par les rayons AB, AC prolongés, juſqu'à la rencontre de la tangente, & l'on aura le côté FG de l'exagone circonſcrit : ainſi on trouvera tous les autres, en faiſant la même opération. Mais pour avoir plutôt fait, après avoir trouvé les points F, G, il vaut mieux décrire un cercle du centre A avec le rayon AG, ſur la circonférence duquel on pourra marquer les points, qui ſerviront à tracer le polygone, en y portant avec le compas la longueur du côté FG. *Figure 79.*

Fin du ſixieme Livre.





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE SEPTIEME,

Où l'on considere les rapports qu'ont entr'eux les circuits des figures semblables, & la proportion de leurs superficies.

DÉFINITION.

479. ON dit que deux quadrilateres ont leurs bases & leurs hauteurs *réciproques*, lorsque la base du premier est à la base du second, comme la hauteur du même second est à celle du premier. En général on dit que deux grandeurs quelconques sont réciproques à deux autres, lorsque les deux premieres sont les extrêmes ou les moyens d'une proportion, dont les deux autres sont les moyens ou les extrêmes. Par exemple, a & b sont réciproques aux grandeurs c & d, si l'on a $a : c :: d : b$, ou $c : a :: b : d$.

PROPOSITION I.

THEOREME.

Planche V. Figure 86 & 87. 480. *Si l'on a deux polygones réguliers semblables*, A *&* B, *je dis que le circuit ou le contour du polygone* A *est au contour du polygone* B, *comme le rayon* AC *est au rayon* BF.

DEMONSTRATION.

Nous nommerons CD, a, FG, b, AC, c, & BF, d. Cela

posé, si chaque polygone est un exagone, le circuit du polygone A sera $6a$, & le circuit du polygone b sera $6b$: ainsi il faut prouver que l'on aura $6a : 6b :: c : d$. Les triangles D A C, G B F sont semblables; car puisque les polygones sont semblables, les angles de chacun des triangles qui les composent sont égaux chacun à chacun, & les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels (art. 405): on aura donc $a : b :: c : d$, & multipliant les deux termes a & b par 6, on aura $6a : 6b :: c : d$. C. Q. F. D.

REMARQUE.

Cette proposition se doit entendre de toutes les figures semblables, régulieres ou irrégulieres, à commencer par les triangles: car quoique des figures irrégulieres ne soient pas inscriptibles au cercle, on peut dire cependant que les contours de ces polygones, supposés semblables, sont entr'eux comme les rayons de deux cercles qui passeront par les sommets de trois angles égaux, pris comme l'on voudra dans l'une & dans l'autre figure, pourvû que ces cercles passent par les angles de deux triangles semblables, & semblablement placés dans l'une & dans l'autre figure.

COROLLAIRE.

481. Il suit de cette proposition, que les circonférences des cercles sont entr'elles comme les rayons de ces cercles: car si l'on considere les cercles X & Y, comme étant des polygones semblables d'une infinité de côtés, nommant a la circonférence du premier, c le rayon, b la circonférence du second, & d son rayon, on aura encore $a : b :: c : d$. *Figure* 88 & 89.

PROPOSITION II.

THEOREME.

482. *Si du centre A d'un polygone régulier, on abaisse une perpendiculaire AE sur l'un de ses côtés, je dis que la superficie de ce polygone sera égale à un triangle rectangle IKL, qui auroit pour hauteur la ligne IK égale à la perpendiculaire AE, & pour base une ligne KL égale au circuit du polygone.* *Figure* 86 & 90.

DEMONSTRATION.

Si le polygone régulier est un exagone, & que l'on tire du

centre des rayons à tous les angles, l'on aura autant de triangles égaux, que le polygone a de côtés: ainsi le polygone A sera composé de six triangles, tels que CAD; mais comme les triangles CAD & KIL ont la même hauteur, ils seront dans la même raison que leurs bases (art. 392); & comme la base KL est sextuple de la base CD, *par construction*, le triangle KIL sera aussi sextuple du triangle CAD, & par conséquent égal au polygone. C. Q. F. D.

Corollaire.

483. Il suit de cette proposition, que pour trouver la superficie d'un polygone régulier, il faut multiplier la moitié de son circuit par la perpendiculaire abaissée du centre de ce polygone sur son côté, puisque pour trouver la surface du triangle IKL, qui est égal à ce polygone, il faut multiplier la moitié de sa base KL par la perpendiculaire IK.

PROPOSITION III.

Theoreme.

484. *La superficie d'un cercle est égale à un triangle, qui auroit pour hauteur le rayon du cercle, & pour base la circonférence du même cercle.*

Demonstration.

Comme un cercle est un polygone d'une infinité de côtés, on peut prendre la circonférence du cercle pour la somme de ces côtés, & ce rayon pour la perpendiculaire du polygone; d'où il suit qu'il sera égal à un triangle qui auroit pour hauteur le rayon MN, & pour base une ligne NO égale à la circonférence. C. Q. F. D.

Corollaire I.

485. Puisque le triangle MNO est égal au cercle, & qu'il est aussi égal à un rectangle qui auroit pour base la moitié de la base NO, & pour hauteur la ligne MN, il s'ensuit qu'un cercle est égal à un rectangle qui auroit pour base la moitié de la circonférence, & pour hauteur le rayon; & que pour en trouver la superficie, il faut multiplier la moitié du diametre, par la moitié de la circonférence.

REMARQUE I.

486. Si l'on considere la surface du cercle, comme étant composée d'une infinité de circonférences concentriques, dont les rayons se surpassent également, toutes ces circonférences composeront une progression infinie arithmétique, dont le centre sera le plus petit terme, & la circonférence le plus grand. Or comme le demi-diametre AB exprime le nombre des termes de la progression, il s'ensuit qu'on en trouvera la somme en multipliant le plus grand terme, qui est la circonférence, par la moitié du rayon AB.

REMARQUE II.

487. Il semble d'abord que la proposition précédente donne la quadrature du cercle, parce qu'elle prouve qu'un cercle est égal à un triangle, qui auroit pour base la circonférence du cercle, & pour hauteur le rayon; mais comme on n'a pas encore trouvé géométriquement une ligne droite, parfaitement égale à la circonférence d'un cercle, l'on n'a pu par conséquent trouver un triangle parfaitement égal au cercle. Quand je dis un triangle, on peut aussi entendre un quarré égal au cercle, parce que l'on peut faire géométriquement un quarré égal à un triangle, comme on le verra ailleurs. Mais pour qu'il n'y ait point d'équivoque sur le mot de quadrature du cercle, il est bon que les Commençans sçachent que la quadrature du cercle consiste à trouver une proposition qui donne le moyen de faire un quarré égal en surface à un cercle donné, & qui déqu'on le fait réellement.

Quoique les Géometres n'aient pas encore trouvé une ligne droite parfaitement égale à la circonférence d'un cercle, cela n'empêche pas que dans la pratique on ne suppose que cela se puisse faire, en se servant de quelques regles qui sont des approximations de la quadrature du cercle, comme on le va voir.

488. *Archimede* a trouvé que le rapport du diametre à la circonférence, est à peu près celui de 7 à 22, c'est-à-dire que si le diametre contient sept parties égales, la circonférence en contiendra à peu près 22, ou, ce qui revient au même, que la circonférence vaut trois fois le diametre & un septieme. Or comme les diametres des cercles sont dans la raison de

leurs circonférences (art. 481), si l'on avoit un cercle, dont le diametre fût, par exemple, de 28 pieds, pour en trouver la circonférence, l'on diroit: Si 7, diametre d'un cercle, donne 22 pour la circonférence du même cercle, combien donneront 28, diametre d'un autre cercle pour sa circonférence, que l'on trouvera de 88 pieds?

Mais si l'on avoit un cercle, dont on connût seulement la circonférence, que nous supposerons de 66 pieds, pour en trouver le diametre, il faudroit encore faire une Regle de Trois, en disant: Si la circonférence d'un cercle qui auroit 22 pieds, donne 7 pour son diametre, combien donnera la circonférence d'un autre cercle, qui seroit de 66 pieds, pour le diametre du même cercle? L'on trouvera 21 pieds pour le diametre qu'on cherche. Outre le rapport de 7 à 22, dont on peut toujours se servir, lorsqu'on ne veut pas arriver à la derniere précision, on peut encore faire usage de celui de 113 à 355, trouvé par *Métius*, & plus exact que le précédent; c'est pourquoi il sera à propos de se servir de ce dernier dans les opérations où il faudra déterminer la circonférence du cercle avec plus de justesse que dans les opérations ordinaires.

COROLLAIRE II.

489. Il suit encore delà, qu'un cercle est égal à un rectangle NSRQ, qui auroit pour base le quart de la circonférence, & pour hauteur le diametre, puisque ce rectangle est égal au rectangle NT, qui a pour hauteur le rayon, & pour base la moitié de la circonférence: par conséquent si l'on avoit un quarré VXYZ fait sur le diametre du cercle, le quarré & le rectangle NR égal à la surface du cercle, ayant même hauteur, seront entr'eux comme leurs bases VZ & NQ. On peut donc dire que le diametre d'un cercle est au quart de la circonférence, comme le quarré de ce même diametre est à la superficie du même cercle.

COROLLAIRE III.

490. Si l'on suppose que le diametre d'un cercle soit divisé en sept parties égales, & que sa circonférence en contienne exactement vingt-deux (ce qui ne peut faire une erreur sensible dans la pratique), en doublant les mêmes nombres, on aura 14 & 44 pour le diametre & la circonférence, sur quoi l'on remarquera que le dernier étant divisible par 4, & don-

nant 11 au quotient, on pourra prendre ce même quotient pour le quart de la circonférence; d'où il suit, par le corollaire précédent, que le rapport de 14 à 11 est le même que celui du quarré du diametre à la surface du cercle: ainsi pour avoir la superficie d'un cercle, dont on connoît le diametre, que je suppose $= a$, on n'aura qu'à faire cette Regle de Trois, $14 : 11 :: aa : \frac{11aa}{14}$, ou, ce qui revient au même, pour avoir l'aire d'un cercle quelconque, il suffira de prendre les onze quatorziemes du quarré du diametre de ce cercle.

SCHOLIE.

491. Les Commençans ne seront peut-être pas fâchés de connoître la route qu'*Archimede* a suivie pour découvrir le rapport dont nous venons de parler. La connoissance des premiers axiomes de géométrie suffit pour nous faire concevoir clairement que la circonférence d'un cercle est plus grande que le contour d'un polygone quelconque inscrit à ce cercle, & plus petite que le contour d'un polygone quelconque circonscrit au même cercle. Il faut entendre la même chose pour la superficie du cercle & celle des polygones inscrits & circonscrits. Cela posé, voici ce que fit *Archimede* pour découvrir le rapport approché du diametre à la circonférence. Il inscrivit à un cercle un polygone de 96 côtés, & circonscrivit au même cercle un polygone semblable d'un pareil nombre de côtés; il calcula ensuite par les propriétés des lignes ou des cordes de cercle, la longueur d'un des côtés de chaque polygone, dont il trouva par conséquent le contour, en multipliant le nombre trouvé par 96. Ayant donc supposé que le diametre du cercle étoit l'unité, il trouva que le périmetre de polygone inscrit étoit plus grand que $3 \frac{10}{71}$ du diametre, & que celui du polygone circonscrit étoit moindre que $3 \frac{10}{70}$, ou 3 & $\frac{1}{7}$; d'où il faut conclure que la circonférence, qui est nécessairement entre ces deux contours, est aussi à plus forte raison plus grande que $3 \frac{10}{71}$, & moindre que 3 & $\frac{10}{70}$: ainsi le diametre du cercle étant 7, il faut nécessairement que la circonférence soit plus grande que 21, & moindre que 22, qui vaut trois fois le diametre & $\frac{1}{7}$, de maniere que cette même circonférence est beaucoup plus proche de 22, qu'elle ne l'est de 21. Il est aisé de voir qu'*Archimede* partagea d'abord son cercle en quatre parties

égales, ou, ce qui est la même chose, qu'il chercha la valeur d'une corde de 90 degrés ; ensuite il chercha la corde d'un arc de 45 degrés pour avoir le côté de l'octogone ; il chercha ensuite le côté d'un polygone de 16 côtés, & enfin celui d'un polygone de 32 côtés ; après quoi il chercha la corde d'un arc, qui n'est plus que le tiers du dernier polygone de 32 côtés, & cette corde est le côté de son polygone de 96 côtés ; car il est évident que $32 \times 3 = 96$.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

Figure 86 & 87. 492. *Si l'on a deux polygones semblables* A & B, *la surface du premier sera à celle du second, comme le quarré de la perpendiculaire* AE *au quarré de la perpendiculaire* BH, *ou comme le quarré du rayon* AC *au quarré du rayon* BF.

Soit nommé le côté CD du 1er polygone, a, la perpendiculaire AE, b, le côté FG de l'autre polygone, c, la perpendiculaire BH, d : le circuit du premier polygone sera $6a$, & celui du second sera $6c$: multipliant les moitiés de ces circuits par leurs perpendiculaires, les produits donneront les surfaces des polygones, & l'on aura $3ab$ pour le premier A, & $3cd$ pour le second B : ainsi il faut démontrer que $3ab : 3cd :: bb : dd$.

DEMONSTRATION.

Pour prouver que $3ab : 3cd :: bb : dd$, nous ferons voir que dans cette proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, & que l'on a $3abdd = 3cbbd$. Pour cela, considérez qu'à cause des triangles semblables, ACD & BFG, $a : c :: b : d$, d'où l'on tire $ad = bc$: ainsi mettant ad dans le second membre de la premiere équation à la place de bc, auquel il est égal, il viendra $3abdd = 3abdd$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

493. Puisque les figures A & B sont semblables, les triangles dont elles sont composées le seront aussi ; ainsi le triangle ACE sera semblable au triangle BFH, puisqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun : donc on aura AE : BH :: AC : BF, & $AE^2 : BH^2 :: AC^2 : BF^2$. Mais les polygones sont entr'eux comme les quarrés des perpendiculaires AE, BH, par la présente

ſente propoſition : donc ils ſont auſſi entr'eux comme les quarrés des rayons AC, BF, ou des côtés CD, FG, puiſque ces quarrés ſont en même raiſon que les quarrés des perpendiculaires.

REMARQUE.

494. Cette propoſition ſe doit entendre, non ſeulement de tous les polygones réguliers ſemblables inſcriptibles à un cercle, mais encore de tous les autres autres polygones irréguliers ſemblables, qui ſont entr'eux comme les quarrés des perpendiculaires abaiſſées d'un point ſemblablement placé dans l'une & dans l'autre figure, ſur des côtés homologues. En un mot, les ſuperficies de deux polygones ſemblables quelconques, ſont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues, des lignes tirées dans les figures par des angles égaux, des perpendiculaires abaiſſées ſur deux côtés correſpondans, ou en général des lignes ſemblablement placées.

PROPOSITION V.

THEOREME.

495. *Les ſurfaces de deux cercles ſont entr'elles comme les quarrés des rayons.*

Si l'on a deux cercles X & Y, & que l'on nomme a la circonférence du cercle X, c ſon rayon, b la circonférence du cercle Y, & d ſon rayon, la ſurface du premier ſera $\frac{ac}{2}$, & la ſurface du ſecond ſera $\frac{bd}{2}$. Cela poſé, il faut prouver que $\frac{ac}{2} : \frac{bd}{2} :: cc : dd$. *Figure* 89.

DEMONSTRATION.

Pour prouver que $\frac{ac}{2} : \frac{bd}{2} :: cc : dd$, nous ferons voir que le produit des extrêmes de ces quatre quantités, eſt égal au produit des moyens, ou que $\frac{acdd}{2} = \frac{bdcc}{2}$. Pour cela, faites attention que les circonférences des cercles étant entr'elles comme les rayons (art. 481), on aura $a : b :: c : d$, d'où l'on tire $ad = bc$. Si donc on met dans le ſecond membre de l'équation précédente, ad à la place de bc, on aura $\frac{acdd}{2} = \frac{acdd}{2}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

496. Puiſque les rayons des cercles ſont entr'eux comme les cordes des arcs d'un même nombre de degrés, comme les diametres ou les côtés des polygones ſemblables inſcrits dans ces mêmes cercles : donc les ſurfaces des cercles, qui ſont comme les quarrés des rayons, ſont auſſi entr'elles comme les quarrés des diametres, des cordes d'un même nombre de degrés, comme les quarrés des côtés de polygones ſemblables inſcrits ou circonſcrits à ces cercles.

REMARQUE.

Cette propoſition, ainſi que la précédente, ſont d'un grand uſage dans la Géométrie, & l'on ne peut trop s'appliquer à les concevoir dans toute leur étendue. Quoique l'on puiſſe déduire la propoſition ſuivante de la précédente, nous allons la démontrer en particulier d'une maniere différente, en avertiſſant que l'on pourroit auſſi déduire de cette même propoſition ſuivante, toutes les propriétés des figures ſemblables, puiſque par la définition des figures ſemblables, tous les polygones ſemblables ſont compoſés de triangles ſemblables.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

Figure 92 & 93.

497. *Deux triangles ſemblables* ABC, DEG *ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues, c'eſt-à-dire que l'on aura* $ABC : DEG :: AB^2 : DE^2$, ou $:: AC^2 : DG^2$.

DÉMONSTRATION.

Soient abaiſſées des angles égaux C, G les perpendiculaires CH, GF : le triangle ACB eſt égal au produit de ſa baſe AB par la moitié de la perpendiculaire CH ; & de même le triangle DGE eſt égal au produit de ſa baſe DE par la moitié de la perpendiculaire GF ; on aura donc $ACB = AB \times \frac{CH}{2}$, & $DGE = DE \times \frac{GF}{2}$, & faiſant une proportion avec les termes de ces équations, on aura $ACB : DGE :: AB \times \frac{CH}{2} : DE \times \frac{GF}{2}$. Mais puiſque les triangles ſont ſuppoſés ſemblables, les triangles rectangles ACH, DGF le ſeront auſſi,

ayant un angle égal, outre l'angle droit, l'angle A de l'un égal à l'angle D de l'autre : donc on aura CH : GF :: CA : GD, & l'on a pour les premiers triangles CA : GD :: AB : DE ; donc AB : DE :: CH : GE ; on aura aussi AB : DF :: $\frac{AB}{2}$: $\frac{DE}{2}$; donc en multipliant par ordre les deux dernieres proportions, il viendra $AB^2 : DE^2 :: CH \times \frac{AB}{2} : GF \times \frac{DE}{2}$; donc puisque la derniere raison de cette proportion est la même que la derniere de notre premiere proportion, on aura ACB : CGE :: $AB^2 : DE^2$. C. Q. F. D.

REMARQUE.

498. On peut encore se servir de cette proposition, pour démontrer que le quarré de l'hypoténuse est égal au quarré des deux autres côtés dans un triangle rectangle quelconque, comme ABC : car abaissant de l'angle droit la perpendiculaire BD, on aura trois triangles semblables ABC, ADB, BDC ; & prenant pour côtés homologues de ces triangles rectangles les hypoténuses AC, AB, BC, on aura ABC : ADB : BDC :: $AC^2 : AB^2 : BC^2$; mais le triangle ABC est égal à la somme des triangles ADB, BDC : donc aussi le quarré AC^2 de l'hypoténuse AC sera égal aux quarrés des autres hypoténuses AB, BC, qui sont les côtés du même triangle ABC. *Figure 94.*

PROPOSITION VII.

THEOREME.

499. *Les parallélogrammes sont dans la raison composée des bases & des hauteurs, c'est-à-dire comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.* *Figure 97 & 98.*

DEMONSTRATION.

Ayant les parallélogrammes G & H, si l'on nomme *a* la base du premier, & *b* sa hauteur, *c* la base du second, & *d* sa hauteur, le premier G sera égal au produit *ab*, & le second H sera égal au produit *cd* de sa base par sa hauteur : ainsi on aura G : H :: *ab* : *cd*. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

500. Comme les triangles sont moitiés des parallélogrammes

de même base & de même hauteur, ils seront aussi entr'eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.

COROLLAIRE II.

501. Si les produits ab, cd des bases par les hauteurs sont égaux, les parallélogrammes G, H, qui sont comme ces produits, seront aussi égaux ; aussi-bien que les triangles, qui sont la moitié des mêmes parallélogrammes ; d'où l'on déduit cette proposition générale : deux parallélogrammes ou deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont des bases réciproques à leurs hauteurs ; & réciproquement, si deux triangles ou deux parallélogrammes sont égaux, ils ont des bases réciproques à leurs hauteurs ; car puisque $ab = cd$, on aura $a : c :: d : b$.

COROLLAIRE III.

502. Il suit encore de cette proposition, que si deux triangles ou deux parallélogrammes sont semblables, ils seront entr'eux comme les quarrés de leurs bases ou de leurs hauteurs : car puisque ces triangles sont supposés semblables, les bases & les hauteurs seront proportionnelles : ainsi on aura $a : c :: b : d$, & $a : c :: a : c$, multipliant ces deux proportions par ordre, il viendra $aa : cc :: ab : cd$; donc puisque la raison de a^2 à c^2 est égale à celle de ab à cd, on aura $G : H :: a^2 : c^2$, c'est-à-dire que les parallélogrammes semblables, ou les triangles qui en sont les moitiés, sont entr'eux comme les quarrés de leurs bases, ou comme s'expriment les Géometres en raison doublée de leurs bases.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

503. *Si l'on a trois lignes en proportion continue, je dis que le quarré fait sur la premiere, est au quarré fait sur la seconde, comme la premiere ligne est à la troisieme, c'est-à-dire, en représentant ces lignes par les lettres* a, b, c, *que si l'on a*, $a : b :: b : c$, *on aura* $a^2 : b^2 :: a : c$.

DEMONSTRATION.

Pour prouver que $aa : bb :: a : c$, nous ferons voir que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, ou que $abb = aac$. Pour cela, faites attention que puisque *par hypothese* les trois

lignes sont en proportion continue, on aura $a : b :: b : c$, d'où l'on tire $ac = b^2$. Si donc on multiplie chaque membre de cette équation par a, on aura $a^2c = ab^2$, qui est précisément le produit des extrêmes & celui des moyens de la proportion qu'il s'agissoit de prouver. C. Q. F. D.

Corollaire.

504. Il suit de cette proposition, que si l'on a trois lignes proportionnelles, non seulement le quarré fait sur la premiere est au quarré fait sur la seconde, comme la premiere est à la troisieme; mais que tous polygones semblables, réguliers ou irréguliers, faits sur ces deux lignes, seront entr'eux comme la premiere est à la troisieme: car comme les polygones semblables sont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons ou des côtés homologues, & que *par hypothese*, nos deux premieres lignes sont des côtés homologues de ces polygones semblables, le premier polygone sera au second, comme le quarré de la premiere ligne au quarré de la seconde, ou comme la premiere ligne à la troisieme. D'où il suit, qu'ayant les surfaces de deux polygones semblables, on peut toujours assigner deux lignes qui soient entr'elles, comme ces surfaces.

PROPOSITION IX.

Theoreme.

505. *Si l'on a deux lignes droites, que nous nommerons a & b, je dis que le rectangle compris sous ces deux lignes, est moyen proportionnel entre les quarrés des mêmes lignes, c'est-à-dire que l'on aura* $aa : ab :: ab : bb$.

Demonstration.

Il est certain que la proportion $aa : ab :: ab : bb$, doit avoir lieu, puisque le produit des extrêmes & celui des moyens donnent $aabb = aabb$. C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

Probleme.

506. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.* Figure 95.

Pour trouver une moyenne proportionnelle entre les deux lignes A & B, il faut joindre ces deux lignes, ensorte qu'elles n'en fassent qu'une seule CD, observant de marquer le point E où elles se joignent; il faut ensuite diviser la ligne entiere en deux également au point F, & de ce point, comme centre, décrire un demi-cercle. Présentement si au point E, où les deux lignes se joignent, on élève une perpendiculaire EH, qui aille se terminer à la circonférence, elle sera la moyenne que l'on cherche; ce qui est bien évident, puisque par la propriété du cercle (art. 444), toute perpendiculaire, comme HE, est moyenne proportionnelle entre les parties CE & ED du diametre. Ainsi supposant que la ligne K soit égale à HE, l'on aura les trois lignes proportionnelles A, K, B.

507. Si l'on vouloit avoir une moyenne proportionnelle entre deux nombres donnés, comme 4 & 9, il faudroit multiplier ces deux nombres l'un par l'autre, & extraire la racine du produit 36, que l'on regardera comme le quarré de la moyenne, qui est 6, puisque le quarré de cette moyenne est égal au produit des extrêmes 4 & 9; ce qui donne $4 : 6 :: 6 : 9$.

Si le produit des deux nombres donnés n'est pas un quarré, ce qui arrivera toutes les fois que l'un des nombres, ou tous les deux, ne seront point des quarrés, on ne pourra avoir la moyenne que l'on demande que par approximation, en se servant des décimales pour extraire la racine du produit. Il est encore à remarquer que la Géométrie nous donne exactement ces lignes, quoiqu'elles soient ce qu'on appelle *incommensurables*, c'est-à-dire qu'elles n'aient aucune mesure commune, si petite qu'elle soit, avec les lignes proposées. Par exemple, quoiqu'il puisse arriver que le nombre des parties de la ligne A ne soit pas un nombre quarré, ainsi que ceux des parties de la ligne B, on trouve cependant la longueur exacte de la moyenne K, que l'on ne pourroit pas déterminer en nombres dans cette supposition.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

508. *Trouver une troisieme proportionnelle à deux lignes données.*

Si l'on veut trouver une troisieme proportionnelle à deux

lignes données M & N, enforte que la premiere ligne M foit à la feconde N, comme la même feconde N à celle que l'on cherche; il faut faire à volonté un angle ABC, prendre fur le côté BC la partie BD égale à la premiere M, & la partie DF égale à la feconde N, & fur le côté BA la partie BE égale à la même feconde N, & tirer la ligne ED; fi du point F on mene la ligne FG parallele à la ligne ED, je dis que la ligne EG fera la troifieme proportionnelle demandée. *Figure 100.*

DÉMONSTRATION.

Confidérez que le triangle BGF a fes deux côtés BG, BF coupés proportionnellement par la ligne DE parallele à fa bafe FG, *par conftruction*, & que par conféquent (art. 397) on a BD:DF::BE:EG, mais BE étant égal à DF, *par conftruction*, on aura BD:DF::DF:EG. Ainfi faifant la ligne O égale à EG, on aura les trois lignes continuement proportionnelles M, N, O.

509. Si l'on vouloit trouver une troifieme proportionnelle à deux nombres, il faut quarrer le fecond, & divifer ce quarré par le premier; le quotient fera la troifieme proportionnelle demandée. Si le fecond nombre n'eft pas divifible par le premier, fon quarré ne fera pas non plus divifible par ce même premier nombre: ainfi l'on ne pourra trouver la troifieme proportionnelle que par approximation, en fe fervant des fractions décimales. Surquoi l'on remarquera encore la différence de la Géométrie à l'Arithmétique dans la détermination des quantités, en ce que la premiere donne exactement la longueur des lignes que l'on cherche, fans déterminer le nombre de leurs parties, & la feconde donne leur valeur exacte dans certains cas, en fixant le nombre de leurs parties; & dans d'autres, ne peut la donner que par une approximation, que l'on poufferoit jufqu'à l'infini, fans jamais arriver à la jufte valeur.

On pourroit encore réfoudre le dernier problême d'une autre maniere, en fe fervant du cercle. Qu'il faille, par exemple, trouver une troifieme proportionnelle aux lignes B, K, on prendra la ligne CE égale à la ligne B; fur cette ligne on élevera la perpendiculaire EH égale à la ligne K; on menera la ligne CH, fur laquelle on élevera la droite HD perpendiculaire, qui ira rencontrer le prolongement de la ligne CE en D, & déterminera la ligne ED, qui fera la troifieme proportionnelle

demandée : car il est visible que l'angle CHD étant droit, la droite EH sera moyenne entre les segmens de la base, ou, ce qui revient au même, la droite ED sera troisieme proportionnelle aux lignes CE, EH, ou à leurs égales B, K. C. Q. F. T. & D.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

Figure 101 & 102. 510. *Trouver une quatrieme proportionnelle à trois lignes données.*

Pour trouver une quatrieme proportionnelle aux trois lignes P, Q, R, il faut, comme dans la proposition précédente, faire un angle à volonté CSX ; prendre sur le côté CS la partie SV égale à la ligne P, & la partie VZ sur le même côté égale à la ligne Q, & sur l'autre côté SX, la partie ST égale à la ligne R ; après quoi tirer la ligne TV, à laquelle on menera du point Z la parallele ZX, qui donnera la ligne TX égale à la quatrieme proportionnelle que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Les côtés du triangle ZSX étant coupés par la ligne TV, parallele à la base ZX, l'on aura (art. 393) SV : VZ :: ST : TX. Ainsi faisant la ligne Y égale à TX, l'on aura les quatre lignes proportionnelles, P, Q, R, Y. C. Q. F. T. & D.

511. Pour trouver une quatrieme proportionnelle à trois nombres donnés, il n'y a qu'à faire la Regle de Trois ordinaire, puisque cette Regle n'est autre chose que l'art de trouver une grandeur quatrieme proportionnelle à trois autres données. On va voir dans les problêmes suivans, l'usage qu'on peut faire des précédens, & les propriétés des lignes proportionnelles.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

Figure 97 & 98. 512. *Faire un quarré égal à un rectangle.*

Pour faire un quarré égal à un rectangle AC, il faut chercher une moyenne proportionnelle entre les côtés inégaux AB & BC du rectangle donné, & le quarré de cette moyenne sera égal au rectangle donné. Puisque la ligne DE est moyenne proportionnelle

proportionnelle entre les côtés A B & B C du rectangle A C, il est certain que son quarré D F sera égal au rectangle A C, puisque ce rectangle est égal au produit des extrêmes A B, B C.

COROLLAIRE.

513. Comme nous avons prouvé qu'un cercle est égal à un rectangle compris sous la moitié de la circonférence, & la moitié du diametre (art. 485), il s'ensuit que le quarré d'une ligne qui seroit moyenne proportionnelle entre le demi-diametre & la demi-circonférence, seroit égal au cercle.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

514. *Trouver un quarré qui soit à un autre dans une raison donnée.* *Figure 105 & 106.*

Pour trouver un quarré qui soit au quarré C B dans une raison donnée, par exemple, de 3 à 5, je fais une ligne G H, égale aux trois cinquiemes du côté A B; ensuite entre les lignes A B & G H, je cherche une moyenne proportionnelle E F, sur laquelle je fais le quarré I F, qui sera les trois cinquiemes du quarré C B : car comme les trois lignes A B, E F, G H sont en proportion continue, on aura $AB^2:EF^2::AB:GH$; mais G H est, *par construction*, les trois cinquiemes de A B : donc aussi EF^2 sera les trois cinquiemes du quarré AB^2.

515. Cette proposition doit s'entendre, non seulement des quarrés, mais encore de toutes les figures. Par exemple, si l'on vouloit faire un pentagone irrégulier quelconque semblable à un autre pentagone irrégulier, & qui eût avec lui une raison donnée, on chercheroit une moyenne proportionnelle entre un côté quelconque du pentagone proposé, & une ligne qui auroit avec ce côté, la raison donnée : sur cette moyenne ainsi déterminée, comme côté homologue, on décriroit le pentagone demandé; & l'on trouveroit les autres côtés par une simple Regle de Trois, en se servant des triangles semblables, comme on a vu (art. 510). Cette proposition fournit un moyen pour réduire des figures quelconques de grand en petit, ou de petit en grand, dans un rapport quelconque.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

516. *Trouver le rapport de deux figures semblables.*

Figure 107 & 108. Pour trouver le rapport de deux figures semblables A & B, il faut chercher une troisieme proportionnelle, telle que GH à leurs côtés homologues, CD & EF; le rapport de la ligne CD à la ligne GH, sera le même que celui du polygone A au polygone B.

Pour le prouver, considérez que puisque les polygones A & B sont semblables, on a $A : B :: CD^2 : EF^2$, & que puisque les trois lignes CD, EF, GH sont en proportion continue, on a $CD^2 : EF^2 :: CD : GH$, d'où l'on tire $A : B :: CD : GH$. C. Q. F. T. & D.

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

Figure 109 & 110. 517. *Faire un rectangle égal à un autre qui ait un côté déterminé.*

L'on demande de faire un rectangle égal au rectangle BC, ensorte qu'il ait un de ses côtés égal à la ligne donnée DE.

Pour cela, il faut chercher une ligne qui soit quatrieme proportionnelle à la ligne donnée DE (art. 510), & aux deux côtés AC & AB du rectangle; ensuite si l'on fait un rectangle sous la ligne donnée DE, & sous la quatrieme que l'on aura trouvée, ce rectangle sera égal au rectangle BC.

Pour le prouver, considérez que si l'on a fait le rectangle GH, dont le côté FG soit égal à la proportionnelle trouvée, & le côté FH égal à DE, on aura $FG : AB :: AC : FH$; donc $FG \times FH = AB \times AC$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

518. Il suit de cette proposition, que si l'on a plusieurs rectangles, dont les bases & les hauteurs soient inégales, on pourra les réduire tous à la même hauteur; & après cela, si l'on veut, n'en faire qu'un seul, égal à tous les autres pris ensemble, en lui donnant pour base une ligne égale à la somme de toutes les bases, & pour hauteur, la hauteur commune.

COROLLAIRE II.

519. Comme on peut réduire toutes les figures rectiligne des triangles, & que de chaque triangle on peut faire un rectangle, il suit encore, que si l'on donne la même hauteur aux rectangles provenus des triangles, on pourra, en les réduisant tous dans un seul, faire un quarré égal à une figure rectiligne, composée d'un grand nombre de côtés, & même à la somme de plusieurs figures rectilignes, puisqu'on n'aura qu'à chercher une moyenne proportionnelle entre les côtés du rectangle égal à la figure rectiligne proposée, ou à la somme des figures données.

SCHOLIE.

520. Toutes la théorie des rapports des figures semblables ou non semblables, est fondée sur les propositions que nous venons de démontrer. Mais comme toutes les figures géométriques droites ou courbes sont composées de triangles, pour rendre cette partie encore plus complette, nous allons ajouter deux Théorêmes sur les propriétés des triangles considérés par rapport à leurs superficies, & dont la connoissance ne peut être que très-utile dans la Géométrie pratique.

Le premier que j'ai tiré d'un Livre de M. *Scooten*, Commentateur de la Géométrie de M. *Descartes*, & qu'on ne trouve dans aucun Livre d'Elément, peut-être mis au rang des propositions les plus générales que l'on puisse donner sur les rapports des triangles. J'aurois même pu commencer par cette proposition le Traité des raisons des figures géométriques, & en déduire toutes les propositions que nous venons de voir, si cela ne m'eût engagé dans des changemens trop considérables, aimant mieux le faire ici en peu de mots ; ce qui ne peut qu'affermir les Commençans dans cette partie, qui est absolument nécessaire pour entendre la suite. On peut encore faire un grand usage de cette proposition dans la Géodésie ou division des champs. Rien de plus curieux que la simplicité avec laquelle M. *Scooten* résout plusieurs problêmes, qui sans le secours de cette proposition, paroîtroient très-compliqués. Le second théorême donne la maniere de trouver la surface d'un triangle quelconque, dont on connoît les trois côtés. Nous avons déja vu que cette connoissance suffit pour en avoir la

surface, puisque les trois côtés déterminent la perpendiculaire qu'il faut multiplier par la moitié de la base pour avoir l'aire du triangle (art. 411).

PROPOSITION XVII.

THÉOREME.

Figure 103 & 104. 521. *Deux triangles quelconques* BAC, EDF *qui ont un angle égal, l'un en* A *& l'autre en* D, *compris entre deux côtés quelconques, sont entr'eux comme les produits des côtés qui contiennent l'angle égal.*

DEMONSTRATION.

Sur le côté AC du triangle BAC, soit prise la partie AH = DF, & sur AB la ligne AL = DE, & soient menées les lignes LH, BH. Les triangles LAH, EDF ayant, *par hypothese*, un angle égal compris entre côtés égaux, *par construction*, seront égaux en tout. Cela posé, à cause des triangles AHL, AHB, qui ont même sommet en H, & des triangles ABH, ABC, qui ont même sommet en B, & qui sont entr'eux dans la raison de leurs bases, on aura les proportions suivantes. ALH : ABH :: AL : AB, & ABH : ABC :: AH : AC; donc en multipliant par ordre ALH × ABH : ABC × ABH :: AL × AH, ou ED × DF : AB × AC, ou en divisant les deux premiers termes par la même grandeur ABH, & mettant à la place du triangle ALH son égal DEF, on aura EDF : ABC :: ED × DF : AB × AC. C. Q. F. D.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Des sommets B, E de chaque triangle, soient abaissées sur les bases AC, DF les perpendiculaires BK, EM : les surfaces des triangles étant égales aux produits des hauteurs par les moitiés des bases, seront proportionnelles aux produits des bases par les hauteurs, & donneront ABC : DEF :: AC × BK : DF × EM; mais les triangles ABK, DEM sont semblables, ayant, outre l'angle droit, un angle égal de part & d'autre, l'angle A du premier égal à l'angle D du second : donc AB : DE :: BK : EM, ou en multipliant les deux antécédens par AC, & les deux conséquens par DF, AB × AC : DE × DF :: BK × AC : EM × DF; mais nous venons de voir que ABC : DEF :: BK × AC : EM × DF; donc ABC : DEF :: AB × AC : DE × DF. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

522. Il suit des deux démonstrations précédentes, que la proposition est encore vraie dans le cas où les angles des deux triangles seroient seulement supplément l'un de l'autre. Pour le prouver, soit prolongée la ligne FD en G, de maniere que GD = FD, & soit tirée ED: les triangles GED, DEF, ayant des bases égales, & leur sommet au même point seront égaux en superficie: donc puisque ABC : DEF :: AB × AC : DE × DF, on aura aussi, en mettant à la place du triangle DEF son égal GDE, & à la place du rectangle DE × DF son égal DE × DG, ABC : GDE :: AB × AC : GD × DE.

COROLLAIRE II.

523. Comme les parallélogrammes sont doubles des triangles de même base & de même hauteur, il s'ensuit que deux parallélogrammes quelconques, qui ont un angle égal ou supplément l'un de l'autre, sont entr'eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle.

COROLLAIRE III.

524. Si les côtés qui comprennent l'angle égal sont réciproques, c'est-à-dire si l'on a cette analogie AB : DE :: DF : AC, les rectangles AB × AC, DE × DF seront égaux: donc les triangles ou les parallélogrammes qui sont dans la raison de ces rectangles seront aussi égaux. On voit par-là que les articles 390 & 395 deviennent des corollaires très-simples de cette proposition. On peut donc établir généralement, que *deux triangles ou deux parallélogrammes sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal ou des angles supplémens l'un de l'autre, compris entre des côtés réciproques.*

COROLLAIRE IV.

525. On pourroit aussi déduire de cette proposition la propriété commune à toutes les figures semblables, d'être entr'elles comme les quarrés des côtés homologues: car les figures semblables étant toutes composées de triangles semblables, & les triangles semblables ayant les côtés homologues proportionnels, ceux qui contiendront des angles égaux, seront des côtés homologues: donc puisque ces triangles sont entr'eux

comme les produits de ces côtés, ils seront aussi dans la raison des quarrés des mêmes côtés : car il est évident que si l'on a $AB:AC::DE:DF$, on a aussi $AB:AB::DE:DE$: donc en multipliant par ordre $AB^2:AB\times AC::DE^2:DE\times DF$, & *alternando* $AB^2:DE^2::AB\times AC:DE\times DF$; mais par la présente proposition, $ABC:DEF::AB\times AC:DE\times DF$: donc dans le cas des triangles semblables, $ABC:DEF::AB^2:DE^2$.

COROLLAIRE V.

Figure 103. 526. On peut encore faire usage de cette proposition pour trouver un triangle ALH, qui ait un côté déterminé AL sur le côté AB du triangle ABC, & qui ait avec ce triangle une raison donnée. Par exemple, si je veux que le triangle ALH soit le tiers du triangle BAC, après avoir fait $AB=a$, $AC=b$, $AL=c$, & $AH=x$; j'ai par la proposition présente, $ab:cx::3:1$; donc $3cx=ab$, & dégageant l'inconnue, $x=\frac{ab}{3c}$; d'où il suit que pour avoir x, il faut chercher une quatrieme proportionnelle aux lignes 3AL, AB & AC : car de l'équation $3cx=ab$, on tire cette proportion, $3c:a::b:x$.

AVERTISSEMENT.

Pour faciliter l'intelligence de la proposition suivante, qui seroit un peu compliquée pour des Commençans, nous allons expliquer dans les deux Lemmes suivans tout ce qu'il est nécessaire de sçavoir pour la comprendre aisément.

LEMME PREMIER.

PROBLEME.

Figure 111. 527. *Un triangle* BAC *étant donné, lui inscrire un cercle* EDF.

SOLUTION.

Il est aisé de voir que tout se réduit à trouver un point G au dedans du triangle, qui soit tel qu'en abaissant sur chaque côté les perpendiculaires GD, GE, GF, ces trois lignes soient égales entr'elles : car puisque le cercle doit être inscrit au triangle, chaque côté sera une tangente de ce cercle, & par conséquent perpendiculaire à l'extrêmité des rayons GD, GE, GF. Supposons pour un moment que le point G est celui qu'on demande, & qu'on ait menées les perpendiculaires GD, GE, GF

aux côtés A C, A B, B C ; nous avons déja vu (art. 448) que les parties A E, A D des tangentes, comprises entre le point A de rencontre, & les points E, D de contact sont égales entr'elles, mais les droites E G, D G le sont aussi ; donc les triangles rectangles A G D, A G E sont égaux en tout, puisque les trois côtés de l'un sont égaux aux trois côtés de l'autre : donc les angles E A G, D A G sont égaux ; & par conséquent le centre du cercle se trouvera quelque part sur la ligne A G qui divise l'angle B A C en deux également. On fera voir de la même maniere, que les triangles rectangles B E G, B F G sont égaux, & que le centre du cercle se trouvera dans la ligne B G qui divise l'angle A B C en deux également : donc il sera au point d'intersection des lignes A G, B G. Ainsi pour avoir le centre G, on n'aura qu'à diviser deux angles quelconques A & C, ou bien A & B, chacun en deux angles égaux, & le point G, où les lignes de division se couperont, sera le point demandé. Abaissant ensuite de ce point la perpendiculaire G D sur le côté A C, on aura le rayon avec lequel on pourra décrire le cercle demandé.

LEMME II.

528. *Supposant toutes choses, comme dans le problême précédent, si l'on prolonge le côté* A B *d'une quantité* B K = F C, *je dis* 1°. *que la ligne* A K *sera égale à la demi-somme des trois côtés :* 2°. *Quelle sera la somme des trois différences de la demi-somme des trois côtés à chacun des mêmes côtés ?*

DEMONSTRATION.

1°. Puisque l'on a AE = AD, BE = BF, DC = CF, la somme des trois côtés sera 2AE + 2BE + 2CF, ou 2AE + 2BE + 2BK, puisque BK = CF (*construction*) : donc la demi-somme des trois côtés sera AE + EB + BK = AK. C. Q. F. 1°. D.

2°. Puisque A K est égal à la demi-somme des trois côtés, il est évident que B K est l'excès de la même demi-somme sur le côté A B ; de même A E est l'excès de la demi-somme sur B E + B K, ou sur son égal B F + F C, c'est-à-dire sur le côté B C ; & enfin B E est l'excès de la demi-somme sur B K + A E, ou sur leurs égales D C + A D, c'est-à-dire sur le troisieme côté A C : donc A K est la somme des trois différences de

chacun des trois côtés à la demi-somme des mêmes côtés. C. Q. F. 2°. D.

529. On remarquera encore que le triangle BAC est partagé par les lignes GB, GC, GA en trois triangles AGC, AGB, BGC, qui ont tous pour hauteur le rayon du même cercle : donc la surface de ce triangle sera égale à la somme de celles des trois triangles, c'est-à-dire que l'on aura cette égalité $BAC = \frac{AB}{2} \times GE + \frac{AC}{2} \times GE + \frac{BC}{2} \times GE = \frac{AB + AC + BC}{2} \times GE = AK \times GE$. Cette remarque est encore absolument nécessaire pour l'intelligence du théorême suivant.

PROPOSITION XVIII.

Théoreme.

530. *La surface d'un triangle quelconque* BAC *est égale à la racine quarrée d'un produit de quatre dimensions, fait de la demi-somme des trois côtés, multipliée par les différences de chacun des côtés à la même demi-somme.*

Demonstration.

Sur le côté BC soit prise la ligne BM = FC, qui donnera CM = FB, en ôtant des lignes égales la partie commune FM ; soit prolongé le côté AC d'une quantité CH = BF ou CM : on aura AH = AK, puisque les parties qui composent ces deux lignes sont égales. Aux points K, M, H, soient élevées sur chacune des lignes correspondantes BK, BC, CH les perpendiculaires KI, MI, HI qui se rencontreront toutes en un seul & même point I, & seront toutes égales entr'elles ; car puisque BM = BK, en tirant BI, les triangles rectangles BMI, BKI auront, outre l'angle droit, deux côtés égaux chacun à chacun BM = BK, & le côté BI qui leur est commun : donc KI = MI ; on feroit voir de même que MI = HI, puisque les lignes CM & CH sont égales : on prolongera ensuite la ligne AG, qui passera aussi par le point I, comme il est aisé de le voir, à cause des quadrilateres AEGD, AKIH, qui sont évidemment semblables, puisque les lignes GD, GE sont égales entr'elles, & paralleles aux lignes IH, IK aussi égales entr'elles ; & que les lignes AD, AE sont aussi égales entr'elles, ainsi que les lignes AH, AK.

Cette

Cette construction supposée, il est aisé de voir que les quadrilateres EGBF, MBKI sont semblables, ayant chacun deux angles droits, les côtés EG, GF égaux entr'eux, de même que les côtés BK, BM, l'angle EBF du premier égal à l'angle en I du second, puisqu'ils sont chacun supplément du même angle MBK, & que dans tout quadrilatere, les quatre angles valent quatre droits: donc les triangles GEB, BKI, qui sont les moitiés de ces quadrilateres, seront semblables, & donneront $IK:BK::BE:GE$, d'où l'on tire $IK \times GE = BK \times BE$; mais $GE : IK \times GE :: GE : IK$, & à cause des triangles semblables AEG, AKI; $GE : IK :: AE : AK$; donc $GE^2 : IK \times GE$ ou $BK \times BE :: AE : AK$; & prenant le produit des extrêmes & des moyens $GE^2 \times AK = BK \times BE \times AE$: & multipliant encore chaque membre par AK, $GE^2 \times AK^2 = BK \times BE \times AE \times AK$, d'où l'on déduit, en prenant les racines de part & d'autre, $GE \times AK$, ou (art. 529) la surface du triangle $BAC = \sqrt{BK \times BE \times AE \times AK}$. Or il est visible que les facteurs soumis au radical sont les trois différences de la demi-somme des trois côtés, à chacun de ces côtés, multipliées par la même demi-somme AK: donc la surface du triangle BAC est égale à la racine quarrée d'un produit de quatre dimensions, fait de la demi-somme des trois côtés, multipliée par la différence de la même demi-somme à chacundes trois côtés. C. Q. F. D.

Fin du septieme Livre.





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE HUITIEME,

Qui traite des propriétés des corps, de leurs surfaces, & de leurs solidités.

DÉFINITIONS.

I.

531. ON appelle *prisme*, un solide terminé par deux polygones semblables & égaux, paralleles entr'eux, & par autant de parallélogrammes que le polygone qui lui sert de base a de côtés : tel est le solide cotté A. On appelle *axe du prisme* une droite, telle que CB, tirée du centre C du polygone qui sert de base au centre B du polygone supérieur. Si cette ligne est perpendiculaire à la base du prisme, le prisme est appellé *droit*, & on l'appelle *prisme oblique* ou *incliné*, lorsque cette ligne est inclinée sur le plan de la base.

Planche VI. Figure 112.

II.

532. On appelle *cylindre*, un solide engendré par le mouvement d'un cercle qui se meut parallélement à lui même le long d'une ligne AB. Le cercle inférieur de ce solide est appellé *base du cylindre* ou *cercle générateur*: une ligne menée du centre du cercle inférieur au centre du cercle supérieur est appellée l'*axe du cylindre*: Si cette ligne est perpendiculaire sur le cercle inférieur, le cylindre est appellé *droit*; & si cette ligne est inclinée à la même base, on l'appelle *cylindre oblique*.

Figure 113.

Il suit de cette génération du cylindre, que si l'on coupe un cylindre par un plan parallele à la base de ce cylindre, la coupe représentera un cercle, puisque le cercle générateur a nécessairement passé par ce plan pour engendrer le solide.

III.

533. Si d'un point quelconque A, pris au dehors d'un polygone quelconque, on mene des droites AB, AC, AD, AE à tous les angles d'un polygone, il en résultera un solide, que l'on appelle *pyramide*, dont la base sera le polygone donné, & qui sera terminée par autant de triangles que le polygone a de côtés. Les solides, représentés par les figures 114 & 115, sont des pyramides. Le point A, d'où l'on mene les lignes aux angles de la base, est appellé *le sommet de la pyramide*. Si la base de la pyramide est un polygone régulier, la ligne AH, menée du centre H de cette base au sommet de la pyramide, est appellée *l'axe de la pyramide*. Lorsque cet axe est perpendiculaire à la base, la pyramide est *droite*; autrement elle est *inclinée*. *Figure 115.*

IV.

534. Si le polygone qui sert de base à la pyramide est un cercle, alors on lui donne le nom de *cône*. On peut donc imaginer qu'un cône est formé par la révolution d'une droite CA, qui est attachée fixement en C, & dont l'extrémité inférieure tourne autour d'un cercle ADBA, au dehors duquel est placé le point C. Le cercle ADBA est appellé la *base du cône*; le point C est appellé le *sommet du cône*. Une ligne menée du centre de la base du cône au sommet, est appellée *axe du cône*. Si l'axe est perpendiculaire à la base du cône, le cône est *droit*. Si l'axe est incliné à la même base, le cône est *oblique*. Les figures 116 & 117 représentent des cônes. *Figure 116.*

On peut encore imaginer que le cône droit est formé par la révolution d'un triangle rectangle ADC, autour d'un des côtés de l'angle droit CD; mais on ne peut pas supposer que le cône oblique soit formé par la révolution d'un triangle obliqu'angle, autour de quelqu'un de ses côtés; ainsi la premiere définition étant plus générale, est aussi la meilleure.

V.

535. On appelle *cône tronqué droit*, un solide formé par la

Figure 118. révolution d'un trapezoïde rectangle, tel que F G H I, autour d'un de ses côtés G F, qui soutient les deux angles droits. On peut encore dire qu'un cône tronqué est ce qui reste d'un cône
Figure 117. A B C, après en avoir ôté le petit cône D B E, qui a été coupé par un plan parallele à la base du cône.

VI.

Figure 119. 536. La *sphere* est un solide terminée par une seule surface courbe, qu'on appelle *surface sphérique*, comme A D C B, au-dedans de laquelle il y a un point qu'on appelle *centre de la sphere*, duquel toutes les lignes droites menées à la surface sont égales entr'elles. On peut imaginer que la sphere a été engendrée par la révolution d'un demi-cercle autour d'un diametre. Le demi-cercle engendre la solidité de la sphere, & la demi-circonférence engendre la surface de la même sphere.

VII.

537. *Segment sphérique* ou *portion de sphere*, est un solide compris sous une partie de la surface de la sphere & la surface
Figure 119. d'un cercle; où l'une des deux parties inégales A B C & A D C d'une sphere coupée par un plan qui ne passe pas par son centre. Si le plan de section passe par le centre de la sphere, il la divise en deux segmens égaux, que l'on appelle *hémispheres*. On peut imaginer que le segment sphérique est formé par la révolution d'un segment de cercle autour d'une ligne, qui divise la corde de ce segment en deux parties égales, & qui lui est perpendiculaire.

VIII.

Figure 120. 538. On appelle *zone* une partie A B C D de la surface d'une sphere, terminée par deux cercles B C & A D, de la même sphere paralleles entr'eux.

IX.

539. Le *secteur de sphere* est un solide terminé en pointe au centre de la sphere, qui a pour base une partie de la surface de
Figure 121. la sphere, comme C O H. On peut imaginer que le secteur sphérique a été produit par la révolution d'un secteur de cercle autour d'une ligne qui passe par le centre, & qui divise sa corde en deux parties égales.

X.

540. *Orbe* est un corps sphérique, qui est terminé par deux

superficies sphériques & concentriques, l'une concave, & l'autre convexe, comme le corps qui est borné par les deux superficies sphériques, l'une BCDE, qui est convexe, & l'autre FGHI, qui est concave: ainsi vous voyez que l'orbe est ce qui reste, lorsque d'une grande sphere, comme BCDE on en a ôté une plus petite concentrique à la plus grande, comme FGHI. On peut concevoir un orbe comme formé, par la révolution d'une couronne autour d'un diametre. *Figure* 112.

541. Comme on peut concevoir un orbe d'une épaisseur infiniment petite, il s'ensuit qu'une sphere peut être considérée comme composée d'une infinité d'orbes, dont le plus grand est la surface de la sphere, & le plus petit est celui qui va se terminer à zero, au centre de la sphere.

XI.

542. On appelle *angle solide* celui qui est formé par la rencontre de plusieurs plans qui se terminent à un même point, tel est, par exemple, l'angle E qui est composé des plans BEA, AED, DEC & BEC: pour mieux comprendre cette définition, il faut considérer le sommet des pyramides, les coins des cubes & des parallelepipedes, qui sont des angles solides. Il faut au moins trois plans pour former un angle solide, de même qu'il faut deux lignes pour former un angle plan. *Figure* 127.

PROPOSITION I.

THEOREME.

543. *La surface de tout prisme droit, sans y comprendre les bases, est égale à celle d'un rectangle, qui auroit pour base une ligne* FG *égale à la somme des côtés de la base du prisme, & pour hauteur une ligne* GH *égale à la hauteur* AE *du prisme.* *Figure* 123 & 124.

DEMONSTRATION.

Si le prisme droit a pour base un exagone régulier, il sera renfermé par six rectangles, tels que DE: donc si la ligne FG est égale à la somme des côtés du polygone, pris ensemble, elle sera sextuple du côté AD; & comme les rectangles ED, FH ont la même hauteur, le rectangle FH sera sextuple du rectangle ED, & par conséquent égal à la surface du prisme. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

544. Le cylindre ayant pour base un cercle, que l'on peut regarder comme un polygone d'une infinité de côtés, il s'ensuit que le rectangle qui aura pour base une ligne droite égale à la circonférence du cercle qui sert de base au cylindre, & pour hauteur celle du cylindre, que l'on suppose droit, sera égal à la surface du même cylindre.

On démontreroit de même que la surface d'un prisme droit quelconque, dont la base seroit un polygone irrégulier, comme on voudra, est égale à celle d'un rectangle qui auroit même hauteur que le prisme, & une base égale à la somme des côtés du polygone.

PROPOSITION II.

THEOREME.

Figure 125. & 126. 545. *La surface d'une pyramide droite quelconque, comme* ABC, *est égale à celle d'un triangle, qui auroit pour base une ligne* GI *égale à la somme des côtés du polygone régulier qui lui sert de base, & pour hauteur une ligne* GH *égale à une perpendiculaire* BF *abaissée du sommet de la pyramide sur un des côtés* DE.

DEMONSTRATION.

Imaginons que la pyramide ABCDE a pour base un exagone régulier; comme elle est supposée droite, elle sera renfermée par six triangles égaux au triangle DBE: donc si l'on a un triangle GHI, dont la base HI soit sextuple de la base DE du triangle DBE, & dont la hauteur soit égale à celle du même triangle, la surface de ce dernier triangle GHI sera sextuple de celle du triangle DBE: donc elle sera égale à la surface de la pyramide, sans y comprendre la base. C. Q. F. D.

546. Si la pyramide n'avoit pas pour base un polygone régulier, la perpendiculaire menée du sommet de la pyramide sur chaque côté ne seroit pas la même pour tous les triangles, quoique la pyramide fût droite, & cela arriveroit encore dans le cas où la pyramide ayant pour base un polygone régulier, ne seroit pas droite. Dans ces deux cas, il faut chercher la surface de chacun des triangles en particulier, & la somme de ces surfaces sera la surface de la pyramide.

COROLLAIRE.

547. Un cône droit pouvant être regardé comme une pyramide droite d'une infinité de côtés, il s'ensuit que sa surface sera égale à celle d'un triangle, qui auroit pour base une ligne égale à la circonférence du cercle qui lui sert de base, & pour hauteur une ligne égale au côté du cône.

PROPOSITION III.

THÉOREME.

548. *Les parallelepipedes & les prismes droits sont dans la raison composée des raisons de leurs trois dimensions, ou comme les produits de leurs trois dimensions.*

DEMONSTRATION.

Nous avons vu (art. 26), que pour trouver la solidité des parallelepipedes, il falloit multiplier le produit des deux dimensions de leurs bases par leurs hauteurs. Si donc on a deux prismes, dont l'un soit A & l'autre B, dont les dimensions du premier soient a, b, c; & les dimensions du second d, e, f; le solide du premier prisme, ou ce prisme lui-même, sera égal à abc, & le solide du second prisme, ou ce prime lui-même, sera def: donc on aura $A : B :: abc : def$; mais la raison de abc à def est composée des trois raisons de a à d, de b à e, de c à f: donc les prismes sont en raison composée de leurs trois dimensions, ou comme les produits de leurs dimensions. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

549. Les prismes & les cylindres étant composés d'un nombre infini de plans égaux, & semblables à ceux de leurs bases, on peut dire que puisque le nombre de ces plans est exprimé par la hauteur de ces solides, il faudra, pour en trouver la valeur, multiplier la base par la hauteur: donc puisque la solidité des prismes & des cylindres dépend du produit de leur trois dimensions, il s'ensuit qu'ils seront entr'eux dans la raison composée de celles des mêmes dimensions.

COROLLAIRE II.

550. Il suit encore delà que l'on trouvera toujours le rap-

port des solides de même espece, en multipliant leurs bases par leurs hauteurs : quand je dis de même espece, j'entends, par exemple, les pyramides, les cônes, &c. Car quoique nous n'ayons pas encore donné la maniere de trouver la solidité des pyramides & des cônes, cela n'empêche pas qu'on ne soit convaincu qu'elles dépendent des produits de leur trois dimensions : car si pour trouver le solide d'une pyramide, il faut multiplier la base par le tiers ou la moitié de sa hauteur, il est certain que pour trouver la solidité d'une autre pyramide, il faudra aussi multiplier sa base par le tiers ou la moitié de sa hauteur : ainsi en multipliant de la même maniere les trois dimensions d'une pyramide, & les trois dimensions d'une autre ; si ces produits ne donnent pas les solidités, ils donneront au moins le rapport que ces pyramides ont entr'elles.

PROPOSITION IV.

Theoreme.

Figure 128. 551. *Toute pyramide, comme* ABCDE, *est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur.*

Supposant que la base AC soit un quarré, nous nommerons AD ou DC a, AH ou EF b, & la perpendiculaire EG $\frac{1}{2}a$, puisqu'elle est moitié de IK ou de AD.

Demonstration.

Considérez que si du prisme AK on retranche la pyramide ABCDE, il restera quatre autres pyramides telles que AHIEB, qui sont toutes égales entr'elles, ayant chacune pour base un des rectangles AHIB de la surface du prisme, & pour hauteur une perpendiculaire égale à EG. Or si l'on multiplie aa, qui est la base AC, de la pyramide AEC par sa hauteur EF, qui est b, on aura aab pour le produit de ses trois dimensions ; & multipliant aussi ab, qui est la base de la pyramide AHIEB, par sa hauteur EG, qui est $\frac{1}{2}a$, on aura $\frac{aab}{2}$ pour le produit de ses trois dimensions. Ainsi la pyramide ABCDE est à la pyramide AHIEB, comme aab est à $\frac{aab}{2}$; donc la premiere est double de la seconde (art. 550), puisque ces pyramides sont entr'elles comme les produits de leurs trois dimensions. Mais comme

comme il y a quatre pyramides égales à $\frac{aab}{2}$, leur somme sera $\frac{4aab}{2}$ ou $2aab$, & si l'on joint encore à cette pyramide la pyramide ABCDE $= aab$, on aura le solide entier, égal à $3aab$: donc la pyramide AEC sera le tiers du solide ou prisme droit AK. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

552. Puisque la pyramide ABCDE est le tiers du prisme AK, si l'on coupe cette pyramide par un plan BED, qui passe par le sommet E & les angles opposés de la base, ce plan divisera la pyramide totale en deux autres pyramides égales, & le prisme quarré en deux autres prismes, pareillement égaux entr'eux, puisque chacun a même base & même hauteur : donc puisque la pyramide totale est le tiers du prisme total, la pyramide triangulaire sera aussi le tiers du prisme triangulaire. D'où il suit qu'une pyramide quelconque est toujours le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur, parce que l'on peut concevoir un prisme pentagonal, par exemple, comme composé de cinq prismes triangulaires, & une pyramide pentagonale, comme aussi composée de cinq pyramides triangulaires, & comme chacune sera le tiers du prisme correspondant, la pyramide totale sera aussi le tiers du prisme total.

COROLLAIRE II.

553. Il suit de cette proposition, que pour trouver la solidité d'une pyramide telle que ABCDE, qui a pour base un quarré, il faut multiplier la base, c'est-à-dire le quarré AD, par le tiers de la hauteur de la pyramide, qui est la perpendiculaire CH, ou bien multiplier la base par toute la hauteur, & prendre le tiers du produit.

COROLLAIRE III.

554. Si l'on coupe la pyramide droite ACD par un plan FCG, qui passant par l'axe, soit parallele à un des côtés de la base, la section donnera un triangle isoscele FCG, dont tous les élémens, tels que IK, sont en progression arithmétique; mais comme tous ces élémens sont autant de lignes égales aux côtés des quarrés qui composent la pyramide, il s'ensuit que la pyramide est composée d'un nombre infini de quarrés, dont *Figure* 129.

tous les côtés sont en progression arithmétique ; & comme pour trouver la somme de tous ces quarrés, il faut multiplier le quarré AD par le tiers de la perpendiculaire CH, l'on pourra tirer de ce raisonnement un principe général, qui est que *si l'on a une progression arithmétique infinie, composée de lignes, dont la plus petite va se terminer à* o, *l'on trouvera la somme des quarrés de toutes ces lignes, en multipliant le quarré de la plus grande ligne par le tiers de la grandeur qui exprime la quantité des lignes ou des quarrés.* Comme la suite des nombres naturels est une suite de grandeurs qui croissent en progression arithmétique, on peut par cette proposition, prouver que la somme des quarrés de tous les nombres possibles, depuis zero jusqu'à l'infini, est égale au tiers du cube du dernier nombre que l'on puisse imaginer, ou bien au tiers du cube de l'infini.

Il est bien important de comprendre ce corollaire, parce que nous nous en servirons dans les démonstrations suivantes.

COROLLAIRE IV.

Figure 130. 555. Il suit encore delà, que pour trouver la solidité d'une pyramide droite ABC, qui a pour base un polygone quelconque AC, il faut multiplier la base par le tiers de l'axe BD; car comme cette pyramide est composée d'une infinité de polygones semblables à la base, & tous ces polygones semblables étant dans la raison des quarrés de leurs côtés homologues (art. 493), ou de leurs rayons, tels que EF & AD, lesquels sont les mêmes que les élémens du triangle ABD, on peut dire que ces polygones sont dans la raison des quarrés des lignes d'une progression infinie arithmétique, & que par conséquent pour en trouver la valeur, il faudra multiplier le plus grand polygone AC par le tiers de la perpendiculaire BD.

COROLLAIRE V.

Figure 132. 556. Comme le cône ABC est composé d'une infinité de cercles, qui ont pour rayons les élémens, tels que EF & AD du triangle ABD, il s'ensuit que les cercles étant dans la même raison que les quarrés de leurs rayons, il faudra, pour trouver la valeur de tous les cercles dont le cône est composé, multiplier le plus grand cercle AC par le tiers de la perpendiculaire BD qui en exprime la quantité.

PROPOSITION V.

THEOREME.

557. *Si l'on a deux pyramides*, ABC & HLK, *dont la hauteur* BD *de la premiere soit égale à la hauteur* LO *de la seconde*, *je dis qu'elles seront entr'elles dans la raison de la base* AC *à la base* HK. *Figure* 130 *&* 131.

Supposant que la base AC soit un exagone régulier, & la base HK un quarré, nous nommerons le côté MN, a; la perpendiculaire DG, b; le côté HI ou IK, c; & la hauteur BD ou LO, d. Cela posé, la base AC sera $\frac{6ab}{2}$ ou $3ab$, & la base HK sera cc, & multipliant les deux bases par le tiers de la hauteur commune (art. 553), c'est-à-dire par $\frac{d}{3}$, l'on aura $\frac{3abd}{3}$ pour la valeur de la premiere pyramide ABC, & $\frac{ccd}{3}$ pour la valeur de la pyramide HKL: ainsi il faut démontrer que $abd : \frac{ccd}{3} :: 3ab : cc$.

DEMONSTRATION.

Cette proportion est évidente, puisque le produit des extrêmes est égal à celui des moyens: car $abdcc = \frac{3abdcc}{3} = abdcc$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

558. Les cônes étans des pyramides d'une infinité de côtés, il s'ensuit que lorsqu'ils auront la même hauteur, ils seront dans la raison de leurs bases. Il en sera de même pour les prismes & les cylindres qui sont triples des pyramides ou des cônes de même base & de même hauteur: car si les parties sont entr'elles comme les tous, réciproquement les tous sont entr'eux comme leurs parties de même nom.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

559. *Si l'on a deux prismes* X & Y, *dont les bases & les hauteurs soient réciproques, je dis qu'ils sont égaux.* Pl. VII. *Figure* 133 *&* 134.

DEMONSTRATION.

Pour le prouver, nous suppoſerons que ab eſt la baſe du priſme X, & cd celle du priſme Y, e la hauteur du priſme Y, & f celle du prime X; cela étant, *par hypotheſe*, on a $ab : cd :: e : f$; donc $abf = cde$: or comme le premier membre de cette équation eſt le produit des trois dimenſions du priſme X, & le ſecond le produit des trois dimenſions du priſme Y, il s'enſuit évidemment que ces priſmes ſont égaux. C.Q.F.D.

COROLLAIRE.

560. Il ſuit de cette propoſition, que les cylindres, les pyramides & les cônes qui ont leurs baſes & leurs hauteurs réciproques, ſont égaux chacun à chacun. La démonſtration eſt la même que la précédente.

PROPOSITION VII.

THÉOREME.

Figure 135. & 136. 561. *Une pyramide tronquée, comme* ABED, *eſt égale à une pyramide qui auroit pour baſe un plan égal aux deux quarrés* BE *&* AH, *pris enſemble; plus un plan qui ſeroit moyen géométrique entre ces deux quarrés, & pour hauteur l'axe* FG.

Conſidérant la figure HKLI, comme étant la coupe de la pyramide tronquée, coupée par un plan perpendiculaire à ſa baſe, & qui paſſeroit par ſon ſommet, & le triangle HMI, comme la coupe de la pyramide entiere; nous nommerons le côté AD, a; KL ou BC, b; l'axe MG, c; le petit axe MF de la pyramide KML, d: ainſi l'axe FG de la pyramide tronquée ſera $c-d$, & l'on aura $aa+bb+ab$ pour la baſe de la pyramide égale à la pyramide tronquée; car ab eſt moyen proportionnel entre aa & bb (art. 505). Ainſi il faut prouver que le produit de $aa+bb+ab$ par $\frac{c-d}{3}$, qui eſt $\frac{aac+bbc+abc-aad-bbd-abd}{3}$, eſt égal au ſolide de la pyramide tronquée.

DEMONSTRATION.

Faites attention que la pyramide tronquée eſt égale à la différence de la pyramide entiere & de la pyramide emportée; que la pyramide entiere HMI eſt $\frac{aac}{3}$, & que la petite pyra-

mide KML est $\frac{bbd}{3}$, & que si l'on ôte la petite de la grande, la différence sera la valeur de la pyramide tronquée, qui est $\frac{aac - bbd}{3}$, & qui doit être égale au produit $\frac{aac + bbc + abc - aad - bbd - abd}{3}$; ce qui fournit cette équation, $\frac{aac - bbd}{3} = \frac{aac + bbc + abc - aad - bbd - abd}{3}$.

Pour prouver cette équation, on fera attention qu'à cause des triangles semblables HMI, KML, on a HI:KL::MG:MF, ou $a : b :: c : d$; ce qui donne $ad = bc$: en mettant donc bc à la place de ad dans le quatrieme & sixieme terme du second membre de cette équation, on aura celle-ci $\frac{aac - bbd}{3} = \frac{aac + bbc + abc - abc - bbd - bbc}{3}$, dans laquelle, effaçant ce qui se détruit, on aura $\frac{aac - bbd}{3} = \frac{aac - bbd}{3}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

562. Il suit de cette proposition, que pour trouver la valeur d'une pyramide quarrée tronquée, il faut multiplier le côté de la base inférieure de cette pyramide par le côté de la base supérieure, pour avoir le plan ab, moyen entre les deux, & ajouter ce plan à la somme des deux bases inférieure & supérieure, puis multiplier le tout par le tiers de la perpendiculaire FG.

REMARQUE.

563. Si la base de la pyramide n'étoit pas un quarré, pour avoir le plan moyen, il faudroit multiplier les deux plans l'un par l'autre, & en extraire la racine: mais on peut trouver ce plan d'une maniere plus simple, comme on le va voir.

Supposons que la base de la pyramide est un pentagone régulier, la base supérieure de la pyramide sera aussi un pentagone régulier, & semblable à celui de la base inférieure, parce que l'on suppose la pyramide coupée par un plan parallele à cette base. Soit $2a$ le contour du premier polygone, & b la perpendiculaire qui mesure la hauteur d'un triangle: soit pareillement $2c$ le contour du polygone, qui est la base de la pyramide emportée, & d la perpendiculaire qui mesure la hauteur d'un triangle: on aura la surface du premier polygone, en multipliant la hauteur d'un triangle par la moitié du contour:

on aura de même la surface du second polygone, ou de la base supérieure, en multipliant sa perpendiculaire par la moitié du contour (art. 483). La base inférieure sera donc ab, & la base supérieure cd: multipliant ces deux surfaces l'une par l'autre, le produit sera $abcd$, dont la racine donneroit le moyen cherché entre les deux bases: mais je fais attention que puisque ces polygones sont semblables, leurs contours, ou les moitiés de ces contours seront entr'elles comme les perpendiculaires: on aura donc $a:b::c:d$, d'où l'on tire $ad=bc$. Si donc dans le produit $abcd$, on met à la place de bc le produit ad, qui lui est égal, on aura $aadd$ pour le quarré du plan moyen géométrique entre les deux bases, dont la racine ad, que l'on peut prendre sur le champ, donne ce même plan moyen. D'où il suit, que pour trouver un polygone quelconque semblable à deux autres polygones semblables entr'eux, & qui soit moyen géométrique entre ces deux polygones, il faut multiplier la moitié du contour du plus grand par la perpendiculaire de l'autre, ou le demi-contour du plus petit par la perpendiculaire du plus grand. J'ai insisté sur cette remarque, parce qu'elle donne une méthode fort commode de trouver une surface moyenne géométrique entre deux autres surfaces semblables, & que d'ailleurs on ne le trouve pas dans les autres élémens. Par exemple, pour trouver un cercle moyen géométrique entre deux cercles donnés, dont les rayons sont a & b, les circonférences ac & ad, le cercle moyen sera également ad ou bc, que l'on trouve sur le champ, sans être obligé d'extraire de racines.

COROLLAIRE II.

564. Comme un cône tronqué est composé d'une infinité de cercles, qui sont tous dans la raison des quarrés qui composent une pyramide tronquée, il s'ensuit que pour en trouver la solidité, il faut chercher un cercle moyen entre les deux cercles opposés, ajouter cette somme avec les deux qui servent de base, & multiplier le tout par le tiers de l'axe compris entre les deux cercles; il faut aussi entendre la même chose de toute autre pyramide tronquée, soit que sa base soit réguliere, soit qu'elle soit irréguliere.

LEMME.

565. *Une ligne moyenne proportionnelle entre les parties* E G *&* G F *du diametre* E F *d'un cercle, sera le rayon d'un cercle égal à la couronne* X. Figure 137.

DEMONSTRATION.

Considérez que par la nature du cercle, la ligne GH est moyenne proportionnelle entre les parties EG & GF du diametre; & à cause du triangle rectangle DGH, on a $GH^2 = DH^2 - DG^2$: & comme les cercles sont en même raison que les quarrés de leurs rayons, on aura le cercle de GH égal au cercle de DH moins le cercle de DG; mais la couronne est aussi égale à la différence des cercles décrits du rayon DH & du rayon DG: donc la couronne est égale au cercle du rayon GH, ou d'une ligne moyenne entre les parties du diametre. C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

566. *Si l'on a une demi-sphere* A E D *inscrite dans un cylindre* A B C D, *je dis que la demi-sphere est égale aux deux tiers du cylindre.* Figure 138.

Prolongez le diametre BC jusqu'en F, ensorte que BF soit égale à BA, & tirez la ligne FA, qui donnera le triangle isoscele ABF.

DEMONSTRATION.

Si l'on suppose que la demi-sphere & le cylindre sont coupés par un plan GL parallele à la base AD, cette section formera la couronne GH, & si l'on abaisse du point H la perpendiculaire HI sur le diametre AD, elle sera, *par le lemme précédent*, le rayon du cercle égal à la couronne GH, puisqu'elle est moyenne proportionnelle entre les parties AI & ID, ou GH & HL qui leur sont égales. Or comme les lignes HI, GA, GK sont égales, *par construction*, il s'ensuit que la couronne GH sera égale au cercle, qui auroit pour rayon la ligne correspondante GK, qui est un des élémens du triangle ABE; & comme le triangle est composé d'autant d'élémens qu'il y a de couronnes dans l'espace qui est entre la demi-sphere & le

cylindre. La somme des élémens & des couronnes étant exprimée par la ligne BA, il s'ensuit que tous les cercles qui auront pour rayons les élémens du triangle, vaudront, pris ensemble, toutes les couronnes; & comme pour trouver la valeur de tous ces cercles, il faut multiplier le cercle du plus grand élément FB par le tiers de la ligne BA (art. 554), il faudra donc pour trouver la somme de toutes les couronnes, multiplier la plus grande couronne BC, qui est le cercle qui sert de base au cylindre, par le tiers de la ligne AB, hauteur du cylindre; ce qui fait voir que toutes les couronnes, prises ensemble, sont égales au tiers du cylindre, & que par conséquent la demi-sphere en est les deux tiers. C. Q. F. D.

Corollaire I.

567. Puisqu'une demi-sphere est les deux tiers du cylindre où elle seroit inscrite, c'est-à-dire de même base & de même hauteur, il s'ensuit que pour en trouver la solidité, il faut multiplier son plus grand cercle AD par les deux tiers du rayon ME.

Corollaire II.

568. Une demi-sphere étant les deux tiers d'un cylindre de même base & de même hauteur, une sphere sera par conséquent les deux tiers du cylindre, qui auroit pour base le grand cercle de la sphere, & pour hauteur le diametre: ainsi il faut, pour trouver la solidité d'une sphere, *multiplier son grand cercle par les deux tiers du diametre*, ou bien multiplier le grand cercle par le diametre, & prendre les deux tiers du produit.

Corollaire III.

569. Si l'on considere qu'un quart de cercle est composé
Figure 139. d'un nombre infini d'élémens, tels que DE, on verra que si le quart de cercle fait une révolution autour du rayon AB, il
Figure 142. décrira une demi-sphere telle que X, qui sera composée d'une infinité de cercles, dont tous les élémens du quart de cercle seront les rayons. Or comme les cercles sont dans la même raison que les quarrés de leurs rayons, & que pour trouver la valeur de tous les cercles, qui ont pour rayon les élémens du quart de cercle, il faut multiplier le cercle du plus grand rayon BC par les deux tiers du demi-diametre AB, il suit delà, que pour

pour trouver tous les quarrés des élémens du quart de cercle AC, il faut multiplier le quarré du plus grand élément par les deux tiers de la ligne AB, & l'on peut tirer de ce raisonnement le principe général suivant, qui est que, *dans une suite qui seroit composée des élémens infinis du quart de cercle, la somme de tous les élémens seroit égale au produit du quarré du plus grand élément, c'est-à-dire du rayon par les deux tiers du même rayon.*

PROPOSITION IX.

THEOREME.

570. *Les solidités des spheres sont dans la même raison que les cubes de leurs diametres.* *Figure* 143.

Si l'on nomme le diametre AB, a, sa circonférence, b, le diametre CD, c, & sa circonférence, d, la superficie du grand cercle de la premiere sphere sera $\frac{ab}{4}$, puisqu'il faut multiplier la demi-circonférence par le rayon pour avoir la surface d'un cercle; de même la superficie du grand cercle de la seconde sphere sera $\frac{cd}{4}$ multipliant ensuite l'un & l'autre, chacun par les deux tiers de son diametre, l'on aura $\frac{2a^2b}{12}$, ou $\frac{a^2b}{6}$ pour la solidité de la premiere sphere (art. 568), & par la même raison $\frac{c^2d}{6}$ pour la solidité de la seconde sphere: il faut donc démontrer que $\frac{aab}{6} : \frac{ccd}{6} :: a^3 : c^3$.

DEMONSTRATION.

Pour prouver que $\frac{aab}{6} : \frac{ccd}{6} :: a^3 : c^3$, nous ferons voir que dans ces quatre termes le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, c'est-à-dire que $\frac{aabc^3}{6} = \frac{a^3dcc}{6}$. Pour cela, considérez que les diametres des cercles étant en même raison que leurs circonférences (art. 481), on aura $a:b::c:d$, d'où l'on tire $ad=bc$, & que si l'on met ad à la place de bc dans le premier membre de l'équation précédente, elle deviendra, en multipliant chaque membre par 6, $aaadcc = aaadcc$. C.Q.F.D.

DÉFINITION.

571. On appelle corps ou solides *semblables* ceux dont

toutes les dimenſions ſont proportionnelles, par exemple, deux pyramides ſont ſemblables, lorſqu'elles ont chacune pour baſes des polygones ſemblables, & que leurs axes ſont diſpoſés de la même maniere par rapport au plan de leur baſe, & ſont proportionnels aux côtés homologues, ou aux rayons de ces polygones : car il faut bien faire attention que les axes de deux pyramides, ou même leurs hauteurs, peuvent être proportionnelles à leurs rayons, ou aux côtés homologues des baſes ſemblables, ſans que ces pyramides ſoient des corps ſemblables ; ce qui arriveroit ſi l'une des pyramides étoit droite & l'autre oblique.

Corollaire.

572. Il ſuit de la définition précédente & de la derniere propoſition, que toutes les pyramides, priſmes, cylindres, ou cônes ſemblables, ſeront entr'eux comme les cubes des dimenſions homologues ; de leurs axes, par exemple, de leurs hauteurs, ou, comme s'expriment les Géometres, dans la raiſon triplée de leurs dimenſions homologues.

Remarque.

Il pourroit arriver, comme nous l'avons déja inſinué, que deux corps qui ont des baſes ſemblables, fuſſent entr'eux comme les cubes de leurs hauteurs, ſans qu'on en puiſſe conclure qu'ils ſont ſemblables. Imaginons deux priſmes, qui ont chacun pour baſe des pentagones ſemblables, & des hauteurs proportionnelles aux côtés homologues de ces pentagones, mais le premier droit, & le ſecond oblique. Soit $2a$ le contour de la baſe du premier ; b, la perpendiculaire qui meſure la hauteur d'un des triangles de la baſe, & c ſa hauteur : ſoit de même $2d$ le contour du polygone qui ſert de baſe au ſecond priſme, f la hauteur d'un triangle, & g la hauteur de ce priſme. La ſolidité du premier ſera abc, & celle du ſecond ſera dfg, puiſqu'il faut multiplier la baſe de chacun par ſa hauteur, & l'on auroit dans ce cas $abc : dfg :: a^3 : d$; ce qu'il eſt aiſé de prouver, en faiſant voir que le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens, ou que $abcd = dfga$: car puiſque les polygones qui ſervent de baſes ſont ſemblables, leurs contours ou les moitiés de ces contours ſont proportionnels aux perpendiculaires qui meſurent les hauteurs des triangles : donc

$a:b::d:f$; donc $af = bd$, & puisque, *par hypothese*, les hauteurs de ces prismes sont proportionnelles aux circuits des bases, on aura $a:c::d:g$; donc $ag = cd$. Si dans le premier membre de l'équation, qu'il faut prouver, on met af à la place de bd, & ag à la place de cd, il viendra celle-ci, $a^3dfg = a^3dfg$, qui fait voir que ces prismes sont entr'eux comme les cubes des côtés de leurs bases ou de leurs rayons, quoiqu'ils ne soient pas semblables. Il est donc vrai de dire que lorsque deux solides sont semblables, ils sont entr'eux comme les cubes des côtés homologues de leurs bases, ou comme les cubes de leurs hauteurs; mais de ce que deux solides seroient entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues ou de leurs hauteurs, il ne s'ensuit pas qu'ils soient semblables.

On a supposé dans cette remarque & dans ce qui précede, qu'un prisme oblique est égal au produit de sa base par sa hauteur; ou, ce qui revient au même, que deux prismes sont égaux, lorsqu'ils sont compris entre deux plans paralleles : si l'on veut se convaincre de cette vérité, il n'y a qu'à faire attention qu'un prisme peut être engendré par le mouvement d'un parallélogramme qui se meut parallélement à lui-même, & comme les parallélogrammes inclinés sont égaux au rectangle de même base, & compris entre les mêmes paralleles, il s'ensuit que les prismes droits & obliques, engendrés par les mouvemens de ces surfaces, seront aussi égaux, puisque les surfaces génératrices sont égales, & parcourent le même espace parallélement à elles-mêmes.

PROPOSITION X.

THEOREME.

573. *La surface d'une demi-sphere* AED *est égale à celle du cylindre* ABCD, *dans lequel elle est inscrite.* Figure 140 & 141.

Supposant que le cylindre AC & le cône GHI ont la même base & la même hauteur, nous nommerons a les lignes égales FE, FD, KH, KI, & b les circonférences AD & GI. Cela posé, on aura $\frac{ab}{2}$ pour la valeur du cercle AD ou GI, qui étant multiplié par les deux tiers de FE $\left(\frac{2a}{3}\right)$ donnera $\frac{2aab}{6} = \frac{aab}{3}$ pour la valeur de la demi-sphere (art. 567 & 568), &

multipliant $\frac{ab}{2}$ par le tiers de HK $(\frac{a}{3})$, il viendra $\frac{aab}{6}$ pour la ſolidité du cône GHI

DEMONSTRATION.

Si l'on imagine la demi-ſphere, comme étant compoſée d'une infinité de petits cônes, qui ont leurs baſes égales, répandues ſur la ſurface de la ſphere, & dont tous les ſommets venant aboutir au centre F, ont pour hauteur commune le rayon, on pourra dire que tous ces petits cônes ſont égaux, pris enſemble, à un ſeul qui auroit pour baſe la ſurface de la ſphere, & pour hauteur le rayon. Or comme la valeur de ce cône, égal à la demi-ſphere, eſt $\frac{aab}{3}$, & que celle du cône GHI eſt $\frac{aab}{6}$, ces deux cônes ayant la même hauteur, il s'enſuit qu'ils ſeront dans la raiſon des baſes, c'eſt-à-dire comme le cercle GI eſt à la ſurface de la ſphere, que l'on trouvera, en diſant : Comme $\frac{aab}{6}$, valeur du cône GHI, eſt à $\frac{aab}{3}$, valeur du cône égal à la ſphere, ainſi $\frac{ab}{2}$, baſe du cône GHI, eſt à la baſe du ſecond cône, ou autrement à la ſurface de la demi-ſphere, que l'on trouvera $\frac{6a^3b^2}{6a^2b} = ab$, qui eſt un rectangle égal à la ſurface du cylindre, puiſqu'il eſt compris ſous la hauteur a & la circonférence b. C. Q. F. D.

AUTRE DEMONSTRATION.

Conſidérez que ſi du cylindre AC l'on retranche le cône *Figure* 140. BFC, qui en eſt le tiers, le ſolide ABFCD qui reſtera, que nous nommerons *entonnoir*, en ſera les deux tiers; & comme la demi-ſphere inſcrite eſt auſſi les deux tiers du cylindre, elle ſera par conſéquent égale à l'entonnoir. Mais ſi l'on imagine l'entonnoir compoſé d'une infinité de petites pyramides, dont toutes les baſes ſont à la ſurface du cylindre, & dont la hauteur commune eſt le rayon FD, il s'enſuit que toutes les pyramides de la demi-ſphere étant égales à toutes celles de l'entonnoir, toutes les baſes des unes, priſes enſemble, ſeront égales à toutes les baſes des autres, auſſi priſes enſemble, puiſque ces pyramides ont la même hauteur ; mais toutes les baſes des unes valent la ſurface de la ſphere, & toutes les baſes des

autres valent la surface du cylindre : donc la surface de la sphere est égale à la surface du cylindre qui lui est circonscrit. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

574. La surface du cylindre A C ayant pour base la circonférence du grand cercle de la sphere, & pour hauteur le rayon, il s'ensuit que la surface d'une demi-sphere est égale au rectangle compris sous une ligne droite égale à la circonférence de son grand cercle, & sous le rayon; & que par conséquent la surface d'une sphere est égale au rectangle compris sous une ligne égale à la circonférence de son grand cercle & sous son axe : ainsi pour trouver la surface d'une sphere, il faut multiplier le diametre de son grand cercle par sa circonférence.

COROLLAIRE II.

575. Le grand cercle d'une demi-sphere étant la moitié du rectangle compris sous la circonférence & sous le rayon, il s'ensuit que la surface d'une demi-sphere est double de son grand cercle; & par conséquent la surface de la sphere entiere est quadruple de celle du même grand cercle.

COROLLAIRE III.

576. Comme les cercles sont dans la même raison que les quarrés de leurs rayons (art. 495), il s'ensuit qu'un cercle qui aura un rayon double d'un autre, aura une surface quadruple : par conséquent la surface d'une sphere est égale à celle d'un cercle, qui auroit pour rayon l'axe de la même sphere.

COROLLAIRE IV.

577. Comme les surfaces de spheres sont égales à des cercles qui auroient pour rayons les diametres des spheres, & ces cercles étant comme les quarrés de leurs rayons, qui sont ici les diametres des spheres, il s'ensuit que les surfaces des spheres sont entr'elles comme les quarrés de leurs diametres.

PROPOSITION XI.

THEOREME.

578. *La solidité d'une zone* ABCD *est égale aux deux tiers du cylindre* AEFD *du grand cercle* AD, *plus au tiers du cylindre* GBCH *du plus petit cercle* BC. *Figure 144.*

DÉMONSTRATION.

Comme l'on trouve la valeur de toutes les couronnes qui ſont entre la zone & le cylindre AEFD, en multipliant la plus grande couronne EB par le tiers de la ligne EA ou OI (art. 566), il s'enſuit que ce produit eſt égal au tiers de l'eſpace EG ou FH qui regne entre les deux cylindres AEFD GBCH; & que par conſéquent la partie ABG de la zone qui regne autour du cylindre en eſt les deux tiers. Or ſi l'on retranche de ce cylindre le cône BIC, qui en eſt le tiers, il reſtera l'entonnoir GBICH, qui en ſera les deux tiers, ainſi la partie ABICD de la zone vaudra les deux tiers du cylindre AEFD; mais comme le cône BIC, qui fait auſſi partie de la zone, eſt le tiers du cylindre GBCH, il faut ajouter ce cône aux deux tiers du cylindre AEFD pour avoir la ſolidité de la zone: ainſi cette ſolidité eſt égale aux deux tiers du cylindre AEFD, plus au tiers du cylindre GBCH. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Figure 145. 579. Il ſuit de cette propoſition, que ſi l'on coupe une demi-ſphere inſcrite dans un cylindre, par un plan FG, parallele à la baſe AE, la partie ABCDE (qui eſt la différence de la demi-ſphere au ſecteur ſphérique CBHD) eſt égale à l'entonnoir AFCGE du cylindre correſpondant AG, puiſque l'une & l'autre ſont les deux tiers du même cylindre AG.

COROLLAIRE II.

580. Il ſuit encore delà que la ſolidité d'un ſecteur ſphérique tel que CIBP, eſt égale aux deux tiers du cylindre EFLK, qui a pour baſe le grand cercle de la ſphere, & pour hauteur la fleche PO du ſegment ſphérique BPC, plus au tiers du cylindre GBCH: car puiſque la demi-ſphere eſt les deux tiers du cylindre qui lui eſt circonſcrit, & que la zone ABCD eſt les deux tiers du cylindre AEFD, plus le tiers du cylindre GBCH, il faut que le ſecteur CIAP ſoit les deux tiers du cylindre EKLF, plus le tiers du cylindre GBCH. *Figure* 144.

COROLLAIRE III.

581. Il ſuit encore de cette propoſition, que le ſegment ſphé-

tique B P C est égal aux deux tiers du cylindre E K L F, moins le tiers du cylindre G B C H : car la demi-sphere entiere étant les deux tiers du cylindre A K L D, sera aussi les deux tiers des cylindres A E F D & E K L F, dont la somme est égale au cylindre circonscrit ; mais la zone est égale aux deux tiers du cylindre A E F D, plus au tiers du cylindre G B C H : donc en ôtant la zone de la demi-sphere, on aura pour le solide de la calotte deux tiers du cylindre E K L F, moins le tiers du cylindre G B C H ; d'où il suit que le solide d'une calotte sphérique est les deux tiers d'un cylindre qui auroit pour base le grand cercle de la sphere, & pour hauteur, la fleche P O de la calotte, moins un cône, qui auroit pour base le cercle ou la base de la calotte, & pour hauteur le rayon I P, moins la fleche P O.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

582. *Si l'on coupe une demi-sphere inscrite dans un cylindre par un plan* F G *parallele à la base* A E, *je dis que la surface de la zone* A B D E *est égale à celle du cylindre correspondant* A G. *Figure* 145.

DEMONSTRATION.

L'entonnoir A F C G E étant égal à la partie A B C D E de la zone (art. 579), si l'on imagine l'entonnoir composé d'une infinité de petites pyramides qui ont toutes leurs bases dans la surface du cylindre A G, & pour hauteur le rayon C E ; & la partie A B C D E de la demi-sphere, comme étant aussi composée de petites pyramides, dont les bases sont dans la surface de la zone, & qui ont pour hauteur commune le rayon C E, il s'ensuivra (toutes les pyramides d'une part étant égales à toutes celles de l'autre, & ayant toutes la même hauteur) que nécessairement toutes les bases d'une part seront égales à toutes les bases de l'autre, & qu'ainsi la surface de la zone A B D E sera égale à celle du cylindre A F G E. C. Q. F. D. *Figure* 145.

COROLLAIRE I.

583. Comme la surface de la demi-sphere A H E est égale à celle du cylindre A I, & que la surface de la zone A B D E est égale à celle du cylindre A G, il s'ensuit que la surface du segment B H D de la sphere, est égale à celle du cylindre cor-

respondant FI, ou bien au rectangle compris sous une ligne égale à la circonférence du grand cercle de la sphere, & sous la partie HK.

COROLLAIRE II.

584. Il suit encore de cette proposition, que si l'on coupe une demi-sphere inscrite dans un cylindre par un plan parallele à la base, les parties de la surface de la demi-sphere seront égales aux zones correspondantes du cylindre.

COROLLAIRE III.

585. Les surfaces des cylindres FI & AG ayant des bases égales, seront dans la même raison que leurs hauteurs HK & KC; & comme le premier cylindre est égal à la partie de la surface BHD de la demi-sphere, & le second à la partie ABDE, il s'ensuit que les parties de la surface de la demi-sphere sont dans la même raison que les parties HK & KC du demi-diametre, la demi-sphere étant coupée par un plan BD parallele à son grand cercle.

586. L'on peut dire encore que si l'on coupe une sphere par un plan perpendiculaire à l'axe, les parties de la surface sphérique seront dans la même raison que les parties de l'axe.

PROPOSITION XIII.

THÉOREME.

587. *Lorsque trois lignes a, b, c sont en proportion continue; le parallelepipede fait sur ces trois lignes, est égal au cube fait sur la moyenne : ainsi il faut prouver que si l'on a, $a : b :: b : c$, on aura $abc = bbb$.*

DEMONSTRATION.

Puisque par hypothese $a : b :: b : c$, on aura $ac = bb$: ainsi en mettant dans l'équation $abc = bbb$, ac à la place de bb, on aura $abc = abc$. C. Q. F. D.

PROPOSITION XIV.

THÉOREME.

588. *Lorsque quatre lignes sont en progression géométrique, le cube fait sur la premiere, est au cube fait sur la seconde, comme la*

la premiere ligne est à la quatrieme, c'est-à-dire que si l'on a $\div a.b.c.d$, *on aura aussi* $aaa:bbb::a:d$.

DEMONSTRATION.

Considérez que dans la progression $\div a.b.c.d$, les trois premiers termes donnent $ac = bb$, puisque l'on a $a:b::b:c$, & que l'on aura aussi $ad = bc$, puisque $a:b::c:d$. Ainsi pour prouver que $a^3:b^3::a:d$, il suffit de faire voir que le produit des extrêmes & celui des moyens donnent $a\,d = ab$. Pour cela, il n'y a qu'à mettre ac à la place de bb dans le second membre de l'équation, & bc à la place de ad dans le premier, & l'on aura $aabc = aabc$. C. Q. F. D.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

589. *Trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données.* *Figure* 136.

SOLUTION.

Pour trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données AB & CD, il faut faire un rectangle sous les deux lignes, tel que EF soit égale à CD, & EG égal à AB; ensuite prolonger indéfiniment les côtés EF, EG, & du centre I du rectangle, décrire un cercle de maniere que la circonférence venant couper les lignes prolongées GK & FL, on puisse mener du point K au point L une ligne KL, qui ne fasse que toucher l'angle H, & l'on aura les lignes GK & FL, qui seront moyennes proportionnelles entre GE & EF, c'est-à-dire entre les données AB & CD.

DEMONSTRATION.

Considérez que si l'on abaisse les perpendiculaires IM & IN, la corde OL sera divisée en deux également au point M (art. 423) aussi-bien que la ligne EF, & que par conséquent OE est égale à FL, & que KP étant divisée en deux également au point N, aussi-bien que GE, GK sera égale à EP. Cela posé, comme les triangles OEP, HFL, KGH sont semblables, on aura HF : FL :: EO : EP; mais puisque OE est égal à FL, on aura HF : FL :: FL : EP; & comme les deux triangles semblables EOP, GKH donnent encore

OE : EP :: GK : GH, si à la place de EP on met GK, qui lui est égal, on aura OE : GK :: GK : GH ; ce qui prouve qu'il y a même raison de HF à FL, que de FL à GK, & que de GK à GH, & que par conséquent les lignes FL & GK sont moyennes proportionnelles entre GE & EF. C. Q. F. D.

REMARQUE.

590. Le problême précédent est celui qu'on appelle communément la *duplication du cube*, parce qu'il sert à faire un cube double d'un autre, ou qui ait avec lui une raison donnée ; il seroit à souhaiter qu'on pût le résoudre géométriquement sans tâtonner : car on peut aisément reconnoître dans la construction précédente, qu'il faut décrire plusieurs cercles avant d'en trouver un, dont la circonférence venant à couper aux points K, L les lignes prolongées, l'on puisse tirer la ligne KL, qui ne fasse que toucher l'angle H ; il est vrai qu'on peut encore le résoudre d'une autre façon, comme on le verra à la suite des sections coniques. Mais quoique la méthode que nous donnerons soit plus géométrique que celle-ci, elle ne laisse pas d'avoir ses difficultés ; cependant comme on se sert plus volontiers des nombres que des lignes dans la pratique, l'on va voir dans le problême suivant la maniere dont on peut trouver en nombres deux grandeurs moyennes géométriques entre deux nombres donnés.

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

591. *Trouver entre deux nombres donnés deux moyennes proportionnelles.*

Pour trouver entre deux nombres deux moyennes proportionnelles, il faut cuber le premier nombre, & faire une Regle de Trois, dont les deux premiers termes soient le premier & le second nombre donnés, le troisieme le cube du premier nombre donné, & le quatrieme terme étant trouvé, sera le cube de la premiere moyenne proportionnelle : ainsi pour trouver cette premiere moyenne, il faudra extraire la racine cube du quatrieme terme. Pour trouver ensuite la seconde moyenne, il faudra chercher une moyenne entre cette premiere trouvée & le dernier nombre donné.

Ainſi pour trouver deux moyennes proportionnelles entre 2 & 16, je cube le premier nombre 2, qui donne 8, & je fais la proportion $2 : 16 :: 8 : \frac{8 \times 16}{2} = 4 \times 16 = 64$, dont la racine cube eſt 4, que je regarde comme la premiere de mes deux moyennes proportionnelles ; pour avoir la ſeconde, je cherche un moyen géométrique entre cette premiere 4, & le ſecond nombre donné 16, en faiſant $4 : x :: x : 16$, d'où je tire $xx = 64$, & $x = 8$ en prenant la racine, mes deux moyennes ſeront donc 4 & 8 : en effet, l'on a la progreſſion $\div 2 : 4 :: 8 : 16$.

Si les nombres donnés étoient tels qu'on ne pût pas dans les opérations extraire les racines cubes & quarrées avec exactitude, il faudroit en ce cas ſe ſervir des décimales, ſuivant les méthodes expliquées (art. 158 & 159), afin d'approcher le plus près qu'il eſt poſſible des racines, & d'avoir le plus exactement qu'on pourra les moyennes demandées. Comme les Commençans pourroient ne pas entendre d'eux-mêmes la raiſon des opérations que nous venons d'enſeigner pour trouver deux moyennes proportionnelles entre deux nombres donnés, en voici la démonſtration.

L'on a vu (art. 588), que lorſque quatre lignes ſont en progreſſion géométrique, le cube fait ſur la premiere eſt au cube fait ſur la ſeconde, comme la premiere ligne à la quatrieme. On peut donc dire *invertendo*, la premiere eſt à la ſeconde, comme le cube de la premiere eſt au cube de la ſeconde : ainſi connoiſſant la premiere ligne & la quatrieme, avec le cube de la premiere, on a les trois premiers termes de cette Regle de Trois : donc on pourra trouver le cube de la ſeconde, dont la racine cube ſera la même ſeconde. Mais quand on a une fois la ſeconde, on voit qu'il n'y a plus qu'à chercher une moyenne proportionnelle entre cette ſeconde & la quatrieme (qui n'eſt autre choſe que le ſecond nombre donné), & l'on aura la troiſieme des quatre proportionnelles, qui ſera en même-tems la ſeconde des deux inconnues que l'on cherche. C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

PROBLEME.

592. *Faire un cube qui ſoit à un autre dans une raiſon donnée.* *Figure* 147. & 148.

Pour faire un cube qui ſoit au cube C, dans une raiſon

donnée de 2 à 3, par exemple, c'eſt-à-dire un cube qui ſoit les deux tiers du cube C, il faut diviſer le côté AB du cube C en trois parties égales, & faire une ligne DE égale à deux de ces parties, enſuite chercher entre AB & DE deux moyennes proportionnelles telles que FG & HI, & le cube qui aura pour côté la premiere FG de ces deux moyennes proportionnelles, ſera le cube demandé; car nous allons prouver qu'il eſt les deux tiers du cube C.

Demonstration.

Les quatre lignes AB, FG, HI, DE étant en proportion continue, on aura le cube de la premiere au cube de la ſeconde, comme la premiere à la quatrieme; mais *par conſtruction*, la quatrieme eſt les deux tiers de la premiere: donc le cube de la ſeconde FG eſt les deux tiers du cube C fait ſur la premiere. C.Q.F.D.

Si le côté du cube étoit exprimé en nombres, il faudroit de même en prendre les deux tiers, & chercher entre le tout & les deux tiers, deux moyennes proportionnelles; le cube fait ſur la premiere ſera celui que l'on demande.

Corollaire.

593. Comme les ſpheres ſont dans la raiſon des cubes de leurs diametres ou de leurs rayons (art. 570), de même que les cylindres, les priſmes, les pyramides & les cônes ſemblables; il s'enſuit que pour trouver quelqu'un de ces ſolides qui ſoit à ſon ſemblable dans une raiſon donnée, il faut agir à l'égard de leurs dimenſions homologues, des axes, par exemple, comme on vient de faire à l'égard des côtés des cubes; & après avoir trouvé la dimenſion homologue, qui eſt ici l'axe, l'on n'aura qu'à en faire l'axe d'un ſolide ſemblable au ſolide propoſé, en cherchant les autres dimenſions qui ſoient toutes proportionnelles aux dimenſions correſpondantes, & dans la raiſon de l'axe du premier à l'axe du ſecond.

PROPOSITION XVIII.

Probleme.

Figure 149 & 150.

594. *Faire un cube égal à un parallelepipede.*

Pour faire un cube qui ſoit égal au parallelepipede AE, il

faut, ſi les trois dimenſions du parallelepipede ſont inégales, comme on le ſuppoſe ici, chercher une moyenne proportionnelle entre les deux plus petites, A B, B C (art. 506), qui ſera, par exemple F G, & faire ſur cette ligne un quarré F H, qui doit ſervir de baſe à un parallelepipede F I, qui doit avoir la même hauteur que le parallelepipede A E, puiſque le rectangle A C, qui lui ſert de baſe, eſt égal au quarré F H, qui ſert de baſe au ſecond. Cela poſé, il faut chercher deux moyennes proportionnelles entre F G & G K (art. 589), qui ſeront, par exemple, N O & P Q, & je dis que le cube fait ſur la premiere N O ſera égal au parallelepipede F I ou A E.

Pour le prouver, nous prendrons G D égal à F G, pour avoir le cube G O, nous nommerons F G ou G H, ou G D, a; G K, b; & N O, c: ainſi le parallelepipede F I ſera aab, le cube F M ſera aaa, le cube de N O ſera ccc: il faut donc prouver que $aab = ccc$.

Démonstration.

Le cube F M & le parallelepipede F I ayant la même baſe F H, ſeront dans la raiſon de leurs hauteurs G D & G K, d'où l'on tire $aaa : aab :: a : b$; & à cauſe des quatre proportionnelles, on verra que le cube fait ſur la premiere, eſt au cube fait ſur la ſeconde, comme la premiere à la quatrieme, ce qui donne $aaa : ccc :: a : b$; donc puiſque ces deux proportions ont la même derniere raiſon, on aura $aaa : aab :: aaa : ccc$; mais $a^3 = a^3$: donc $aab = ccc$. C. Q. F. D.

Si les dimenſions du parallelepipede donné étoient exprimées en nombres, on n'auroit (pour trouver un cube égal au parallelepipede) qu'à multiplier les trois dimenſions l'une par l'autre pour avoir le ſolide du parallelepipede, & extraire la racine cube du produit, qui ſera le côté du cube demandé.

Corollaire.

595. L'on voit par cette propoſition, qu'il n'y a point de ſolide qu'on ne puiſſe réduire en cube; car les cônes & les ſpheres pouvant ſe réduire en cylindres, & les pyramides en priſmes, ſi on change la baſe des cylindres & des priſmes en quarrés qui leur ſoient égaux, on aura des parallelepipedes, que l'on réduira aiſément en cube par le problême que nous venons de réſoudre.

Fin du huitieme Livre.



NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE NEUVIEME.

DES SECTIONS CONIQUES.

Comme tous les Livres qui traitent des Elémens de Géométrie ne parlent point des Sections Coniques, la plûpart de ceux qui étudient ces Elémens s'en tiennent là, sans s'embarrasser de les chercher ailleurs, dans la pensée que cette étude est plus curieuse que nécessaire, & ne convient qu'aux personnes qui veulent se donner toutes entieres aux Mathématiques: cependant il est si utile de les sçavoir, que si on les ignore, il n'est pas possible de résoudre les Problêmes les plus communs de la Géométrie pratique, particuliérement de cette Géométrie pratique qui convient à l'Ingénieur & à l'Officier d'Artillerie: car si le premier veut toiser des voûtes surbaissées, il faut qu'il sçache comme on trouve la superficie d'une ellipse, que l'on appelle communément ovale, *& qui est une des Sections coniques. Si le second veut sçavoir l'art de jetter les bombes, il ne le peut encore sans connoître les propriétés de la Parabole, qui est aussi une des Sections coniques. Et pour être bien convaincu de la nécessité de sçavoir au moins les principales propriétés des Sections coniques, il ne faut que lire* l'Application de la Géométrie à la pratique, *l'on verra que les plus belles opérations en dépendent absolument. Cependant malgré cela, les Sections coniques seroient bien peu de chose, si elles n'avoient d'autres usages que ceux que l'on trouvera ici; elles sont si nécessaires à un homme, qui sans vouloir devenir grand Géo-*

metre, veut ſeulement ſçavoir cette ſcience paſſablement, qu'il ne peut pas les perdre de vue d'un moment : car s'il veut réſoudre un problême un peu compoſé, il trouvera des équations qui lui indiqueront les courbes, dont il faudra qu'il ſe ſerve pour conſtruire les égalités, c'eſt-à-dire pour conſtruire une figure qui donne la ſolution du Problême.

Je ne parle point de ceci dans cet Ouvrage, parce que je ne donne que les principales propriétés des Sections coniques, ayant eu ſeulement pour objet de les faire connoître à ceux qui ont du goût pour la Géométrie, afin de leur inſpirer l'envie d'aller plus loin, & d'ailleurs pour m'en ſervir dans les endroits où je ne pourrois m'en paſſer. Mais s'il ſe trouvoit de ces perſonnes dont je viens de parler, qui ne ſe bornent point à voir un Livre de Géométrie, je leur conſeille d'étudier l'excellent Traité des Sections Coniques de M. le Marquis de l'Hôpital, qui eſt ce que nous avons de meilleur dans ce genre. Et comme je me ſuis ſervi dans ce que je donne ici d'une façon de démontrer fort approchante de la ſienne, je ne doute pas qu'on n'ait une grande facilité à comprendre cet Auteur, ſi l'on entend bien ce qui ſuit, qui en eſt en quelque ſorte l'introduction.

CHAPITRE PREMIER.

Qui traite des propriétés de la Parabole.

DÉFINITIONS.

I.

596. SI l'on a une ligne droite AB perpendiculaire ſur la ligne OP, ſur laquelle on aura pris les parties AC & CD égales entr'elles; & que de C, en venant vers B, l'on mene ſur la ligne AB une quantité de paralleles, comme EF, GH à la ligne OP, & qu'on faſſe DE ou DF égale à AK, & de même DG ou DH égal à AI, & que l'on continue à trouver une quantité de points, tels que E, G, M, en faiſant toujours DM égal à AL; la ligne que l'on fera paſſer par tous ces points ſera une courbe nommée *parabole*. *Figure 151.*

II.

597. La ligne ACB eſt nommée l'*axe* de la parabole.

III.

598. Le point A est appellé le point *générateur*, la ligne OP *directrice*, & le point D le *foyer*.

IV.

599. Le point C est appellé *origine de l'axe* ou *sommet de la parabole*, parce que c'est de ce point que l'on suppose avoir commencé les lignes paralleles qui forment la parabole.

V.

600. Chaque perpendiculaire, comme KE ou IG, ou ML, est appellée *ordonnée* à l'axe AB.

VI.

601. Les parties CK, CI, CL de l'axe, comprises entre le sommet & la rencontre d'une ordonnée, sont appellées *abscisses* ou *coupées* de l'axe CB.

VII.

602. Si au sommet de la courbe on éleve une perpendiculaire CN à l'axe CB, quadruple de AC, elle sera appellée *parametre de la parabole*.

VIII.

603. Une ligne droite qui ne rencontre la parabole qu'en un seul point, & qui étant prolongée à droite ou à gauche, ne peut pas la couper, mais tombe toujours au dehors, est appellée *tangente*.

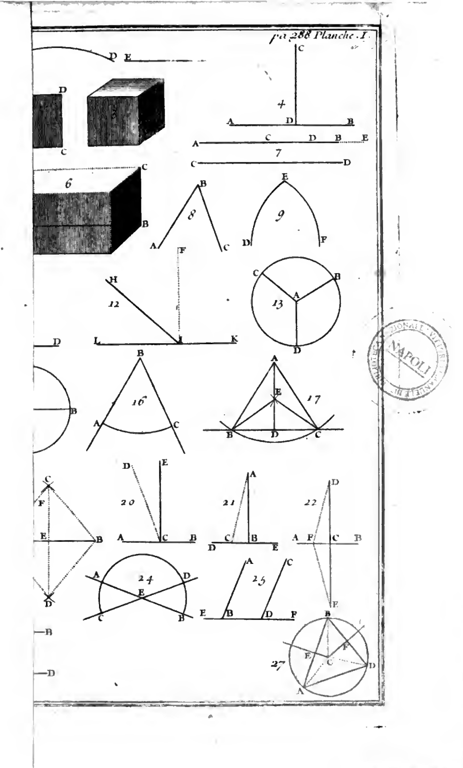
PROPOSITION I.

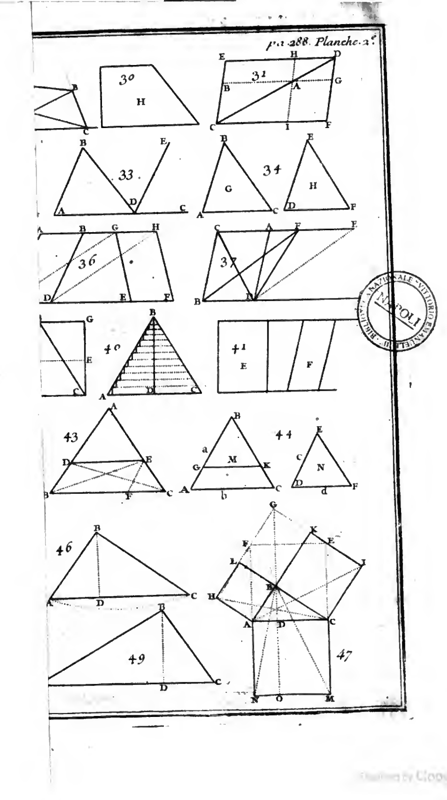
Theoreme.

Figure 151. 604. *Dans la parabole, le rectangle compris sous l'abscisse* CI *& le parametre* CN, *est égal au quarré de l'ordonnée* GI:

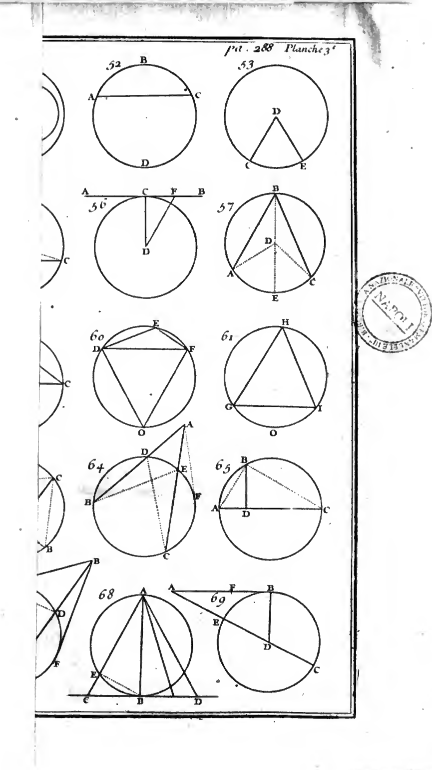
Ayant nommé les données AC ou CD, a; les indéterminées ou lignes variables CI, x, & GI, y; AI ou DG qui lui est égal, *par la définition de la courbe*, sera $x+a$; & DI ou CI — CD, sera $x-a$, le parametre CN, par sa définition, sera $4a$: il faut donc prouver que $CI \times CN = GI^2$, ou que $4ax = yy$.

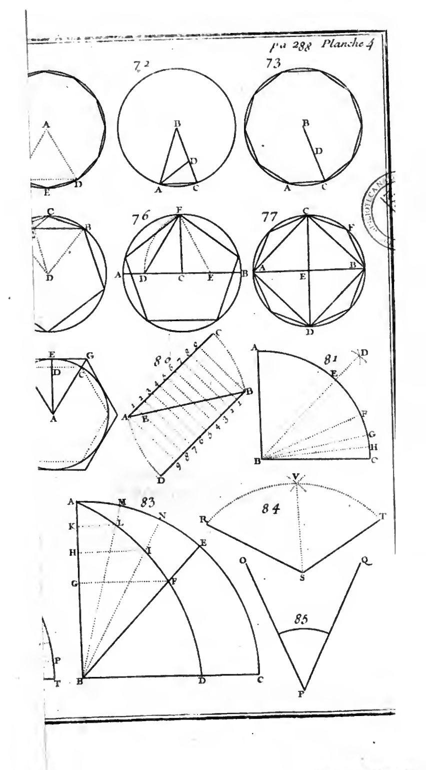
Demonstration.

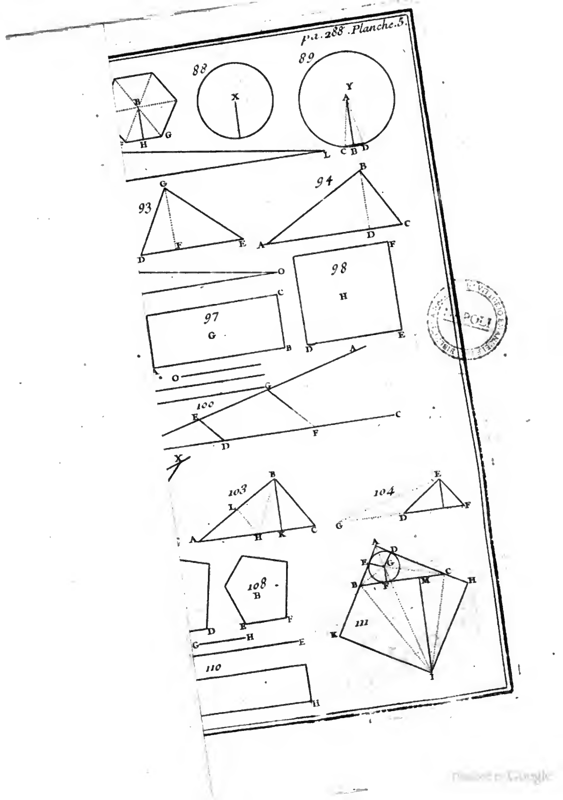

p.a 288 Planche. I.
4
7
6
8
9
12
13
16
17
20
21
22
24
25
27

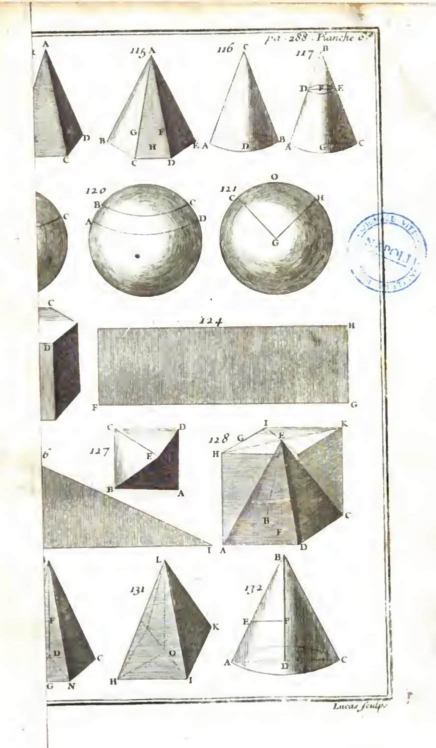

30
H
31
E
H
D
B
A
G
C
I
F
B
C
33
B
E
A
D
C
34
B
E
G
H
A
C
D
F
A
B
G
H
36
D
E
F
C
A
F
E
37
B
D
G
40
E
C
B
A
D
C
41
E
F
43
A
D
E
B
F
C
44
B
E
a
M
G
K
c
N
A
b
C
D
d
F
46
B
A
D
C
49
B
D
C
G
K
F
E
L
I
H
B
A
D
C
47
N
O
M

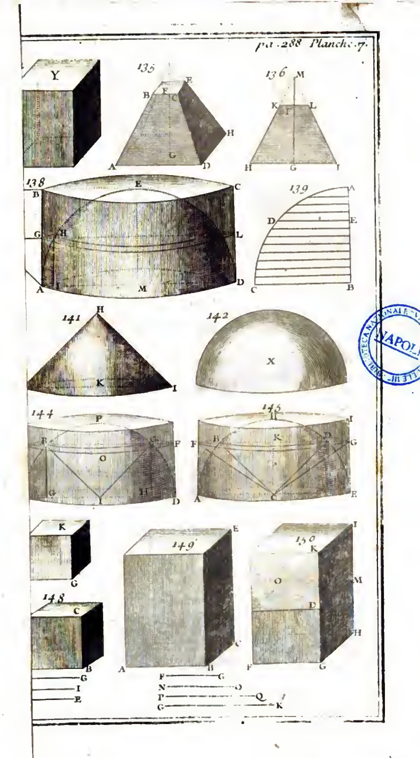



Pa. 288 Planche 3e
52
A
B
C
D
53
D
C
E
A
C
F
B
56
D
57
B
D
A
C
E
60
E
D
F
O
61
H
G
I
O
64
D
A
E
B
F
C
65
B
A
D
C
68
A
E
C
B
D
A
F
B
69
E
D
C
C
B
C
B
D
F
B


pa 288 Planche 4
72
73
76
77
80
81
83
84
85


88
89
X
Y
A
B
H
G
C B D
L
94
93
G
B
F
E
D
A
D
C
F
O
98
H
C
97
G
B
D
E
A
O
G
100
E
C
F
D
X
103
B
104
E
L
D
F
G
A
H
K
C
A
D
E
G
C
H
108
B
B
F
M
E
D
F
111
K
G
H
E
110
I
H


pa. 288. Planche 6.e
115
116
117
120
121
124
127
128
131
132
Lucas sculp.


pa. 288 Planche 7.
Y
135
B F E C H A G D
136
M K L I H G I
138
B E C G H L A I M D
139
A D E C B
141
H K I
142
X
144
P F G F O G I H D
145
H I F B K D G A C E
K G
148
C B G I E
149
E C A B
150
I K O M D H F G
F G
N O
P Q
G K

DEMONSTRATION.

Considérez qu'à cause du triangle rectangle GID, on a $GD^2 = GI^2 + DI^2$, d'où l'on tire $GI^2 = GD^2 - DI^2$; mais $GD = AI = x + a$, ainsi GD^2 sera $x^2 + 2ax + aa$; & $DI = x - a$: donc DI^2 sera $xx - 2ax + aa$, & $GI^2 = yy$: on aura donc cette équation, $yy = xx + 2ax + aa - xx + 2ax - aa = 4ax$, en effaçant ce qui se détruit. C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THEOREME.

605. *Dans la parabole, je dis que les quarrés des ordonnées* EK, GI *sont entr'eux comme leurs abscisses* CK, CI; *ou, ce qui est la même chose, que les quarrés de deux ordonnées quelconques & de leurs abscisses, donneront cette proportion* $EK^2 : GI^2 :: CK : CI$.

DEMONSTRATION.

Les quarrés des ordonnées étant égaux aux rectangles compris sous leurs abscisses & le parametre, ces quarrés sont entr'eux comme les rectangles auxquels ils sont égaux; mais comme tous ces rectangles ont une hauteur commune, qui est le parametre, ils seront dans la raison de leurs bases (art. 391): donc on aura $EK^2 : GI^2 :: CK : CI$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

606. Si à l'origine de l'axe CB on mene une perpendiculaire CS, & que des points E, G, M de la courbe, on mene les perpendiculaires sur la ligne CS, il s'ensuit qu'il y aura même raison du quarré CQ^2 au quarré CR^2, que de la ligne QE à la ligne RG, puisque les lignes CQ & CR sont égales aux ordonnées KE & IG, & que les lignes QE & RG sont égales aux abscisses CK & CI.

Nous nous servirons de ce corollaire dans la suite, pour faire voir que les boulets & les bombes décrivent des paraboles dans l'espace qu'ils parcourent, depuis le lieu d'où ils sont poussés, jusqu'à l'endroit où ils vont tomber.

COROLLAIRE II.

607. Comme les quarrés des ordonnées qui sont à droite & à gauche de l'axe sur une même ligne sont égaux au rectangle

de la même abscisse par le même parametre, il s'ensuit qu'ils sont égaux entr'eux; ainsi les ordonnées sont égales entr'elles: donc l'axe divise l'espace indéfini, terminé par la courbe, en deux parties égales, puisqu'il divise en deux également toutes les ordonnées qui lui sont perpendiculaires, & que l'on peut regarder comme les élémens de cette surface.

COROLLAIRE III.

608. Comme l'on peut prendre des lignes CL si grandes que l'on voudra, & terminer le point M toujours de la même maniere, en faisant DM = CL, il s'ensuit que la courbe peut s'étendre à l'infini, & que ses deux branches s'éloignent continuellement de l'axe.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

Figure 152. 609. *Mener une tangente à une parabole par un point donné.*

Pour mener une tangente à une parabole par un point donné E, tirez de ce point au foyer C la ligne EC, & du même point la parallele ED à l'axe, qui sera perpendiculaire à la directrice AH, qu'elle rencontrera dans un point D; joignez la ligne DC, & si vous menez la ligne EG qui passe par le milieu I de la ligne DC, & par le point E donné; je dis qu'elle sera tangente à la parabole, ou, ce qui revient au même, qu'elle ne la touchera qu'au seul point E; tirez les lignes FD & FC par deux points quelconques de la ligne EI, & les paralleles FH, FH à l'axe AK, & la ligne EK perpendiculaire au même axe.

DEMONSTRATION.

Puisque le point E est à la parabole, la ligne EC menée de ce point au foyer C est égale à la ligne AK, par la définition de la parabole, ou à la ligne ED qui lui est égale, à cause du rectangle EDAK. De plus, *par construction*, la ligne EG divise la ligne DC en deux également au point I: donc cette ligne est perpendiculaire sur DC, puisqu'elle a deux points E, I, également éloignés de ses extrêmités; donc cette ligne passera par tous les points également éloignés des mêmes extrêmités, tels que sont les points F, F; mais dans les triangles rectangles DHF, l'hypoténuse DF = FC, est plus grande

qu'un des côtés FH : donc FC est plus grande que FH ou que AC, ainsi le point F n'est pas à la parabole. On démontrera la même chose de tout autre point : donc la ligne EG touche la parabole au seul point E, & par conséquent elle est tangente à la courbe. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

610. Il suit de cette construction que l'angle DEC est coupé en deux également par la tangente EG, puisque cette ligne divise la ligne DC en deux parties égales. D'où il suit encore que l'angle REL formé par la tangente EG, & le diametre DER mené par le point de contact, est égal à l'angle CEI formé par la même tangente, & la ligne menée du point de contingence au foyer C ; car comme on vient de voir l'angle CEI = DEI, mais DEI = LER qui lui est opposé au sommet : donc CEI = LER. *Figure 153.*

COROLLAIRE II.

611. Il suit du dernier corollaire, que si l'on place un point lumineux au foyer C, tous les rayons qui partiront de ce point, se réflechiront à la rencontre de la parabole, suivant des lignes paralleles à l'axe ; car c'est un principe dans la catoptrique, que tout rayon réflechi fait avec le plan de réflexion, l'angle de réflexion égal à celui d'incidence. Or il est visible que la tangente au point E peut représenter le plan de réflexion ; & par conséquent le rayon parti du foyer C, suivant la ligne CE, se réflechira suivant la ligne ER. Réciproquement tous les rayons paralleles à l'axe d'une parabole, interceptés par le périmetre de cette courbe, se réfléchiront au foyer F. Il faut entendre la même chose de tout corps à ressort différent de la lumiere. Ainsi une petite bille d'yvoire que l'on pousseroit, suivant RE, se détourneroit à la rencontre de la courbe pour suivre la ligne EC.

DÉFINITION.

612. Si du point d'attouchement E l'on mene l'ordonnée EK à l'axe de la parabole, la ligne GK sera nommée *soutangente.*

PROPOSITION IV.

THEOREME.

Figure 153. 613. *Si on élevé une perpendiculaire* EM *au point de contingence* E, *& que de ce même point l'on tire une ordonnée* EK *à l'axe* BM, *je dis que la partie* KM *de l'axe sera toujours égale à la moitié du parametre de cette parabole, c'est-à-dire à* $2a$.

DEMONSTRATION.

Comme les lignes DC & EM sont paralleles, étant toutes deux, *par construction*, perpendiculaires sur LG, ainsi que les lignes EK & AD, qui sont toutes deux perpendiculaires à l'axe, il s'ensuit que les triangles rectangles DAC, EKM sont égaux en tout : donc AC = KM, ou la moitié du parametre qui est $2a$. C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

THEOREME.

Figure 153. 614. *Nous servant de la même figure, je dis que la soutangente* GK *est double de l'abscisse* BK.

DEMONSTRATION.

Le parametre de cette parabole étant $4a$ (art. 604), KM sera $2a$, par la derniere proposition; & à cause des triangles rectangles semblables GKE, EKM (art. 406), l'on aura cette proportion KM ($2a$) : KE (y) :: KE (y) : $\frac{KE^2}{KM}$ ($\frac{yy}{2a}$) = KG, & si dans l'équation KG = $\frac{yy}{2a}$, on met $4ax$ à la place de yy, auquel il est égal (art. 605), on aura KG = $\frac{4ax}{2a}$ = $2x$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

615. L'on tire de cette proposition un moyen fort aisé de mener une tangente à une parabole : car, par exemple, pour mener la ligne LG qui soit tangente à la parabole au point E, il n'y a qu'à abaisser du point E la perpendiculaire EK sur l'axe BM, & faire la ligne BG égale à l'abscisse BK; & par les points G, E, mener la ligne GEL.

DEFINITION.

616. Si du point A, où une droite AB touche la parabole, on mene une ligne AO parallele à l'axe MN, cette ligne sera nommée un *diametre* de la parabole. *Figure 154.*

PROPOSITION VI.

THEOREME.

617. *Si l'on tire une ligne* CD *parallele à la tangente* NB, *je dis qu'elle sera divisée en deux également au point* E *par le diametre* AO. *Figure 154.*

Du point A menez l'ordonnée AG, & des points C, E, D les lignes HCI, EF, DL paralleles à l'ordonnée AG; prolongez le diametre OA jusqu'à la rencontre de la ligne HC. Cela posé, nous nommerons MF, m; IF ou HE, t; FL ou EK, u: ainsi FI sera $m-t$; & ML $m+u$: nous nommerons de même MG, x; AG, y; GF sera $m-x$. Ainsi il faut prouver que EC est égal à ED, ou que HE (t) = EK (u); ce qui est la même chose: car si HK est divisé en deux également au point E, la droite CD le sera aussi au même point.

DEMONSTRATION.

Les triangles BGA & EHC, EKD sont semblables, parce qu'ils ont les côtés paralleles chacun à chacun, & donnent les deux proportions suivantes BG $(2x)$: AG (y) :: EK (u) : DK $\left(\frac{uy}{2x}\right)$, & BG $(2x)$: AG (y) :: EH (t) : CH $\left(\frac{ty}{2x}\right)$. Ayant ainsi déterminé les valeurs des lignes DK, CH, on a celles des ordonnées CI, DL: car CI = IH − CH, ou AG − CH $= y - \frac{ty}{2x}$; & de même DL = KL + DK = AG + DK $= y + \frac{uy}{2x}$. Mais par la propriété de la parabole, les quarrés des ordonnées CI, AG, DL sont entr'eux comme leurs abscisses; ce qui donne les deux proportions suivantes: AG^2 (yy) : CI^2 $\left(yy - \frac{ty^2}{x} + \frac{ttyy}{4xx}\right)$ :: MG (x) : MI $(m-t)$. Et AG^2 (yy) : DL^2 $\left(yy + \frac{uy^2}{x} + \frac{uuyy}{4xx}\right)$ :: MG (x) : ML $(m+u)$, d'où l'on tire les deux équations suivantes, $myy - tyy = xyy - ty^2 + \frac{ttyy}{4x}$, & $myy + uyy = xyy + uy^2 + \frac{uuyy}{4x}$. Présen-

tement si l'on retranche la premiere équation de la seconde, c'est-à-dire le premier membre de la premiere du premier membre de la seconde, & le second membre de la premiere du second membre de la seconde, on aura $myy + uyy - myy + tyy = xyy + uyy + \frac{uuyy}{4x} - xyy + tyy - \frac{ttyy}{4x}$, ou en réduisant le premier & le second membre, & ôtant de chaque membre les quantités égales $uyy + tyy$; $0 = \frac{uuyy}{4x} - \frac{ttyy}{4x}$, & transposant $\frac{uuyy}{4x} = \frac{ttyy}{4x}$, d'où l'on tire $uu = tt$, ou $u = t$, en tirant les racines, & divisant chaque membre par la fraction $\frac{yy}{4x}$. C. Q. F. D.

DÉFINITIONS.

I.

618. Toute ligne, comme EC ou ED, menée parallélement à la tangente AB, est nommée *ordonnée* au diametre AO.

II.

619. Si l'on cherche une troisieme proportionnelle à la ligne BM & à la tangente AB, cette ligne sera appellée le *parametre* du diametre AO.

COROLLAIRE.

620. Il suit de la définition précédente, que si l'on tire une ligne du foyer P au point d'attouchement A, une ligne quadruple AP sera égale au parametre du diametre AO.

Pour le prouver, nous supposerons que le point S est le point générateur; ce qui donnera GS = PA (art. 596). Et si l'on nomme SM ou MP, a; MG, x; AG, y; nous aurons GS ou AP $= x + a$, & par la premiere proposition $4ax = yy$. Cela posé, si on nomme p le parametre du diametre AO, on aura par la définition précédente (art. 619) MB (x) : AB :: AB : p; donc $px = AB^2$; mais à cause du triangle rectangle ABG, $AB^2 = AG^2 + GB^2 = 4ax + 4xx$: donc $px = 4ax + 4xx$, ou en divisant tout par x, $p = 4a + 4x = 4AP$. C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

THÉOREME.

621. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* EC *à un diametre* AO *est égal au rectangle compris sous l'abscisse* AE, *& sous le parametre du diametre* AO (*ou, ce qui est la même chose, sous une ligne quadruple de* AP). *Les choses demeurant les mêmes que dans la proposition précédente; les lignes seront nommées avec les mêmes lettres, excepté la ligne* AE, *que nous nommerons* z, *qui étant égale à* FG, *sera* $m - x$.

DEMONSTRATION.

Il faut d'abord ajouter les deux équations que nous avons trouvées dans le théorême précédent, après avoir mis t à la place de u qui lui est égal; ce qui donnera $myy + tyy + myy - tyy = xyy + tyy + \frac{ttyy}{4x} + xyy - tyy + \frac{ttyy}{4x}$; d'où l'on tire, en faisant la réduction, $2myy = 2xyy + \frac{ttyy}{2x}$, ou en faisant évanouir la fraction, $4mxyy = 4xxyy + ttyy$, qui étant divisée par yy, donne $4mx = 4xx + tt$; & faisant passer $4xx$ du second membre dans le 1er $4mx - 4xx$ ou $\overline{m-x} \times 4x = tt$, & comme $m - x = z$, on aura $4zx = tt$; mais à cause du triangle rectangle EHC, l'on aura $EC^2 = EH^2 + CH^2 = tt + \frac{ttyy}{4xx}$, & mettant $4xz$ à la place de tt, & $4ax$ à la place de yy, il viendra $EC^2 = 4xz + \frac{4xz \times 4ax}{4xx}$, ou $4xz + 4az = z \times \overline{4x + 4a}$, ou $EC^2 = 4AP \times AE$. C.Q.F.D.

COROLLAIRE I.

622. On voit par ce théorême que la proposition premiere devient générale, puisque non seulement le quarré d'une ordonnée à l'axe est égal au rectangle compris sous le parametre de l'axe & sous l'abscisse, mais que le quarré de toute ordonnée à un diametre quelconque, est aussi égal au rectangle compris sous l'abscisse correspondante & le parametre de ce diametre. Mais pour mieux faire entendre ceci, considérez que si la ligne RT est tangente au point M, extrêmité de l'axe, toutes les ordonnées à l'axe seront paralleles à cette tangente,

& par la proposition premiere, le quarré de chacune de ces ordonnées sera égal au rectangle compris sous l'abscisse correspondante, & sous une ligne quadruple de PM, qui est la distance du foyer au point d'attouchement. Si donc l'on imagine que l'axe ML se soit mu parallélement à lui-même jusqu'au point A, où il devient le diametre AO, & que la tangente RT ait glissée sur la parabole, ne la touchant toujours qu'en un seul point, jusqu'à ce que le point M devienne le point A; pour lors la tangente RT deviendra la tangente NB, & la ligne PM deviendra la ligne PA; & par conséquent elle sera encore la quatrieme partie du parametre de l'axe, devenue le diametre AO, & les ordonnées que l'on auroit menées parallélement à la tangente RT, telles que VX, seront toujours paralleles à la tangente, si elles ont accompagné l'axe, & si l'abscisse MV est égale à l'abscisse AE, l'ordonnée VX deviendra l'ordonnée EC, & l'on aura toujours le quarré de EC égal au rectangle compris sous l'abscisse AE, & sous une ligne quadruple de la distance du point d'attouchement A au foyer P, comme on l'a démontré dans la proposition précédente.

On pourra remarquer que si le point A approchoit plus du point M, il pourroit arriver que le point C tomberoit au-delà de l'axe ML, & qu'il y tombât encore dans le cas où l'on prendroit une abscisse AE plus grande sur le diametre, supposé toujours au même point A; mais cela n'empêcheroit pas que tout ce que nous avons démontré ne subsistât de même, de quelque façon que la ligne DC puisse se trouver dans la parabole, puisqu'elle sera toujours divisée en deux également par le diametre, lorsqu'elle sera parallele à la tangente.

Corollaire II.

623. Il suit aussi de ce que nous avons vu, & de la remarque précédente, 1°. que le parametre de l'axe est le plus petit de tous les parametres: 2°. Que si l'on prend sur l'axe & sur un diametre quelconque des abscisses égales, les ordonnées au diametre seront plus grandes que celles de l'axe, puisque leurs quarrés sont égaux aux rectangles d'une même abscisse par des parametres différens, & que d'ailleurs le parametre d'un diametre quelconque est plus grand que celui de l'axe.

COROLLAIRE III.

614. Puisque le quarré d'une ordonnée à un diametre quelconque est égal au produit de l'abscisse par le parametre, qui est une grandeur constante pour chaque diametre, & variable suivant les différens diametres, il suit qu'en désignant par p le parametre d'un diametre quelconque, par x, l'abscisse prise sur le même diametre, à commencer de l'origine du diametre, & par y, l'ordonnée correspondante à cette abscisse, on aura toujours $yy = px$ pour l'équation qui renferme les propriétés de la parabole, soit par rapport aux diametres, soit par rapport à l'axe. Si l'on suppose que l'abscisse soit prise sur l'axe, & qu'elle soit égale au quart du parametre, cette équation deviendra $yy = \frac{1}{4}pp$, d'où l'on tire $y = \frac{1}{2}p$, & en doublant $2y = p$; ce qui montre que la double ordonnée qui passe par le foyer est égale au parametre; ce qui est encore vrai par rapport à un diametre quelconque, comme on peut aisément le reconnoître, si l'on conçoit bien ce que nous avons expliqué (art. 622).

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

625. *Si l'on coupe un cône par un plan parallele à un de ses côtés, la section sera une parabole.* *Figure 155.*

Si l'on a coupé le cône ABC par un plan parallele à un de ses côtés BC, je dis que la section qui sera, par exemple DEI, aura formé sur la surface du cône une courbe DHEKI qui sera une parabole. Supposons encore que le cône a été coupé par un plan LM parallele à sa base, la section sera un cercle, dont les lignes FK & FH seront des perpendiculaires au diametre LM, & en même-tems des ordonnées de la courbe, parce que l'on suppose que le plan coupant EDI est perpendiculaire au plan du triangle ABC, que l'on appelle le triangle par l'axe. Cela posé, prenez sur le côté BC la partie BO égale à FM, & du point O, menez à FM la parallele ON, qui sera le parametre de la parabole; car nous démontrerons que le rectangle compris sous NO, & l'abscisse EF, est égal au quarré de l'ordonnée FK; après avoir nommé les lignes BO ou FM, a; NO, p; EF, x, & FK, y.

DEMONSTRATION.

Les triangles BNO, EFL ayant les côtés paralleles chacun à chacun, seront semblables, & donneront BO (a) : ON (p) :: EF (x) : FL ($\frac{px}{a}$), d'où l'on tire BO × FL, ou FM × FL = ON × EF, & analytiquement $px = \frac{apx}{a}$; mais par la propriété du cercle FM × FL = FK²: donc on aura $px = yy$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

626. Si le triangle par l'axe est équilatéral, la ligne FM comprise entre l'axe de la parabole & le côté BC du cône, sera égale au parametre de la parabole; car il est évident que l'abscisse LF sera dans ce cas égale à l'abscisse EF.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

Figure 156. 627. *Décrire une parabole, le parametre étant donné.*

Pour décrire une parabole, dont la ligne AB soit le parametre, prenez dans une ligne telle que EK, les parties CE & CF, chacune égale au quart du parametre AB; ensuite tirez sur la ligne EK un nombre indéterminé de perpendiculaires telles que GH, & faites les lignes FG, FH chacune égale à la ligne EI, ou, ce qui est la même chose, du point F comme centre avec le rayon EI, décrivez un arc de cercle qui coupe la ligne GH aux points déterminés H & G. La courbe qui passera par ces points sera une parabole. La démonstration est la même que celle de la premiere proposition.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

Figure 157. 628. *Trouver l'axe d'une parabole donnée.*

Pour trouver l'axe d'une parabole donnée CLI, on n'a qu'à tirer par tels points que l'on voudra de la parabole deux lignes AB & CD paralleles entr'elles, diviser chacune de ces lignes en deux également aux poinrs E, F, & tirer par ces points la ligne GFH qui sera un diametre, puisqu'elle divise

deux lignes paralleles en deux également ; ensuite du point C tirer la ligne CI perpendiculaire sur GH, diviser cette ligne en deux également au point K ; & si à ce point vous élevez la perpendiculaire KL, elle sera l'axe de la parabole.

DEMONSTRATION.

Les lignes AB & CD étant des ordonnées au diametre GH, la ligne CI perpendiculaire à ce diametre, sera aussi perpendiculaire à l'axe, puisque l'axe est parallele au diametre, & cette même ligne sera une double ordonnée à l'axe : donc la ligne KL qui passe par son milieu est l'axe demandé, puisque l'axe divise ses doubles ordonnées en deux également.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

629. *Trouver le parametre d'une parabole donnée.* *Figure 157.*

Pour trouver le parametre d'une parabole donnée, il ne faut que chercher à une abscisse quelconque LM, & à l'ordonnée correspondante MN, une troisieme proportionnelle (art. 602) qui sera, par exemple OP, & cette ligne OP sera le parametre que l'on demande, puisque le rectangle compris sous LM & OP sera égal au quarré de l'ordonnée MN. (art. 604).

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

630. *Trouver le foyer d'une parabole dont on connoît le parametre.* *Figure 157.*

Pour trouver le foyer d'une parabole, il faut prendre dans l'axe LK une partie LQ, égale au quart du parametre OP, & le point Q sera le foyer qu'on demande ; ce qui est bien évident, puisque par la génération de la parabole, le parametre est quadruple de la distance du foyer Q au sommet L de la parabole (art. 620).



CHAPITRE II.

Qui traite de l'Ellipse.

DEFINITIONS.

Planche IX. Figure 158. 631. AYant tiré ſur un plan deux lignes droites & inégales AB & CD, qui ſe coupent par le milieu à angles droits au point E; ſi l'on décrit un demi-cercle, dont le diametre ſoit la plus grande AB, & que l'on éleve ſur ce diametre quantité de perpendiculaires, comme FG & IK, &c. & qu'enſuite on faſſe FH quatrieme proportionnelle aux lignes AB, CD, FG, & de même IL, quatrieme proportionnelle à AB, CD & IK, & que l'on continue à trouver de la même maniere une quantité de points, tels que H & L, la courbe qu'on fera paſſer par tous ces points ſera nommée *ellipſe*.

632. La ligne AB eſt nommée *grand axe* de l'ellipſe, & la ligne CD, qu'on ſuppoſe perpendiculaire ſur le milieu de AB, eſt appellée *petit axe*. On dit auſſi que la ligne CD eſt *l'axe conjugué* à l'axe AB, & réciproquement que l'axe AB eſt conjugué à l'axe CD.

633. Les lignes telles que FH, IL perpendiculaires à l'axe AB ſont appellées *ordonnées au même axe*; les lignes IK, FG ſont appellées *ordonnées du cercle*, & en les comparant aux ordonnées de l'ellipſe, qui en ſont partie, on les appelle toutes *ordonnées correſpondantes*. D'où il ſuit que *l'ellipſe eſt une courbe dont les ordonnées ſont toujours aux ordonnées d'un cercle décrit ſur ſon grand axe dans un rapport conſtant, qui eſt celui du grand axe* AB *à ſon conjugué* CD; ce qui donne cette analogie pour une ordonnée quelconque FH; AB : CD :: FG : FH.

634. Si l'on cherche une troiſieme proportionnelle aux axes AB & CD, telle que MN; cette ligne eſt nommée *parametre* de l'axe qui occupe le premier terme de la proportion continue.

635. Le point E, où les axes ſe coupent à angles droits, eſt appellé *centre* de l'ellipſe.

Figure 159. 636. Si dans le grand axe AB d'une ellipſe on prend les points K, K, chacun éloigné des extrêmités du petit axe de la quantité KD = AE, c'eſt-à-dire de la diſtance du grand

demi-grand axe, ces points seront nommés *foyers* de l'ellipse.

637. Les parties AF, FB d'un axe faites par la rencontre d'une ordonnée FG à cet axe, sont appellées *abscisses* ou *coupées* de cet axe, par rapport à l'ordonnée FG : on appelle aussi quelquefois abscisses les parties comprises entre le centre & la rencontre d'une ordonnée, comme EF ; alors on dit que les abscisses ont leur origine au centre.

PROPOSITION I.

THEOREME.

638. *Dans l'ellipse si l'on mene une ordonnée* FH *au premier axe, je dis que le rectangle des abscisses* AF, FB *de cet axe est au quarré de l'ordonnée* FH, *comme le quarré du premier axe* AB *est au quarré du second axe* CD ; *ou, ce qui est la même chose, comme le quarré de* AE *est au quarré de* DE. *Figure* 159.

Ayant nommé les données AE ou EB, a ; CE ou ED, b ; & les indéterminées EF, x ; FH, y ; FG, s ; AF sera $a-x$; & FB $a+x$. Cela posé, il faut démontrer que l'on aura $AF \times FB : FH^2 :: AB^2 : CD^2$, ou $:: AE^2 : DE^2$, ou que $aa - xx : yy :: a^2 : b^2$.

DÉMONSTRATION.

Par la définition de l'ellipse, chaque ordonnée étant quatrieme proportionnelle au grand axe AB, au petit axe CD, & à l'ordonnée FG, on a $AB : CD :: FG : FH$, ou $2a : 2b :: s : y$: donc $AB^2 : CD^2 :: FG^2 : FH^2$, ou $4a^2 : 4b^2 :: ss : yy$. Mais par la propriété du cercle, le quarré de l'ordonnée FG est égal au produit de ses abscisses, ou $AF \times FB = FG^2$, & analytiquement $ss = aa - xx$: donc en mettant cette expression au lieu de ss dans la proportion précédente, on aura $4a^2 : 4b^2 :: aa - xx : yy$, ou bien *invertendo* $aa - xx : yy :: 4a^2 : 4b^2 :: a^2 : b^2$, en divisant les termes de la seconde raison par 4.

COROLLAIRE I.

639. Si l'on a deux ordonnées FH & IL, l'on aura par la proposition précédente, $AF \times FB : FH^2 :: AB^2 : CD^2$, & $AI \times IB : IL^2 :: AB^2 : CD^2$; donc $AF \times FB : FH^2 :: AI \times IB : IL^2$, ou *alternando*, $AF \times FB : AI \times IB :: FH^2 : IL^2$, c'est-à-dire *Figure* 158.

que les quarrés des ordonnées FH, IL sont entr'eux comme les produits de leurs abscisses.

COROLLAIRE II.

640. Il suit encore delà, que si du point H l'on mene l'ordonnée HI au second axe CD, le rectangle compris sous les
Figure 159.
les parties IC, ID est au quarré de l'ordonnée correspondante IH, comme le quarré du même axe CD est au quarré de son conjugué AB.

Pour le prouver, considérez que FH étant égale à EI, on aura $EI = y$, & que FE étant égale à HI, on aura encore $HI = x$; ainsi ID sera $b - y$, & CI sera $b + y$. Cela posé, puisque par la proposition présente, on a $aa - xx : yy :: aa : bb$, en prenant le produit des extrêmes & des moyens, on aura $aayy = aabb - bbxx$. Si l'on fait passer $-bbxx$ du second membre dans le premier, & $aayy$ du premier dans le second, il viendra $bbxx = aabb - aayy$, d'où l'on tire cette proportion $bb - yy : xx :: bb : aa$, c'est-à-dire que $ID \times DC : IH^2 :: DE^2 : AE^2$. Ainsi l'on voit que les propriétés des ordonnées au petit axe sont précisément les mêmes que celles du grand axe; d'où l'on peut conclure que les ordonnées HI au petit axe de l'ellipse, sont troisiemes proportionnelles au demi petit axe, au demi-grand axe, & à l'ordonnée IN d'un cercle décrit sur le petit axe; c'est ce qu'il est aisé de voir, si l'on fait attention que dans la proportion $ID \times DC : IH^2 :: AE^2 : DE^2$, on peut mettre au lieu du rectangle $ID \times DC$ le quarré de l'ordonnée IN, qui lui est égal; d'où l'on déduit, en prenant les racines, & faisant un *invertendo* $DE : AE :: IN : IH$. On peut donc définir l'ellipse d'une maniere plus générale, en disant que c'est une courbe, dont toutes les ordonnées ont été alongées ou raccourcies proportionnellement; alongées, lorsque le cercle est décrit sur le petit axe, & raccourcies, lorsqu'il est décrit sur le grand axe.

COROLLAIRE III.

641. Si l'on nomme a le premier axe d'une ellipse, & b le second, p le parametre du premier axe, on aura (art. 634) $a : b :: b : p$, & (art. 503) $aa : bb :: a : p$. Mais par la propriété de l'ellipse, on a $aa - xx : yy :: aa : bb$; donc on aura aussi $aa - xx : yy :: a : p$; d'où l'on tire $yy = aa - xx \times \frac{p}{a}$, c'est-

à-dire que le quarré d'une ordonnée quelconque eſt égal au produit de ſes abſciſſes, multiplié par le rapport du parametre à l'axe : ainſi, ſi l'on ſçait que le parametre eſt les deux tiers de l'axe, le quarré de chaque ordonnée ſera égal aux deux tiers du rectangle des abſciſſes correſpondantes.

REMARQUE I.

642. Il eſt à remarquer que puiſque l'on a $AF \times FB : FH^2 :: AI \times IB : IL^2$, ſi l'on met à la place des rectangles $AF \times FB$, $AI \times IB$, les quarrés des ordonnées FG, IK, qui leur ſont égaux par la propriété du cercle, on aura $FG^2 : FH^2 :: IK^2 : IL^2$; & en tirant les racines de chaque terme, $FG : FH :: IK : IL$, & *alternando*, $FG : IK :: FH : IL$, qui fait voir que ſi l'on prend les lignes FH, IL pour les élémens de la ſuperficie du quart d'ellipſe EAD, & les lignes FG, IK pour les élémens du quart de cercle EAM ; les élémens du quart d'ellipſe ſont dans la même raiſon que les élémens correſpondans du quart de cercle. *Figure 158.*

REMARQUE II.

643. On a vu (art. 569) que dans une progreſſion qui ſeroit compoſée des élémens infinis tels que FG & IK d'un quart de cercle, la ſomme des quarrés de tous ces élémens ſeroit égale au produit du quarré du plus grand élément EM, par les deux tiers de la ligne AE, qui en exprime le nombre : or comme les élémens de l'ellipſe ont tous un rapport conſtant avec les élémens correſpondans du quart de cercle, il s'enſuit qu'ils auront la même propriété que ceux du cercle ; & que par conſéquent ſi l'on a une progreſſion compoſée de termes infinis des élémens d'un quart d'ellipſe EAD, la ſomme des quarrés de tous les élémens, tels que FH & IL, eſt égale au produit du quarré du plus grand élément ED, par les deux tiers de la grandeur qui en exprime le nombre, c'eſt-à-dire par les deux tiers de la ligne AE.

Comme ces deux remarques nous ſervent beaucoup dans la Géométrie pratique, il faut s'attacher à les bien comprendre.

DEFINITIONS.

I.

644. L'on nomme *diametres* d'une ellipſe, deux lignes, *Figure 160.*

comme CD, EF, qui paſſent par le centre de l'ellipſe, & qui ſont terminées à cette courbe.

II.

Figure 160. 645. Ayant mené d'un point quelconque C de l'ellipſe un diametre CD, & une ordonnée CK à l'axe AB, ſi l'on fait GO troiſieme proportionnelle à GK & GA, le diametre EF, que l'on aura mené parallele à la ligne CO, eſt appellé *diametre conjugué* au diametre CD; & réciproquement le diametre CD eſt dit *conjugué* au diametre EF.

III.

646. Toute ligne, comme HI, menée d'un point quelconque H, pris dans le diametre CD, parallélement à ſon conjugué EF, eſt appellée *ordonnée* au diametre CD.

IV.

647. Si l'on cherche une troiſieme proportionnelle aux diametres conjugués CD, EF, elle ſera nommée *parametre* du diametre, qui occupe le premier terme de la proportion.

Corollaire.

648. Puiſque l'on a fait (art. 645) $GK:GA::GA:GO$, il s'enſuit que ſi l'on nomme GK, x; GA, a; KO, z, l'on aura GK (x) : GA (a) :: GA (a) : GO ($x+z$), d'où l'on tire $xx+zx=aa$; & en faiſant paſſer xx du premier membre dans le ſecond, $zx=aa-xx$, ou bien $OK\times KG = AK\times KB$. Comme ce corollaire nous ſervira beaucoup dans les propoſitions ſuivantes, il eſt à propos de le bien retenir.

PROPOSITION II.

Theoreme.

Figure 160. 649. *Si des extrêmités* C *&* E *de deux diametres conjugués* CD, EF *on mene à l'axe* AB *les ordonnées* CK, EP, *je dis que le quarré de la partie* GP *ſera égal au rectangle de* AK *par* KB.

Ayant fait $AG=a$, $GP=f$, $GK=x$, $KO=z$, GO ſera $x+z$. Cela poſé, nous ferons voir que $AK\times KB$ ($aa-xx$) ou bien xz (art. 648) $=ff$.

Démonstration.

Conſidérez que l'on a par la propriété de l'ellipſe (art. 639)

AK

AK × KB (xz) : AP × PB ($aa - ff$) :: KC² : PE² ; & que si au lieu de aa dans le second terme de cette proportion on met $xx + xz$, qui lui est égal (art. 648), & au lieu de KC² & PE², on met KO² (zz) & PG² (ff) qui sont dans la même raison, à cause des triangles semblables COK, EGP, qui donnent CK : PE :: KO : PG, on aura AK × KB : AP × PB :: KC² : PE², ou $xz : xx + xz - ff :: zz : ff$, dont le produit des extrêmes & des moyens donnent cette équation $xxzz + xz^3 - ffzz = ffxz$; d'où transposant $ffzz$ du premier membre dans le second, vient $xxzz + xz^3 = ffzz + ffxz$, & divisant chaque membre de l'équation par z, il vient $xxz + z^2x = ffz + ffx$, & divisant encore chaque membre par $z + x$, il vient $xz = ff$, ou AK × KB = GP². C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

650. Comme on a $xx + xz = aa$ (art. 648), il suit de cette proposition, que si l'on met ff à la place de xz qui lui est égal, on aura $xx + ff = aa$; & faisant passer ff du premier membre dans le second, on aura GK² (xx) = AP × PB ($aa - ff$).

PROPOSITION III.

THÉOREME.

651. *Le rectangle fait des parties* CH, HD *du diametre* CD, *est au quarré d'une ordonnée* HI, *comme le quarré de ce même diametre est à celui de son conjugué* EF.

Après avoir tiré les lignes IN, HL paralleles à CK, & la ligne HM parallele à AB, nous nommerons GK, x; CK, y; AG, a; KO, z; MH, ou LN, c; GL, g; GC, s.

DEMONSTRATION.

Les triangles GKC, GLH sont évidemment semblables, & donnent GK (x) : KC (y) :: GL (g) : LH $\frac{gy}{x}$; & les triangles COK, IHM, qui sont aussi semblables, puisqu'ils ont les côtés paralleles chacun à chacun, nous donnent OK (z) : KC (y) :: HM (c) : IM ($\frac{cy}{z}$) ; d'où l'on tire IM + HL = IM + MN ou IN $= \frac{gy}{x} + \frac{cy}{z}$, dont le quarré est $\frac{yygg}{xx} + \frac{2cgy^2}{xz} + \frac{ccyy}{zz}$. De plus, considérez que LN − LG = GN = $c - g$, dont le

quarré eſt $cc - 2cg + gg$. Cela poſé, il faut encore chercher une ſeconde valeur de IN^2, que l'on trouvera par la propriété de l'ellipſe (art. 639) : car $AK \times KB : AN \times NB$, ou $GB^2 - GN^2$ (art. 62) $:: CK^2 : IN^2$, ou analytiquement $aa - xx : aa - cc + 2cg - gg :: yy : yy \times \frac{aa - cc + 2cg - gg}{aa - xx} = IN^2$, ou en faiſant la multiplication $\frac{aayy - ccyy + 2cgyy - ggyy}{aa - xx}$. Préſentement ſi l'on forme une égalité avec ces deux valeurs, on aura $\frac{ggyy}{xx} + \frac{2cgy^2}{xz} + \frac{ccyy}{zz} = \frac{aayy - ccyy + 2cgyy - ggyy}{aa - xx}$. Mais comme on ſçait que $aa - xx = xz$, on aura $\frac{ccyy}{zz} + \frac{2cgyy}{xx} + \frac{ggyy}{xx} = \frac{aayy - ccyy + 2cgyy - ggyy}{zx}$, ou en effaçant dans chaque membre le terme égal $\frac{2cgyy}{zx}$, & diviſant enſuite tout par yy, $\frac{cc}{zz} + \frac{gg}{xx} = \frac{aa - cc - gg}{aa - xx}$. Préſentement il faut multiplier tout par xx, afin de n'avoir plus gg en fraction ; ce qui donnera $\frac{ccxx}{zz} + gg = \frac{aaxx - ccxx - ggxx}{aa - xx}$: on fera paſſer gg du premier membre dans le ſecond, & on le réduira en fraction, dont le dénominateur ſoit $aa - xx$; ce qui donnera cette nouvelle équation $\frac{ccxx}{zz}$ ou $\frac{ccx^4}{zzxx} = \frac{aaxx - ccxx - aagg + ggxx - ggxx}{aa - xx}$, faiſant attention que le premier membre $\frac{ccxx}{zz}$ eſt la même choſe que $\frac{ccx^4}{zzxx}$, puiſque l'on n'a fait que multiplier les deux termes de chaque fraction par la même grandeur xx. Mais le premier membre de cette équation eſt diviſé par le quarré de xz ou de $aa - xx$, qui diviſe le ſecond membre. D'où il ſuit que l'on fera évanouir toute fraction, en multipliant le numérateur du ſecond membre par $aa - xx$: on aura donc $ccx^4 = aaxx - ccxx - aagg \times aa - xx = a^4x^2 - a^2c^2x^2 - a^4g^2 - a^2x^4 + c^2x^4 + a^2g^2x^2$; d'où l'on tire en effaçant de part & d'autre c^2x^4, & tranſpoſant $a^2c^2x^2$ du ſecond membre dans le premier, $a^2c^2x^2 = a\ x^2 - a^4g^2 - a^2x^4 + a^2g^2x^2$, qu'il faut diviſer par a^2x^2 ; ce qui donne $cc = a^2 - x^2 + g^2 - \frac{a^2g^2}{x^2} = LN^2 = HM^2$. Cela poſé, conſidérez que les triangles ſemblables GKC, GLH donnent

GK (x) : GC (s) :: GL (g) : GH $\left(\frac{gs}{x}\right)$; par conséquent $GC^2 - GH^2$, ou CH × HD (art. 62) $= ss - \frac{g^2s^2}{xx} = \frac{s^2xx - g^2s^2}{xx}$.
Pour voir présentement si la proportion énoncée au théorême est vraie, je fais attention que les quatre grandeurs suivantes CH × HD, HM^2, CG^2, GP^2 sont en proportion, puisque l'on trouve, en disposant leurs expressions analytiques, selon le même ordre, que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, ou, ce qui est la même chose, que CH × HD $\left(\frac{ssxx - ggss}{xx}\right)$: HM^2 $\left(a^2 - x^2 + g^2 - \frac{a^2g^2}{x^2}\right)$ :: CG^2 (ss) : GP^2 $(aa - xx)$: donc en substituant à la place des conséquens des quantités qui leur soient proportionnelles, sçavoir HI^2 & GE^2, comme il est évident, à cause des triangles semblables, MIH, PEG, on aura CH × HD : HI^2 :: CG^2 : GE^2. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

652. L'on voit que ce qui a été démontré dans la proposition premiere par rapport aux deux axes, s'étend par le moyen de celle-ci à deux diametres quelconques : car si l'on fait le même raisonnement pour l'ellipse que pour la parabole (art. 622), l'on verra que la tangente HI, à l'extrêmité A de l'axe AB, ayant glissé le long de la courbe pour prendre la situation QR, & l'axe AB ayant tourné pour prendre la situation FG, l'ordonnée KL qui l'aura accompagnée toujours parallélement à la tangente HI, deviendra l'ordonnée OP ; & comme l'axe conjugué CD aura aussi tourné parallélement à la tangente HI, il deviendra le diametre conjugué MN ; & par conséquent toutes ces lignes demeurant dans des rapports constans les unes avec les autres, il s'ensuit que le rectangle compris sous les abscisses OF, OG est quarré de l'ordonnée OP, comme le quarré du diametre FG est au quarré de son conjugué MN. *Figure 161.*

COROLLAIRE II.

653. Il suit encore delà, que pour mener par un point F une tangente QR à l'ellipse, il faut de ce point abaisser une perpendiculaire FS à l'axe AB, & faire EQ troisieme proportionnelle aux droites ES, EA (art. 645) pour avoir le point Q, duquel on n'aura qu'à mener la tangente par le point donné.

COROLLAIRE III.

654. Il ſuit encore de cette propoſition, que toute ligne comme TP parallele à la tangente RQ eſt diviſée en deux également par le diametre FG; car le rectangle de FO par OG eſt au quarré de OP, comme le quarré de FG au quarré de NM, & le même rectangle de FO par OG eſt encore au quarré de OT, comme le quarré de FG eſt au quarré de NM, il s'enſuit donc que le quarré de OP eſt égal au quarré de OT, & que par conſéquent OT = OP.

COROLLAIRE IV.

655. Il ſuit encore delà que les quarrés des ordonnées à un même diametre ſont entr'eux comme les rectangles faits ſur les abſciſſes correſpondantes; d'où l'on voit que ſi l'on appelle un diametre quelconque $2a$, ſon conjugué $2b$, le parametre du premier p, x & y l'abſciſſe & l'ordonnée correſpondante, on aura comme pour les axes $yy : aa - xx :: 4aa : 4bb :: 2a : p$, d'où l'on tire $yy = \frac{aa - xx \times p}{2a}$, c'eſt-à-dire que le quarré d'une ordonnée à un diametre quelconque eſt égal au rectangle des abſciſſes, multiplié par le rapport du parametre au diametre. Si le diametre eſt plus grand que ſon parametre, le quarré d'une ordonnée quelconque ſera plus grand que le rectangle des abſciſſes. Si les deux diametres ſont égaux, le parametre ſera égal au diametre, & par conſéquent le rectangle des abſciſſes ſera égal au quarré de chaque ordonnée, & alors les ordonnées ſeroient égales à celle d'un cercle décrit ſur un des diametres, mais obliques à ce diametre, parce que dans cette courbe il n'y a que les ordonnées aux axes qui puiſſent être à angles droits, comme il eſt aiſé de le remarquer, ſi l'on fait attention que les ordonnées étant toujours paralleles aux tangentes, il faut néceſſairement qu'elles faſſent avec leurs diametres les mêmes angles que ces tangentes.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

Figure 160. 656. *La ſomme des quarrés de deux diametres conjugués* CD, EF *eſt égale à celle des quarrés des deux axes* AB, QR.

DEMONSTRATION.

Les choses étant toujours les mêmes que ci-devant, nous aurons (art. 649) $GP^2 = aa - xx$, & (art. 650) $GA^2 - GP^2$ = ou $AP \times PB = GK^2 = xx$. Or par la propriété de l'ellipse, l'on aura $GA^2 : GR^2 :: AP \times PB : PE^2$, ou analytiquement $a^2 : b^2 :: xx : \frac{bbxx}{aa} = PE^2$, & d'une autre part $GA^2 : GR^2 ::$ $AK \times KB : CK^2$, & en lettres $a^2 : b^2 :: aa - xx : \frac{aabb - bbxx}{aa}$. Or les triangles rectangles GPE, GKC donnent $EG^2 = EP^2 + PG^2 = aa - xx + \frac{bbxx}{aa}$, ou $EG^2 = \frac{a^4 - aaxx + bbxx}{aa}$, & encore $CG^2 = CK^2 + GK^2 = \frac{aabb - bbxx}{aa} + xx = \frac{aabb - bbxx + aaxx}{aa}$; donc $EG^2 + CG^2 = \frac{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2 + a^2b^2 - bbxx + a^2x^2}{a^2} = \frac{a^4 + a^2b^2}{a^2}$, & divisant par a^2, $aa + bb = EG^2 + CG^2$, & en quadruplant les termes de chaque membre $AB^2 + QR^2 = CD^2 + EF^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

657. Il suit de cette proposition, qu'il ne peut y avoir dans une ellipse que deux diametres conjugués qui soient égaux : car puisque la somme des quarrés de deux demi-diametres conjugués est égale à celle des quarrés des deux demi-axes, si l'on prend l'expression générale de l'un de ces diametres pour le quarré d'un des deux diametres conjugués égaux, par exemple, celle de CG^2, on aura cette équation $\frac{2aabb - 2bbxx + 2aaxx}{aa} = aa + bb$, & multipliant tout par aa, $2aabb - 2bbxx + 2aaxx = a^4 + aabb$, d'où l'on déduit, en effaçant $aabb$ dans chaque membre $aabb - 2bbxx + 2aaxx = a^4$, ou en transposant $aabb - a^4 = 2bbxx - 2aax$, & divisant tout par $bb - aa$, il vient $a^2 = 2xx$, ou $x^2 = \frac{aa}{2}$, d'où l'on déduit cette proposition $\frac{1}{2}a : x :: x : a$, qui fait voir que l'abscisse qui détermine les deux diametres conjugués égaux, est moyenne proportionnelle entre le quart & la moitié du grand axe. Et comme il n'y a qu'une moyenne proportionnelle entre ces deux grandeurs, il s'ensuit qu'il n'y a aussi dans une ellipse que deux diametres conjugués égaux entr'eux. C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

THEOREME.

Figure 162. 658. *Si par l'extrêmité* A *de l'axe* AB *l'on mene une tangente qui aille rencontrer aux points* N & F, *les deux diametres conjugués* MG, IH *prolongés autant qu'il est nécessaire, je dis que le rectangle des parties* AN, AF *est égal au quarré de la moitié de l'axe* CD. *Ainsi il faut prouver* $AN \times AF = CE^2$.

DEMONSTRATION.

Considérez que l'on a $AL \times LB$ égal au quarré de EK, qui est xx (art. 650), & que par conséquent AE^2 (aa) : EC^2 (bb) :: $AL \times LB$ (xx) : LM^2 $\left(\frac{bbxx}{aa}\right)$; & comme ce dernier terme est un quarré parfait en extrayant la racine, on aura $LM = \frac{bx}{a}$. Mais comme on a aussi (art. 649) $AK \times KB = LE^2$, on aura encore $CE^2 : AE^2 :: IK^2 : AK \times KB$ ou EL^2, & analytiquement $bb : aa :: yy : \frac{aayy}{bb} = LE^2$; & comme cette quantité est aussi un quarré, si on en extrait la racine, on aura $EL = \frac{ay}{b}$. Cela posé, à cause des triangles semblables EAF, ELM, on pourra former cette proportion $EL : LM :: EA : AF$; & mettant les valeurs analytiques trouvées précédemment, $\frac{ay}{b} : \frac{bx}{a} :: a : \frac{abxb}{aay} = \frac{bbx}{ay} = AF$. Et de même à cause des triangles semblables EAN, EKI, on aura $EK : EA :: IK : AN$, ou $x : a :: y : \frac{ay}{x} = AN$: donc $AN \times AF = \frac{bbx}{ay} \times \frac{ay}{x} = bb = CE^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

659. On peut aisément, par le moyen de cette proposition, déterminer dans l'ellipse les diametres conjugués égaux : car pour cela, il n'y a qu'à prendre sur la perpendiculaire AN à l'origine de l'axe, une partie AR égale à CE, moitié du petit axe, & par le centre E & le point R mener la ligne ER, dont la partie comprise entre le centre & la courbe, sera l'un des demi-diametres conjugués égaux : car puisque l'on a toujours $AN \times AF = CE^2$, lorsque les diametres conjugués sont égaux, les parties AN, AF sont égales; & par conséquent AR doit être égale à CE.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

660. *Si l'on coupe un cône par un plan oblique à la base, de maniere que les deux côtés du cône soient coupés entre le sommet & la base, la section sera une ellipse.* Figure 164.

Si l'on coupe le cône X par un plan AB, oblique à sa base, & perpendiculaire au plan du triangle NOX qui passe par l'axe de ce cône, la section BEAF sera une ellipse. Nous supposerons que le cône est aussi coupé parallélement à sa base par un plan CM, qui passe par le milieu de la ligne AB, qui est l'interfection des plans NOX, AEBF, & l'axe de la courbe; & encore par un plan LD, aussi parallele à la base, & qui passera par un point quelconque I de l'axe AB. Comme ces deux sections formeront des cercles, nous tirerons les lignes EF & HK, qui couperont les diametres LD, CM à angles droits aux points I, G, & la ligne EF deviendra le petit axe de l'ellipse, & les lignes IK & IH en feront des ordonnées. Cela posé, nous ferons AG ou GB $= a$, EG ou GF $= b$, GM $= c$, CG $= d$, GI $= x$, IK $= y$, ainsi IB sera $a + x$, & AI sera $a - x$. Nous ferons voir que AI $\times$ IB ($aa - xx$) : IK^2 (yy) :: AG^2 (aa) : GF^2 (bb).

DÉMONSTRATION.

Les triangles semblables BGM, BID nous donnent BG : BI :: GM : ID, ou en lettres $a : a + x :: c : \frac{ac + cx}{a}$; & de même les triangles semblables ALI, ACG nous donnent AG : AI :: CG : LI, & en lettres $a : a - x :: d : \frac{ad - dx}{a}$: donc en multipliant ces deux proportions termes par termes, on aura $aa : aa - xx :: cd : \frac{ac + cx}{a} \times \frac{ad - ax}{a}$, ou AG^2 : AI $\times$ IB :: CG $\times$ GM : LI $\times$ ID. Mais à cause des cercles GEM, KDHL, on a CG $\times$ GM $=$ GE^2, ou GF$^2 = bb$, & ID $\times$ IL $=$ IH^2 ou IK$^2 = yy$; on aura donc AG^2 : AI $\times$ IB :: IH^2 : EF^2, ou *invertendo* & *alternando* AI $\times$ IB : IH^2 :: AG^2 : EF^2, ou $aa - xx : yy :: aa : bb$.

PROPOSITION VII.

THEOREME.

Figure 165. 661. *Si l'on coupe un cylindre par un plan oblique à la base, je dis que la section sera une ellipse.*

Pour être convaincu que la section BEAF du cylindre Y est une ellipse, il ne faut que lire la démonstration du théorême précédent, & partout où il y aura le nom de cône substituer celui de cylindre, la démonstration étant la même.

PROPOSITION VIII.

THÉOREME.

Figure 166. 662. *Si du point quelconque* G *de l'ellipse on mene des droites* GF, GE *aux foyers* E, F, *je dis que la somme de ces deux lignes prises où l'on voudra, sera toujours égale au grand axe* AB.

DEMONSTRATION.

Il faut se ressouvenir que l'on détermine les foyers E, F en décrivant du point D, extrêmité du petit axe comme centre, un arc de cercle avec le rayon DF égal à la moitié du grand axe, qui coupe cet axe dans les points E, F; d'où il suit évidemment que le point D est tel que $ED+DF=AB$. Pour démontrer cette proposition par rapport à un point quelconque G différent du point D, nous ferons $AI=a$, $ID=b$, $EI=c$, $IK=x$, GK ordonnée à l'axe y. Cela posé, à cause du triangle rectangle EKG, on a $EG^2=EK^2+GK^2$; mais EK est $c+x$, dont le quarré est $cc+2cx+xx$, & GK étant ordonnée à l'axe, on aura $GK^2=bb-\frac{bbxx}{aa}$: donc $EG^2=cc+2cx+xx+bb-\frac{bbxx}{aa}$, & tirant les racines de chaque membre $EG=\sqrt{cc+2cx+xx+bb-\frac{bbxx}{aa}}$. De même à cause du triangle rectangle FKG, on a $FG^2=FK^2+GK^2$; mais $FK=c-x$: donc $FK^2=cc-2cx+xx$; & partant $FG^2=cc-2cx+xx+bb-\frac{bbxx}{aa}$; & tirant les racines de part & d'autre, on aura $FG=\sqrt{cc-2cx+xx+bb-\frac{bbxx}{aa}}$. Présentement si la proposition est vraie, il faut qu'en égalant la somme de ces deux lignes au grand axe $2a$, on arrive à quelque-

que principe qui nous démontre que nous avons supposé vrai, ou qui nous fasse voir que nous avons mal supposé, en nous conduisant à quelque absurdité. Je fais donc cette équation $2a = \sqrt{cc + 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}} + \sqrt{cc - 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}}$, d'où je tire, en transposant, $2a - \sqrt{cc - 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}}$ $= \sqrt{cc + 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}}$, & en quarrant chaque membre $4a^2 - 4a \times \sqrt{cc - 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}} + cc - 2cx + xx$ $+ bb - \frac{bbxx}{aa} = cc + 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}$; & en effaçant de part & d'autre les quantités égales, & transposant la quantité $-2cx$ du premier membre dans le second, on aura $4a^2 - 4a\sqrt{cc - 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}} = 4cx$; d'où l'on tire en faisant passer $4cx$ dans le premier membre, & le terme radical dans le second, après avoir divisé par 4, $a^2 - cx =$ $a\sqrt{cc - 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}}$. Si l'on quarre chaque membre de l'équation, on aura celle-ci, $a^4 - 2a^2cx + ccxx = a^2c^2$ $- 2a^2cx + a^2x^2 + a^2b^2 - bbx^2$, dans laquelle effaçant de chaque terme les quantités égales $- 2a^2cx$, on aura $a^4 + c^2x^2$ $= a^2c^2 + a^2x^2 + a^2b^2 - bbxx$. Enfin si dans cette derniere équation on met à la place de c^2 sa valeur, qui est $aa - bb$, comme il est visible dans la figure, à cause du triangle rectangle EIB, il viendra $a^4 + a^2x^2 - b^2x^2 = a^4 - a^2b^2 + a^2x^2$ $+ a^2b^2 - bbxx$; d'où l'on déduit, en effaçant toutes les quantités égales de part & d'autre, & réduisant le second membre, $0 = 0$; d'où il suit que la proposition est vraie.

REMARQUE.

663. Un résultat semblable au dernier $0 = 0$ doit paroître d'abord bien singulier, & les Commençans pourroient être embarrassés à concevoir comment sur cette équation on peut établir la vérité d'un théorême, ou de toute autre proposition. Pour comprendre ce qu'il signifie, il faut faire attention que toutes les démonstrations étant fondées sur des axiomes, il suffit de faire voir la liaison d'une proposition avec quelqu'un de ces axiomes, pour en établir la certitude. Présentement si

l'on réfléchit à toutes les opérations que nous avons faites, on verra que notre supposition nous a conduit à cet axiome, que le *rien est égal au rien*, que l'on pourroit mettre au rang des premiers axiomes, puisque cette vérité ne peut pas être conçue autrement que par son énoncé : donc notre proposition est vraie, puisqu'elle a une liaison nécessaire avec ce dernier axiome Ceux qui liront les Auteurs qui ont beaucoup écrit sur les Mathématiques, verront combien ce principe est d'usage pour la démonstration d'un grand nombre de théorêmes, & l'on peut dire que c'est, à proprement parler, la méthode la plus convenable de démontrer les propositions, & de découvrir les vérités par Algebre : car il n'y a qu'à supposer que la chose soit ; si cette supposition vous conduit à quelqu'absurdité, vous en concluez qu'elle est fausse, & qu'elle est vraie, si vous pouvez arriver, en partant delà, à quelqu'axiome ou à quelqu'autre vérité connue par elle-même ou déja démontrée.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

Figure 166. 664. *Les deux axes conjugués* AB & CE *d'une ellipse étant donnés, la décrire par un mouvement continu.*

SOLUTION.

Il faut du point D comme centre, & d'un intervalle égal à la moitié AI du grand axe décrire un arc de cercle qui coupe ce grand axe dans les points E, F qui seront les foyers de l'ellipse. Il faut ensuite avoir un fil de la longueur du même axe AB, dont on attachera les extrêmités aux points E, F, en se servant d'un style G pour tenir le fil tendu ; l'on ira du point A au point D, du point D au point B, & l'on décrira avec le bout du style la demi-ellipse ADB. Si l'on fait passer le style de l'autre côté de l'axe AB, on décrira de la même maniere *Figure 166.* avec le style G l'autre moitié de l'ellipse ACB.

La démonstration de cette pratique se tire de ce que l'on a démontré dans la proposition précédente, que la somme des lignes menées d'un des points de l'ellipse à chaque foyer, est égal au grand axe, & l'on auroit pu définir l'ellipse en partant de cette propriété de laquelle on auroit déduit toutes les autres.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

665. *Trouver le centre & les deux axes conjugués d'une ellipse donnée.* *Figure 163.*

SOLUTION.

Par deux points quelconques A, C, tirez les lignes A B & C D paralleles, que vous diviserez chacune en deux également aux points E, F ; pour avoir les ordonnées au diametre G H (art. 654), qui passant par les points E & F, passera aussi par le centre de l'ellipse. Ainsi en divisant en deux également cette ligne G H au point I, ce point sera le centre de l'ellipse, duquel décrivant l'arc G L, on aura deux points sur la courbe également éloignés du centre, qui serviront à tracer la section M, par laquelle & par le point I faisant passer une ligne M I, la partie N O de cette ligne renfermée dans la courbe sera le grand axe. Si l'on veut trouver le petit axe, il n'y a qu'à élever au point I une perpendiculaire à la ligne N O. Cette proposition est suffisamment démontrée par tout ce que nous avons vu précédemment.

CHAPITRE III,

Qui traite de l'Hyperbole.

DÉFINITIONS.

666. AYant tiré sur un plan deux lignes droites A B, D E qui se coupent à angles droits au point C, on élevera la perpendiculaire B S à l'extrêmité B ; & après avoir prolongé A B indéfiniment vers O & vers P, on prendra sur la ligne B O un nombre de parties égales telles que B G, G L, pour décrire ensuite du point C comme centre les demi-cercles G Q I, L R K, &c. qui couperont la perpendiculaire B S aux points F, N ; ensuite on cherchera aux lignes A B, D E, B F une quatrieme proportionnelle G H qu'on élevera perpendiculaire au point G ; on cherchera de même une quatrieme proportionnelle L M aux droites A B, D E, B N, qu'on élevera perpendiculaire au point L, & continuant à trouver de même un nom-

bre de points, tels que H, M, la courbe que l'on fera passer par tous ces points, sera nommée *hyperbole*.

667. Si dans le même tems on décrit deux hyperboles, l'une à l'extrêmité A, l'autre à l'extrêmité B, elles seront nommées ensemble *hyperboles opposées*.

668. La ligne AB est nommée *premier axe*, & la ligne DE *second axe* de chacune des hyperboles opposées.

669. Les deux axes AB & DE sont appellés ensemble *conjugués*, de sorte que le premier AB est dit conjugué au second DE, & réciproquement le second DE conjugué au premier AB.

670. Le point C où se coupent les deux axes à angles droits, est nommé *centre de l'hyperbole* ou *des hyperboles opposées*.

671. Toutes lignes comme GH ou LM perpendiculaires au prolongement de l'axe AB, sont appellées *ordonnées* au premier axe AB; & toute ligne comme TV, menée perpendiculairement au second axe DE, est appellée *ordonnée* au même second axe.

672. Les parties AG, BG de l'axe & de son prolongement sont appellées *abscisses* de l'ordonnée correspondante GH, de même AL, BL sont les abscisses de l'ordonnée ML.

673. Une ligne troisieme proportionnelle aux deux axes, est appellée le *parametre* de celui qui occupe le premier terme de la proportion.

PROPOSITION I.

THEOREME.

674. *Dans l'hyperbole, le rectangle des abscisses* AG, BG *de l'axe* AB, *est au quarré de l'ordonnée* GH *correspondante, comme le quarré du grand axe* AB *au quarré de son conjugué* DE.

Ayant nommé CA ou CB, a; CD ou CE, b; BF, c; les indéterminées CG ou CI, x; GH, y; AG sera $x+a$, & BG $x-a$.

DEMONSTRATION.

Par la définition de l'hyperbole, on a AB : DE :: BF : GH, ou $2a : 2b :: c : y$: donc en quarrant les termes de cette proportion, $4aa : 4bb :: cc : yy$; mais par la nature du cercle, BF^2 ou $cc = IG \times BG$, ou $AG \times BG = (a+x) \times (x-a) = xx - aa$, & mettant cette expression à la place de cc, on

aura $4aa : 4bb :: xx - aa : yy$, ou bien $xx - aa : yy :: 4aa : 4bb$, c'est-à-dire que $AG \times BG : GH^2 :: AB^2 : DE^2$. C. Q. F. D.

Corollaire I.

675. Il suit de cette proposition, que les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les rectangles de leurs abscisses : car puisque l'on a $AG \times BG : GH^2 :: AB^2 : DE^2$, on aura par la même raison, $AL \times BL : LM^2 :: AB^2 : DE^2$; donc puisque les deux dernieres raisons sont égales, on aura $AG \times BG : GH^2 :: AL \times BL : LM^2$, ou *alternando* $AG \times BG : AL \times BL :: GH^2 : LM^2$. Donc, &c.

Corollaire II.

676. Il suit de cette proposition, que si l'on mene une ordonnée TV au second axe DE, le quarré de cette ordonnée est au quarré de TC, plus celui de DC, moitié du second axe, comme le quarré de son conjugué AB est au quarré du même axe DE. Pour le prouver, considérez que $TV = GC = x$, & que $TC = VG = y$. Or comme la proposition précédente donne $xx - aa : yy :: 4aa : 4bb$, on peut en tirer cette équation, $4a^2y^2 = 4bbxx - 4aabb$, & faisant passer $-4aabb$ du second membre dans le premier, on aura $4a^2y^2 + 4a^2b^2 = 4b^2x^2$, d'où l'on tire $xx : yy + bb :: 4aa : 4bb$, ou $TV^2 : CT^2 + CD^2 :: AB^2 : DE^2$.

Remarque.

677. Comme on a trouvé dans le corollaire précédent cette équation, $4aayy = 4bbxx - 4aabb$, il est visible qu'en divisant par $4aa$ chaque membre de l'équation, on aura $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$, qui est une équation dont nous aurons besoin par la suite.

Définition.

678. Si par l'extrêmité B de l'axe AB on mene une ligne droite FG parallele au second axe DE, ensorte que BF ou BG soient chacune égale à la moitié du même axe, & que du centre C on tire par les extrêmités F, G les lignes CF, CG, prolongées indéfiniment ; ces lignes seront nommées les *asymptotes* de l'hyperbole LBM ; & si on les prolonge aussi indéfiniment de l'autre côté du centre, elles deviendront asymptotes de l'autre hyperbole opposée. *Figure 168.*

PROPOSITION II.

Theoreme.

679. *Si l'on mene une droite* HI *parallele au second axe* DE, *ensorte qu'elle coupe une des hyperboles, & qu'elle soit terminée aux asymptotes, je dis que le rectangle de* HK *par* KI *sera égal au quarré de* DC *ou* FB, *moitié du second axe* DE.

Ayant nommé CB, a; CD ou BF, b; les indéterminées CP, x; PK, y, il faut prouver que DC^2 ou $FB^2 = KH \times KI$.

Demonstration.

Considérez que les triangles semblables CBF & CPH donnent CB : BF :: CP : PH, ou en lettres $a : b :: x : \frac{bx}{a} = PH$; ainsi l'on aura $HP - PK = \frac{bx}{a} - y$, & $PI + PK = \frac{bx}{a} + y$: donc $(HP - PK) \times (HP + PK)$ ou $KH \times KI = \overline{\frac{bx}{a} - y} \times \overline{\frac{bx}{a} + y}$, ou en faisant la multiplication $\frac{bbxx}{aa} - yy = KH \times KI$, mais (art. 677) $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$: on aura donc, en substituant cette valeur $\frac{bbxx}{aa} - \frac{bbxx}{aa} + bb = HK \times KI$, ou $bb = FB^2 = HK \times KI$. C. Q. F. D.

Corollaire I.

680. Il suit delà que si l'on mene des lignes TS & QR paralleles au second axe DE, & terminées aux asymptotes, les rectangles $TO \times OS$, $HK \times KI$, & $QL \times QR$ sont égaux entr'eux, puisque chacun est égal au quarré de FB; d'où l'on peut tirer ces proportions, OS : HK :: KI : OT, & HK : QL :: LR : KI.

Corollaire II.

681. Il suit encore delà que les parties MR, QL comprises entre la courbe & les asymptotes sont égales entr'elles : car on démontreroit de même que $MR \times MQ = FB^2$; & comme les ordonnées sont égales, il faut que les lignes MR, QL le soient aussi.

COROLLAIRE III.

682. Il suit encore delà que si loin que l'on prolonge la courbe & ses asymptotes, jamais ces deux lignes ne se rencontreront, puisque l'on aura toujours $QL \times LR = FB^2$; ce qui ne pourroit arriver si ces lignes se rencontroient, puisque dans ce cas QL seroit égal à zero; & c'est par cette raison que les lignes CQ, CR ont été nommées *asymptotes*, c'est-à-dire qui ne peuvent rencontrer (l'hyperbole).

PROPOSITION III.

THEOREME.

683. *Si l'on mene par deux points quelconques* K, O *de deux hyperboles opposées deux lignes droites* VX & YZ *paralleles entr'elles, & terminées par les asymptotes, je dis que le rectangle de* VO *par* OX *est égal à celui de* YK *par* KZ. Figure 168.

DEMONSTRATION.

Pour démontrer cette proposition, tirez par les points O, K les lignes TOS, HKI paralleles entr'elles & au second axe DE, pour avoir les triangles semblables OSX, YHK, OTV, KIZ, qui donnent les proportions suivantes, OS : KH :: OX : KY, & OT : KI :: OV : KZ; donc en multipliant ces deux proportions, termes par termes, on aura $OS \times OT : KH \times KI :: OX \times OV : KY \times KZ$, & (art. 680) $OS \times OT = KH \times KI$: donc $OX \times OV = KY \times KZ$. C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

684. *Si l'on mene par deux points quelconques* A & C *d'une hyperbole, ou des hyperboles opposées deux lignes droites* AB & CD *paralleles entr'elles, & deux autres* AE, CF *aussi paralleles entr'elles, & terminées aux asymptotes, je dis que le rectangle* $AE \times AB$ *sera égal à celui de* FC *par* CD. Figure 169.

DEMONSTRATION.

Soient tirées par les points A, C les lignes GAH, ICK paralleles entr'elles; & considérez que les triangles semblables EAG, FCI, BAH, DCK, nous donneront AG : AB :: CI : CE,

& AH : AB :: CK : CD ; donc en multipliant par ordre les termes de ces proportions, on aura AG × AH : AE × AB :: CK × CI : CF × CD. Mais (art. 680) AG × AH = IC × CK : donc aussi AE × AB = CF × CD. C. Q. F. D.

Corollaire I.

685. Il suit de cette proposition, que si l'on mene par des points quelconques A & C, pris sur une hyperbole ou les hyperboles opposées, des lignes AP, CO, AE, CF paralleles aux asymptotes, les rectangles AE × AP, CF × CO seront égaux entr'eux : car les lignes étant paralleles aux asymptotes, sont paralleles entr'elles, & sont par conséquent dans le cas des lignes AB, CD.

Corollaire II.

686. Comme le point L, extrémité de l'axe est un des points de l'hyperbole, il s'ensuit qu'en menant les lignes LM & LN paralleles aux asymptotes, on aura encore LM × LN = AE × AP, ou LM × LN = CF × CO. Mais comme LM × LN n'est autre chose que le quarré de ML, l'on voit qu'en nommant LM, a; AP, x; AE, y, on aura toujours AP × AE, ou CF × CO (xy) = LM^2 (aa), qui est une équation qui exprime parfaitement la propriété de l'hyperbole, & par le moyen de laquelle on peut déterminer tous ses points.

PROPOSITION V.

Probleme.

Figure 171. 687. *Par un point donné, mener une tangente à une hyperbole, dont les asymptotes sont données.*

Pour mener une tangente à une hyperbole, par un point donné A, il faut de ce point mener la ligne AB parallele à l'asymptote opposée EF, faire la partie BD égale à BE, & tirer la ligne DAC, qui sera tangente au seul point A : car à cause des triangles semblables, DCE, DAB, on voit que AC est égal à AD. Et si on vouloit que l'hyperbole rencontrât encore cette ligne dans un point H, il faudroit qu'on eût AC = HD, ce qui est impossible, à moins que le point H ne tombe sur le point A : donc cette ligne est tangente au seul point A. C. Q. F. D.

Corollaire.

COROLLAIRE.

688. Comme il n'y a que la seule ligne CD, qui étant terminée aux asymptotes, soit coupée en deux également au point A, il s'ensuit que si une ligne droite CD, terminée par les asymptotes d'une hyperbole, est tangente au point A, où elle seroit coupée par une ligne IK, elle y sera divisée par cette ligne en deux parties égales AC & AD.

DÉFINITIONS.

689. Si l'on a deux lignes AB, CD qui s'entrecoupent au centre de l'hyperbole, ou des hyperboles opposées, dont l'une AB soit menée par le point touchant B, milieu d'une tangente FG, & l'autre CD parallele, & égale à la même tangente; ces deux lignes seront nommées *diametres* des hyperboles, & ensemble *diametres conjugués* l'un à l'autre. *Figure* 170.

690. Si par un point H quelconque de l'hyperbole, on mene une ligne HKI, terminée de part & d'autre à la courbe, & parallele à la tangente FG; cette ligne sera nommée une *double ordonnée* au diametre EB, dont la ligne HK sera l'ordonnée. Les parties EK, BK du diametre seront nommées les *abscisses* de l'ordonnée HK.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

691. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* HK *parallele à une tangente* FG, *est au rectangle* AK × KB *de ses abscisses, comme le quarré du diametre* CD *est au quarré du diametre* AB. *Figure* 170.

Par l'une des extrêmités B du diametre AB, soient menées les lignes BC, BD, & la tangente FG parallele au diametre CD; & par conséquent par le corollaire précédent, divisée en deux également en B; soit prolongé la ligne HI jusqu'aux asymptotes; ce qui donnera les parties égales KM, KL, & soit fait AE ou EB $= a$, CE ou DE $= b$, EK $= x$, KH ou KI $= y$; d'où l'on tire BK $= x - a$, & AK $= x + a$.

DEMONSTRATION.

Il est visible que les triangles EBF, EBD sont égaux, ainsi que les triangles EBG, CBE; car ces triangles ont les côtés

paralleles chacun à chacun, & un côté commun EB : donc FB = CE, ou ED = a. Cela posé, les triangles semblables EBF, EKL nous donnent EB : BF :: EK : KL, ou $a : b :: x : \frac{bx}{a} = KL$: donc $LH = KL - KH = \frac{bx}{a} - y$, & $HM = KM$, ou $KL + KH = \frac{bx}{a} + y$; mais par la propriété des asymptotes, $HM \times HL = FB^2$: donc $\overline{\frac{bx}{a} + y} \times \overline{\frac{bx}{a} - y} = bb$, ou $\frac{bbxx}{aa} - yy = bb$, d'où l'on tire $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb = \frac{bbxx}{aa} - \frac{aabb}{aa}$, ou $aayy = bbxx - aabb$; ce qui donne cette proportion $xx - aa : yy :: aa : bb$, ou $AK \times KB : KH^2 :: AB^2 : CD^2$. C.Q.F.D.

Corollaire.

692. Il suit delà que ce que l'on a démontré dans la premiere proposition à l'égard des deux axes d'une hyperbole, s'étend par celle-ci à deux diametres conjugués quelconques AB & CD, aussi bien que toutes les autres propriétés que l'on a démontrées d'une hyperbole avec ses asymptotes : car pour s'en convaincre, il ne faut que relire les articles précédens, & mettre diametre partout où il y aura le mot d'axe ; car tout subsistera également, soit que l'angle EBF soit droit ou non.

Proposition VII.

Théoreme.

Figure 172. 693. *Si l'on coupe un cône droit* ABC *par un plan parallele à l'axe* BQ, *je dis que la courbe* FHDKG *sera une hyperbole.*

Ayant prolongé le côté CB du cône jusqu'en P, ensorte que BP soit égal à BD, la ligne PD sera le premier axe de l'hyperbole, & la ligne BN tirée du point B perpendiculaire au milieu de la ligne PD, sera la moitié du second axe ; ensorte que si l'on fait NO = BN, OB sera le second axe. Ayant nommé les données NP ou ND, a ; NO ou NB, b ; les indéterminées NI, x ; IK ou IH, y, DI sera $x - a$, & PI sera $x + a$; & nous allons faire voir que l'on a $xx - aa : yy :: 4aa : 4bb$, ou $PI \times ID : IK^2 :: PD^2 : BO^2$.

Demonstration.

Les triangles semblables PNB, PIM donnent PN : NB :: PI : IM,

ou $a : b :: a + x : \frac{\overline{a+x} \times b}{a}$; de même les triangles semblables DNB, DIL donnent DN : NB :: DI : IL, ou bien $a : b :: x - a : \frac{\overline{x-a} \times b}{a} = IL$: on aura donc, en multipliant les termes de ces deux proportions les uns par les autres, $aa : bb :: xx - aa : IM \times IL$; mais par la propriété du cercle, $IM \times IL = IK^2$ ou IH^2, ou yy : donc on aura $aa : bb :: xx - aa : yy$, ou $4aa : 4bb :: xx - aa : yy$, c'est-à-dire qu'en faisant *invertendo* $PI \times ID : IK^2 :: PD^2 : BO^2$. C. Q. F. D.

Nous ne parlerons point des différentes manieres de tracer l'hyperbole, parce que cette courbe n'a guere lieu dans la Géométrie pratique ; c'est pourquoi l'on pourra passer légérement ce chapitre, pour s'attacher à ce qui va suivre, qui est de la derniere importance dans tout ce qui s'appelle Géométrie pratique, & surtout dans la Géométrie qui regarde particuliérement l'Ingénieur.

AVERTISSEMENT.

Quand on est né avec le goût des Mathématiques, l'on ne s'en tient guere à la lecture des simples Elémens ; il suffit qu'ils nous aient montré qu'on peut aller beaucoup plus loin pour desirer des Livres qui nous apprennent des choses nouvelles ; car ceux qui ont l'esprit Géometre, cherchent à se le nourrir des vérités d'une science qu'il est difficile de connoître sans l'aimer. L'on cherche, l'on s'informe quels sont les bons Livres de Mathématiques qu'on n'a pas vus ; mais souvent à qui s'en informer ? Je ferai donc plaisir de rapporter ici une liste des meilleurs Ouvrages de Mathématique qu'ils pourront étudier. Je ne prétends parler que des principaux Livres qui ont été imprimés à Paris ; s'il falloit citer tous les bons qu'on a faits chez les Etrangers, & particuliérement en Angleterre, il faudroit un volume entier pour en faire le dénombrement.

Indépendamment de ce que j'ai donné d'Algebre dans mes Elémens de Géométrie pour en sçavoir parfaitement toutes les opérations, l'on pourra avoir recours au Livre de la *Science du Calcul* du R. P. Reyneau. Cet Ouvrage sert d'introduction à un autre du même Auteur, intitulé l'*Analyse démontrée*, qui est ce que nous avons de meilleur sur l'Algebre ;

ce Livre eſt en deux vol. *in*-4. Dans le premier on enſeigne la réſolution des problêmes qui ſe réduiſent à des équations ſimples & compoſées ; ce qui eſt uniquement l'objet de l'analyſe ; & dans le ſecond, l'on trouve les nouveaux calculs, c'eſt-à-dire le calcul *différentiel*, & le calcul *intégral*, qui eſt une autre ſorte d'Algebre ; & ces calculs ſont enſuite appliqués à la réſolution d'un grand nombre de problêmes Phyſico-Mathématiques, qui font voir la beauté de ces calculs, & une partie des belles découvertes qu'on a faites dans ces derniers tems.

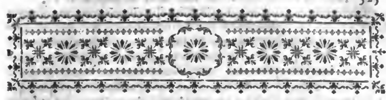
L'on peut voir après cela l'excellent Livre des *Infiniment petits* de M. le Marquis de l'Hôpital, qui traite uniquement du calcul *différentiel* appliqué à la Géométrie *des Courbes*. Cet Ouvrage eſt le plus beau morceau que nous ayons en France ſur les Mathématiques ; & comme il eſt un peu abſtrait, on pourra recourir au *Commentaire* qu'en a donné M. de Crouſas, qui ſervira beaucoup à ſoulager les Commençans.

Quoique j'aie déja parlé du Traité des *Sections coniques* de M. de l'Hôpital, je crois devoir recommander encore une fois aux Commençans d'étudier ſérieuſement cet Ouvrage, s'ils ont envie de faire du progrès, & de le lire même immédiatement après qu'ils auront étudié le premier tome de l'Analyſe démontrée, parce qu'ils s'y fortifieront, & auront l'eſprit plus diſpoſé à voir enſuite le ſecond tome de l'Analyſe.

Il y a auſſi un Livre de M. Carré ſur le *calcul intégral*, qui eſt une application de ce calcul à la meſure des ſurfaces, des ſolides, & à la maniere de trouver leur centre de gravité, &c. qu'il eſt bon auſſi de ſçavoir, pour connoître l'uſage de ce calcul.

Fin du neuvieme Livre.





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE DIXIEME,

Qui traite de la Trigonométrie rectiligne, & du Nivellement.

DE toutes les parties des Mathématiques, il n'y en a point que les Commençans étudient plus volontiers que la Trigonométrie, parce qu'elle présente à l'esprit des problêmes fort curieux, dont la solution est aisée, n'ayant besoin que du simple calcul de l'Arithmétique. Cependant il faut se rendre bien familieres les analogies de ce calcul, afin d'en placer les termes à propos; car la Trigonométrie est d'un si grand usage dans le métier de la guerre, qu'un homme qui est chargé des moindres choses dans le Génie, ou dans l'Artillerie, ne peut absolument l'ignorer; puisque si l'on veut conduire quelque galerie de mines, jetter des bombes avec regles, calculer les parties d'une fortification réguliere pour la tracer sur le terrein, lever un Camp, une Carte, le plan d'une tranchée, orienter des batteries, il faut nécessairement avoir recours à la Trigonométrie.

Et pour dire un mot du Traité que j'en donne ici, l'on sçaura que je ne parle que des triangles rectilignes, parce que ceux qu'on nomme Sphériques, *à cause qu'ils sont formés par des cercles de la Sphere, ne sont d'aucune utilité à un homme de guerre, auquel il ne faut apprendre que les choses nécessaires, crainte de le rebuter, en voulant lui fatiguer la mémoire par celles qui sont pu-*

rement curieuses, ou dont l'usage ne se rencontre point dans les choses de son ministere. J'ai fait ensorte d'éviter ce défaut, particuliérement dans ce petit Traité, que j'ai tâché de rendre le plus clair & le plus intéressant qu'il m'a été possible, en appliquant la Trigonométrie à quantité d'opérations, qui feront plaisir à ceux qui n'aiment point à s'appliquer, sans voir dans le moment l'usage des propositions qu'ils apprennent. Outre les problêmes généraux de la Trigonométrie, on a joint ici plusieurs problêmes particuliers très-intéressans pour un Ingénieur militaire. Comme il y a toujours du danger de mesurer des bases dans un terrein exposé au feu de l'ennemi : je donne la maniere de connoître la distance du lieu où l'on est à celui que l'on veut attaquer par une seule opération sans sortir de l'endroit où je suppose l'Ingénieur. Cette opération sera toujours praticable, pourvu que d'un même lieu on puisse appercevoir trois objets au dedans, ou au dehors de la ville, & dont la position a été déterminée géométriquement avec toute la précision possible dans des endroits où l'on pouvoit faire toutes les opérations nécessaires sans aucun danger. Je donne des solutions numériques & géométriques du même problême, afin que l'on puisse se servir de l'une dans le cas où l'on a besoin de toute la précision possible, & de l'autre, lorsqu'on peut se contenter d'un à peu près qui peut être suffisant dans un grand nombre d'occasions ; c'est à l'Ingénieur à sçavoir de laquelle des deux méthodes il doit faire usage, & je lui laisse faire l'application de ce problême dans toutes les circonstances où il peut s'en servir avec avantage.

Comme en mesurant la distance d'un lieu à un autre, il arrive quelquefois qu'on est obligé d'en connoître aussi les différentes hauteurs par rapport au centre de la terre, il semble que le nivellement est une partie des Mathématiques qui doit suivre immédiatement la Trigonométrie : aussi ai-je observé cet ordre, puisqu'après la Trigonométrie l'on trouvera un Traité du Nivellement, où l'on fait voir l'usage du niveau d'eau, & celui d'un autre niveau, pour niveler des grandes distances. Ces instrumens sont d'un si grand usage dans la pratique, qu'on ne sçauroit trop engager ceux qui peuvent se trouver dans le cas de s'en servir, de s'appliquer à ce que l'on verra dans la suite sur ce sujet. Tout le monde sçait que quand on veut faire un canal de navigation, joindre une riviere avec une autre, conduire des eaux aux endroits où il en manque, les projets de ces sortes de choses ne peuvent avoir lieu, sans avoir fait auparavant des nivellemens fort exacts ; & c'est-là par-

ticuliérement où la théorie & la pratique doivent travailler de concert. Combien de grands ouvrages n'a-t'on pas exécutés, depuis qu'on a sçu réduire à des principes l'art du nivellement! Auroit-on osé tenter autrefois un travail aussi admirable que celui de la jonction des deux Mers? Toute la magnificence des Anciens a-t'elle jamais été jusqu'à faire naître des jets d'eau dans des lieux fort éloignés de tous réservoirs? Et si cela s'est fait, étoit-on sûr de la réussite avant l'exécution? Combien est-il arrivé de fois qu'après avoir commencé un grand projet, on s'est apperçu trop tard, & après de grandes dépenses, de l'impossibilité du dessein! au lieu qu'à présent on trouve avec toute l'exactitude possible la différence du niveau de plusieurs endroits, lorsqu'on entend bien le nivellement, & l'on sçait si le projet qu'on a en vue, est possible, ou non; s'il faut des écluses, à quelle distance il faut les construire; enfin on est en état de ne rien craindre du succès d'une grande entreprise, si après en avoir fait le nivellement, l'on a reconnu le projet possible.

DE LA TRIGONOMETRIE RECTILIGNE.

DEFINITIONS.

I.

694. La *Trigonométrie* est une partie de la Géométrie, par le moyen de laquelle trois choses étant données ou connues dans un triangle, l'on vient à la connoissance du reste.

II.

695. Comme l'on ne parvient à trouver ce que l'on cherche dans la Trigonométrie que par le calcul ordinaire de l'Arithmétique, l'on se sert de certaines Tables dressées pour ce sujet, qu'on appelle *Tables des Sinus, Tangentes, Sécantes*, dont je donnerai l'usage seulement, sans en enseigner la construction, que l'on trouvera dans plusieurs Livres, ne voulant parler que des choses qu'il faut absolument sçavoir.

III.

696. Nous avons six choses à considérer dans un triangle; sçavoir, les trois côtés & les trois angles, sans s'embarrasser de la superficie: & comme il y a trois de ces six termes, qui peuvent être donnés, pour arriver à la connoissance des autres, il faut toujours que ce soit deux angles & un côté, ou un angle & deux côtés, ou bien enfin les trois côtés; car les

trois angles ne suffisent pas pour connoître la valeur des trois côtés, parce qu'on peut former deux triangles, tels que les angles de l'un soient égaux aux angles de l'autre, chacun à son correspondant, sans que pour cela les côtés du premier soient égaux à ceux du second. Il est bien vrai qu'on peut trouver la proportion de ces côtés, mais non pas leur juste valeur.

IV.

697. Nous avons déja dit que la mesure d'un angle n'étoit autre chose que la quantité de degrés, ou de degrés & de minutes, que l'arc terminé par les lignes qui forment cet angle peut contenir. Mais comme cette mesure est relative dans la Trigonométrie à certaines lignes, qui en font le principal objet, voici leurs noms.

V.

Figure 174. 698. *Sinus droit* d'un arc, ou d'un angle dont cet arc est la mesure, est une ligne droite, abaissée de l'extrémité F de cet arc perpendiculairement au côté qui passe par l'autre extrémité B du même arc FB. Ainsi la ligne FH tirée de l'extrémité F de l'arc FB perpendiculaire sur le côté BC, est le sinus de l'angle FCB.

COROLLAIRE I.

699. Si l'on prolonge la ligne FH jusqu'en G, le rayon CB étant perpendiculaire sur la ligne FG, la divisera en deux également au point H (art. 423), aussi-bien que l'arc FBG; & comme la ligne FG est la corde de cet arc, & que la ligne FH est le sinus de l'arc FB, il s'ensuit que le sinus d'un arc est la moitié de la corde d'un arc double.

COROLLAIRE II.

700. Comme le sinus FH augmentera d'autant plus que l'angle FCB sera grand, il s'ensuit que lorsque le rayon CF sera perpendiculaire sur AB, comme est le côté CI, le sinus FH, & le côté CF se joindront pour ne faire qu'une seule ligne CI, & que dans ce cas le sinus de l'angle droit ICH sera le rayon même du cercle; ce qui fait voir que l'angle droit a le plus grand de tous les sinus, que l'on nomme à cause de cela, *Sinus total*.

REMARQUE.

REMARQUE.

701. Le sinus de l'angle droit n'étant autre chose que le rayon du cercle, dont l'angle tire sa mesure, nous nommerons dans la suite le rayon CB *sinus total.* On voit par ce qui précede, que les sinus des angles moindres qu'un droit, croissent depuis zero jusqu'à la grandeur du rayon. Il suit aussi de cette définition, que le sinus d'un angle plus grand qu'un droit, est égal au sinus de son supplément. Ainsi le sinus de 120 degrés est le même que celui de 60 degrés, & plus les angles seront obtus, plus leurs sinus seront petits, puisqu'ils auront pour sinus ceux de leurs supplémens.

VI.

702. *Sinus verse* d'un arc ou de l'angle dont cet arc est la mesure, est la partie du rayon comprise entre le sinus droit & l'extrêmité de cet arc : ainsi la ligne droite, ou la partie BH du rayon CB, est le sinus verse de l'arc FB ou de l'angle FCB, dont cet arc est la mesure. *Figure* 174.

VII.

703. *Tangente* d'un arc ou d'un angle dont cet arc est la mesure, est une ligne perpendiculaire sur l'extrêmité d'un des côtés de l'angle, & terminée par l'autre côté prolongé : ainsi la ligne BE perpendiculaire à l'extrêmité B du côté CB, & terminée par la rencontre du côté CF prolongé jusqu'en E, est la tangente de l'angle FCB. On voit aussi par cette définition, que la tangente d'un angle obtus est la même que celle d'un angle aigu, qui est son supplément : car la ligne AB est le côté de l'angle obtus ACF, & cette ligne rencontre le prolongement de l'autre côté en F; ainsi plus l'angle sera obtus, plus sa tangente sera petite.

VIII.

704. On appelle *cosinus* d'un angle ou d'un arc le sinus de son complément. LF est le cosinus de l'angle BCF, ou de l'arc BF. On voit par-là que le cosinus d'un arc ou d'un angle est la partie du rayon comprise entre le centre & la rencontre de son sinus : car il est clair que LF = CH. Une ligne comme IK, tangente de l'arc IF complément de l'arc BF, est appellée *cotangente* ou *tangente* de complément de l'angle BCF.

IX.

705. *Sécante* d'un arc ou d'un angle, dont cet arc est la mesure, n'est autre chose que le côté de l'angle prolongé, & terminé à la tangente: ainsi la ligne CE est sécante de l'angle FCB. La ligne CK est appellée la *co-sécante* de l'arc BF, parce qu'elle est la sécante de son complément. On peut aussi remarquer que la sécante d'un angle obtus est égale à la sécante d'un angle aigu, qui est son supplément. La sécante d'un angle droit est infinie : car étant alors parallele à la tangente, qui passe par l'extrêmité de l'autre côté de l'angle droit, elle ne peut la rencontrer qu'à l'infini ; ainsi les sécantes croissent depuis zero jusqu'à l'infini.

706. Quand on a construit les Tables des Sinus, l'on a supposé le rayon CB, ou autrement le sinus total divisé en 10000000 parties, & l'on a cherché combien le sinus de chaque angle, depuis une minute jusqu'à 90 degrés, pouvoit contenir de parties du sinus total, afin de connoître les sinus en nombre; & c'est ainsi que l'on a trouvé que le sinus d'un angle de 20 degrés, par exemple, contenoit 3420202 de ces parties, que le sinus de 55 degrés 10 minutes en contenoit 8208170, ainsi des autres qui en contiennent plus ou moins, selon que l'angle approche plus ou moins de la valeur d'un droit; & ce sont tous ces différens sinus que l'on trouve dans la seconde colonne des Tables sur chacun des feuillets.

707. Comme une tangente telle que BE augmente ou diminue, selon que l'angle ECB approche ou s'éloigne plus ou moins de l'angle droit, l'on a cherché aussi la valeur des tangentes de tous les angles, depuis celle d'une minute jusqu'à celle de 90 degrés, en considérant combien elle contenoit de parties de sinus total, c'est-à-dire de 10000000, & l'on en a composé la troisieme colonne des Tables, qui suit immédiatement celle des sinus; de sorte que l'on trouve à côté des sinus de chaque angle la valeur de la tangente du même angle. Ainsi l'on verra que la tangente de 20 degrés est de 3639702, & que la tangente de 55 degrés 10 minutes est 14370267 parties du sinus total, divisé en 10000000.

708. Enfin l'on a cherché aussi la valeur de la sécante de chaque angle, que l'on a trouvée par le moyen du sinus total & de la tangente; car comme une sécante telle que CE, n'est

autre chose que l'hypoténuse d'un triangle rectangle CBE, dont l'angle droit est compris par le sinus total CB, & la tangente BE de l'angle FCB; l'on a quarré le sinus total CB, & la tangente BE pour avoir la racine quarrée de la somme de ces deux produits, qui donne la valeur de la sécante; & c'est ainsi que l'on a trouvé les sécantes de tous les angles, depuis une minute jusqu'à 90 degrés, dont on a composé la troisieme colonne qui se trouve dans les Tables.

709. Si donc on veut sçavoir quel est le sinus, la tangente, & la sécante d'un angle, il faut considérer d'abord combien la mesure de l'angle contient de degrés, ou de degrés & de minutes, & chercher dans la Table le feuillet, où il y a marqué en haut le nombre de degrés de cet angle : par exemple, si l'angle est de 15 degrés, je cherche la page où est le nombre 15 en haut, & je trouve dans la premiere ligne que le sinus de 15 degrés est 2588190, que sa tangente est 2679492, & que la sécante est 10352762.

710. Mais comme les degrés de chaque page sont accompagnés d'un nombre de minutes, qui sont en progression Arithmétique, depuis 1 jusqu'à 60, qui se trouvent dans une petite colonne, où il y a au commencement ce mot *minute*, si l'on vouloit sçavoir le sinus de 15 degrés 24 minutes, je cherche d'abord, comme ci-devant, la page où il y a 15 degrés en haut, & je descends jusqu'à l'endroit de la colonne des minutes, où 24 se trouve marqué, & je prends le sinus qui lui correspond, qui est de 2655561.

711. Comme le sinus total, ou autrement le côté CB, devient le côté commun de tous les angles, puisqu'il n'y a que l'autre côté CF qui varie pour faire l'angle plus ou moins ouvert : il est à remarquer que le sinus total, la tangente & la sécante d'un angle peuvent toujours former les côtés d'un triangle rectangle, dont la grandeur est indéterminée, parce qu'il n'est question que de la proportion de ces côtés avec ceux d'un autre triangle qui lui seroit semblable; & pour faire voir ceci plus clairement, considérez le triangle rectangle CEF, si du point C l'on décrit l'arc BD, qui sera, par exemple, de 35 degrés, & qu'on éleve au point B la perpendiculaire BA, l'on aura le triangle rectangle CBA, dont le côté CB pourra être pris pour le sinus total, le côté AB pour la tangente de l'angle C, & le côté CA pour la sécante du *Figure 175.*

même angle; mais tous les côtés de ce triangle sont connus : car le côté C B étant le sinus total, sera de 10000000, le côté B A étant la tangente d'un angle de 35 degrés, sera de 7002075, & le côté C A étant la sécante du même angle, sera par conséquent de 12207746, & c'est par le moyen de ces triangles qu'on va résoudre les problêmes suivans.

712. Pour construire les tables, l'on a divisé le sinus total en un grand nombre de parties, afin que dans les divisions que les opérations demandent, l'on puisse négliger les restes, quand ils sont composés de ces petites parties; mais comme dans la pratique ordinaire de la Géométrie l'on peut se dispenser d'entrer dans une si grande exactitude, l'on pourra, au lieu de supposer que le sinus total est divisé en 10000000, le supposer seulement en 100000; & pour lors il faudra, au lieu de prendre toutes les figures qui sont dans les colonnes des sinus, des tangentes & sécantes, prendre seulement les premieres, & négliger les deux dernieres, que l'on voit séparées à droite par un petit point, c'est-à-dire, que pour la tangente de 30 degrés, au lieu de prendre 57735 : 03, on ne prendra que 57735; & c'est de cette façon que seront faits tous les calculs que l'on verra dans la suite.

Calcul des Triangles rectangles.

PROPOSITION I.

Probleme.

713. *Dans un triangle rectangle* A D E, *dont on connoît un angle aigu* A, *& le côté* A D, *trouver le côté* D E *opposé à l'angle aigu.*

Supposant que l'angle A soit de 30 degrés, & le côté A D de 20 toises, il faut chercher dans la table la tangente de 30 degrés, que l'on trouvera de 57735, & considérer que les triangles A B C & A D E étant semblables, l'on a A B : B C :: A D : D E, qui nous fournit cette regle, si A B, qui est le sinus total de 1000000, donne la tangente B C de 57735, que donnera le côté A D de 20 toises pour le côté D E, que l'on trouvera de 11 toises 3 pieds & quelques pouces.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

714. *Connoissant dans un triangle rectangle* ADE, *un angle aigu* A *de* 30 *degrés, & le côté* AD *de* 20 *toises, trouver l'hypoténuse* AE. Figure 176.

Il faut chercher la sécante de 30 degrés, qui est 115470, & considérer que le triangle ABC étant semblable au triangle ADE, AB : AC :: AD : AE. d'où l'on tire cette regle, si AB, qui est le sinus total de 100000, m'a donné 115470 pour la sécante AC, que me donnera le côté AD de 20 toises pour le côté AE, que l'on trouvera de 23 toises & quelques pouces.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

715. *Dans un triangle rectangle* ABC, *dont on connoît un angle aigu* A, *& le côté* BC *opposé à cet angle, trouver le côté* AB *opposé à l'autre angle aigu* C. Figure 177.

Si l'angle aigu A est de 40 degrés, & le côté CB de 25 toises, il faut chercher la tangente de 40 degrés, qui est 83909, & considérer que les triangles AED & ABC étant semblables, l'on a DE : EA :: CB : BA, d'où l'on tire cette regle, comme la tangente DE de 83909 est au côté EA, sinus total de 100000; ainsi le côté CB de 25 toises est au côté BA, que l'on trouvera de 29 toises & quelque chose.

716. Autrement, comme l'angle A est de 40 degrés, si l'on retranche ce nombre de 90, l'on aura 50 degrés pour l'angle C; & comme les triangles CED & CBA sont semblables, l'on pourra, en cherchant la tangente de l'angle C, dire, comme le côté CE, qui est le sinus total, est au côté ED, qui est la tangente de 40 degrés, ainsi le côté CB de 25 toises, est au côté BA, que l'on trouvera encore de 29 toises & quelque chose. Figure 178.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

Figure 179. 717. *Dans un triangle rectangle* ABC, *dont on connoît les deux côtés* AB & BC, *qui comprennent l'angle droit, trouver l'angle aigu* A.

Supposant que le côté AB soit de 16 toises, & le côté BC de 14, remarquez que les triangles ADE & ABC étant semblables, AB : BC :: AD : DE, d'où l'on tire cette regle, si le côté AB de 16 toises, donne le côté BC de 14, que donnera 100000, qui est le côté AD pour le côté DE, qui est la tangente de l'angle A, que l'on trouvera de 875000; & cherchant le nombre le plus approchant de celui-là dans la colonne des tangentes, l'on trouvera qu'il correspond à 41 degrés & 12 minutes, qui est la valeur de l'angle A.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

Figure 180. 718. *Dans un triangle rectangle* ABC, *où l'on connoît deux côtés* AB & AC, *qui comprennent un angle aigu* A, *trouver la valeur de cet angle.*

Supposant le côté AB de 35 toises, & le côté AC de 40, l'on aura, à cause des triangles semblables ADE & ABC, AB : AC :: AD : AE, d'où l'on tire cette regle, si le côté AB de 35 toises, donne 40 toises pour le côté AC, que donnera le sinus total AD de 100000 pour la sécante AE de l'angle A, que l'on trouvera de 114285, & ayant recours à la table pour y chercher dans la colonne des sécantes le nombre qui approche le plus de celui-ci, on trouvera qu'il correspond à 28 degrés 57 minutes, qui est la valeur de l'angle A.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

Figure 181. 719. *Dans tous triangles les sinus des angles sont dans la même raison que leurs côtés opposés.*

Je dis que dans un triangle ABC, il y a même raison du sinus de l'angle A à son côté opposé BC, que du sinus de l'angle B à son côté opposé AC.

DÉMONSTRATION.

Ayant circonscrit un cercle autour de ce triangle, on voit que l'angle A ayant pour mesure la moitié de l'arc BDC, la ligne BC sera la corde d'un arc double de celui qui mesure l'angle A : par conséquent la moitié de la ligne BC sera le sinus de l'angle A ; & par la même raison le sinus de l'angle B sera la moitié de la ligne AC, comme le sinus de l'angle C est à la moitié du côté AB ; ainsi l'on aura $\frac{BC}{2} : BC :: \frac{AC}{2} : AC$, ou bien $\frac{AC}{2} : AC :: \frac{AB}{2} : AB$. C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

THEOREME.

720. *Dans un triangle obtus-angle, le sinus de l'angle obtus est le même que celui de son supplément.* Figure 184.

Ayant abaissé la perpendiculaire CD sur la base prolongée BD, & décrit les arcs FE & HG avec une même ouverture de compas AF & BH, l'on abaissera les perpendiculaires FI & HL. Cela posé, comme AF est égal à BH, l'un & l'autre sera nommé a ; AC, b ; CD, c ; FI, d ; HL, e ; CB, f ; & nous ferons voir que FI (d) : CB (f) :: HL (e) : AC (b).

DEMONSTRATION.

Les triangles CAD & FAI étant semblables, l'on aura CD (c) : CA (b) :: FI (d) : AF (a). Et comme les triangles CBD & HBL sont aussi semblables, l'on aura encore CD (c) : HL (e) :: CB (f) : HB (a), d'où l'on tire ces deux équations $ac = bd$, & $ac = ef$, dont les premiers membres étant égaux, l'on aura par conséquent $bd = ef$, d'où l'on tire FI (d) : CB (f) :: HL (e) : AC (b), qui fait voir que le sinus HL du supplément de l'angle ABC a même raison au côté AC, que le sinus FI au côté BC ; & que par conséquent le sinus d'un angle obtus est toujours celui de son supplément. C. Q. F. D.

Ces deux théorêmes nous fournissent le moyen de connoître les angles & les côtés de la plûpart des triangles qui ne sont pas rectangles, comme on le va voir dans les problêmes suivans.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

Figure 182. 721. *Dans un triangle* ABC, *dont on connoît deux angles & un côté ; on demande de trouver les deux autres côtés.*

Le côté BC étant ſuppoſé de 15 toiſes, l'angle A de 40 degrés, & l'angle B de 60, l'on connoîtra le troiſieme angle, en ſouſtrayant de la valeur de deux droits, c'eſt-à-dire de 180 degrés, la ſomme des angles A & B, & l'on trouvera 80 degrés pour l'angle C. Cela poſé, pour connoître le côté AC, je cherche dans les Tables le ſinus de l'angle A, c'eſt-à-dire le ſinus de 40 degrés, qui ſera celui de l'angle oppoſé au côté que je connois, & je trouve qu'il eſt 64278 ; & cherchant auſſi celui de l'angle B oppoſé au côté que je cherche, je trouve qu'il eſt de 86602 : préſentement je dis : Si 64278, qui eſt le ſinus de l'angle A, donne 15 toiſes pour le côté BC, que donnera 86602, qui eſt le ſinus de l'angle B, pour le côté AC, que l'on trouvera de 20 toiſes & quelque choſe : pour trouver la valeur du côté AB, il faut chercher le ſinus de l'angle C, qui eſt de 98480, & dire encore : Si le ſinus de l'angle A, qui eſt 64278, donne 15 toiſes pour le côté BC, que donnera le ſinus de l'angle C, qui eſt 98480 pour le côté AB, que l'on trouvera de 23 toiſes & quelque choſe.

LEMME.

722. *Si l'on a deux grandeurs x & y, dont la ſomme eſt a, & la différence d, la plus grande eſt égale à la moitié de la ſomme, plus la moitié de la différence, & la plus petite eſt égale à la moitié de la ſomme, moins la moitié de la différence.*

Suppoſant que x ſoit la plus grande, & y la plus petite, il faut démontrer que $x = \frac{a+d}{2}$, & que $y = \frac{a-d}{2}$.

DEMONSTRATION.

Puiſque la ſomme des deux grandeurs eſt a, on aura $x+y = a$, & puiſque leur différence eſt d, on aura $x-y=d$. De la premiere équation, on tire $y=a-x$: donc en mettant cette valeur de y dans la ſeconde équation, on aura $x-a+x=d$, ou $2x=a+d$: donc $x=\frac{a+d}{2}$. Si l'on met cette valeur

valeur de x dans la premiere équation, on aura $\frac{a+d}{2}+y=a$ ou $a+d+2y=2a$: donc $2y=2a-a-d=a-d$, & $y=\frac{a-d}{2}$. C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

723. *Dans un triangle* ABC, *dont on connoît deux côtés* AC *&* BC *avec un angle* A, *opposé à l'un des côtés connus, trouver les deux autres angles.* Figure 183.

Pour trouver d'abord l'angle B, supposant que le côté AC soit de 26 toises, le côté BC de 20, & l'angle A de 50 degrés, il faut chercher le sinus de cet angle, qui est de 76604, & dire : Si le côté BC de 20 toises donne 76604 pour sinus de l'angle A, que donnera le côté AC de 26 toises pour le sinus de l'angle B, que l'on trouvera de 99585 ; & cherchant dans la colonne des sinus le nombre qui approche le plus de celui-ci, l'on verra qu'il correspond à 84 degrés 45 minutes, qui est la valeur de l'angle B.

Comme l'on connoît les angles A & B, l'on n'aura qu'à soustraire la somme de 180, le reste sera la différence 45 degrés 15 minutes pour l'angle C.

724. Mais si l'angle donné étoit plus ouvert qu'un droit, comme dans le triangle ABC, où l'angle B est de 120 degrés, le côté AC de 18 toises, & le côté BC de 12, il faudra, pour connoître l'angle A, chercher le sinus du supplément de l'angle obtus, c'est-à-dire le sinus de 60 degrés, qui est 86602 & dire : Si le côté AC de 18 toises donne 86602 pour le sinus du supplément de l'angle obtus, que donnera le côté BC de 12 toises pour le sinus de l'angle A, que l'on trouvera de 57734, qui correspond à 35 degrés 16 minutes ? Figure 185.

PROPOSITION X.

THEOREME.

725. *Dans tous triangles, comme* ABC, *dont on connoît deux côtés* BA *&* BC *avec l'angle compris* ABC, *la somme des deux côtés connus est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des deux angles inconnus* BAC, *&* BCA *est la tangente de la moitié de leur différence.* Figure 186.

DEMONSTRATION.

Si du point angulaire B l'on décrit un cercle, dont le rayon soit le côté BC, & que l'on prolonge le côté AB jusqu'à la circonférence en D & E, la ligne AD sera la somme des deux côtés connus, puisque BD est égal à BC, & la ligne AE sera la différence de ces deux côtés, puisque BA est plus petit que BD de toute la ligne AE. Cela posé, comme l'angle DBC est extérieur au triangle ABC, il sera égal aux deux intérieurs BAC & BCA: ainsi il vaudra la somme des deux angles inconnus; & si l'on tire la ligne EC, l'angle DEC, qui est à la circonférence, sera moitié de celui du centre DBC: ainsi il vaudra la moitié de la somme des deux angles inconnus; & si l'on tire la ligne DC, qui se trouve perpendiculaire sur EC, à cause que l'angle ECD est renfermé dans un demi-cercle, cette ligne sera la tangente de l'angle DEC, c'est-à-dire de la moitié de la somme des deux angles inconnus. Présentement considérez que le triangle EBC est isoscele, & que les angles BEC & BCE de la base sont égaux; par conséquent l'angle BEC sera plus grand que l'angle BCA de tout l'angle FCE; & comme l'angle extérieur BAC du triangle BAC est plus grand que l'angle BEC de tout l'angle ACE, il s'ensuit donc que l'angle BAC est plus grand que BCA de deux fois l'angle ACE; ce qui fait voir que l'angle ACE est la moitié de la différence des deux angles inconnus BAC & BCA. Or si la ligne EF est perpendiculaire sur EC, elle sera la tangente de la moitié de la différence des deux angles inconnus, étant tangente de l'angle FCE; mais les lignes DC & FE sont paralleles, puisqu'elles sont perpendiculaires sur EC; par conséquent l'angle FEA sera égal à son alterne EDC. Et comme les angles FAE & DAC sont aussi égaux, il s'ensuit que les triangles AFE & ADC sont semblables, d'où l'on tire AD : AE :: DC : FE, qui fait voir que la somme des deux côtés AD est à leur différence AE, comme la ligne DC, tangente de la moitié de la somme des deux angles inconnus, est à la ligne FE tangente de la moitié de leur différence. C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

716. *Dans un triangle* ABC, *dont on connoît deux côtés* AC & BC *avec l'angle compris* C, *trouver les angles* A & B. *Figure* 185.

Comme ce Problême est une application du théorême précédent, il faut, pour le résoudre, ajouter les deux côtés CB & CA ensemble, c'est-à-dire 25, & 20 pour avoir la somme des deux côtés connus, & soustraire le plus petit côté du grand pour en avoir la différence, qui sera 5; & comme l'angle C est supposé de 40 degrés, l'on cherchera sa différence avec deux droits, que l'on trouvera de 140, dont la moitié 70 sera la moitié de la somme des deux angles inconnus A & B. Or cherchant la tangente de cet angle, qui est 274747, l'on dira: Si 45, somme des deux côtés connus, donne 5 pour leur différence, que donnera 274747, tangente de la moitié de la somme des deux angles inconnus pour la tangente de la moitié de la différence des deux angles inconnus, que l'on trouvera 30527.

Présentement si l'on cherche dans la colonne des tangentes le nombre le plus approchant de celui-ci, l'on verra qu'il correspond à 16 degrés & 59 minutes: & comme cette quantité n'est que la moitié de la différence, il faut la doubler pour avoir la différence entiere, qui sera 33 degrés 58 minutes, qu'il faut soustraire de la somme des deux angles inconnus, c'est-à-dire de 140 degrés, & l'on trouvera pour la différence 106 degrés 2 minutes, dont on n'a plus qu'à prendre la moitié pour avoir la valeur de l'angle opposé au plus petit côté, c'est-à-dire de l'angle B, qui sera de 53 degrés une minute: car par le lemme de l'art. 722, le plus petit angle doit être égal à la moitié de la somme, moins la moitié de la différence, & c'est ce que l'on trouve en ôtant la différence de la somme, & prenant la moitié du reste.

Pour avoir l'angle A, on n'a qu'à ajouter la différence 33 degrés 58 minutes à la valeur de l'angle B, & l'on trouvera qu'il est de 86 degrés 59 minutes.

Si l'on veut connoître le côté AB, il sera facile de le trouver par la septieme proposition.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

Figure 188. 717. *Dans tous triangles comme* A B C, *dont on connoît les trois côtés, le plus grand côté* A C *est à la somme des deux autres côtés* A B *&* B C, *comme la différence de ces deux mêmes côtés est à la différence des segmens* A G *&* G C *de la base.*

DEMONSTRATION.

Si du point B l'on décrit un cercle, dont le rayon soit le côté B C plus grand que B A, & que l'on prolonge le côté A B jusqu'à la circonférence, B D étant égal à B C, A D sera la somme des deux côtés A B & B C, & A F en sera la différence : & comme la ligne E C est divisée en deux également par la perpendiculaire B G, E A sera la différence des deux segmens A G & G C. Si l'on tire les lignes D C & E F, l'on aura les deux triangles semblables A E F & A D C : car ils ont un angle opposé au sommet en A, & de plus l'angle en E est égal à l'angle en D, puisqu'ils sont appuyés sur le même arc F C. On aura donc cette proportion, A C qui est la base, est à A D qui est la somme des deux côtés, comme A F, qui est la différence de ces deux côtés est à A E, qui est la différence des segmens de la base. C. Q. F. D.

Ce théorême nous donne un moyen de connoître les trois angles d'un triangle dont on connoît les trois côtés, comme on le va voir dans le problême suivant, qui en est une application.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

Figure 189. 728. *Connoissant les trois côtés d'un triangle* A B C, *l'on demande de trouver la valeur d'un des segmens de la base.*

Supposant que la base A C soit de 15 toises, le côté A B de 8, & le côté B C de 12, il faut dire : Comme la base A C de 15 est à la somme des deux autres côtés, qui est 20 : ainsi la différence de ces deux côtés, qui est 4, est à la différence des deux segmens, que l'on trouvera de 5 toises 2 pieds. Présentement si l'on ajoute cette quantité à la valeur de la base A C, l'on aura 20 toises 2 pieds, qui sera la valeur d'une ligne

telle que EC ; par conséquent si on en prend la moitié, on connoîtra le plus grand segment DC, qui est de 10 toises un pied: mais comme l'on connoît dans le triangle rectangle DBC les côtés BC & DC, l'on pourra donc connoître aussi l'angle C, & ensuite les angles A & B. Pour cela, on fera cette proportion, comme le côté BC est au sinus total, ainsi le segment DC est au sinus de l'angle DBC. Connoissant cet angle, on n'aura qu'à ôter sa valeur de 90 degrés, & l'on aura la valeur de l'angle C. On trouveroit de même l'angle ABD & l'angle A.

Usages des Logarithmes pour le calcul des Triangles.

729. On a pu voir dans les Tables qu'il y a trois colonnes sur la droite de celles dont nous nous sommes servis, au haut desquelles on trouve ces mots, *Logarithmes des sinus, Logarithmes des tangentes, Logarithmes des sécantes.* Pour concevoir comment on peut faire usage des logarithmes dans le calcul des triangles, il faut se rappeller ce que nous avons démontré sur les propriétés des logarithmes, par le moyen desquels toute multiplication est réduite à l'addition des logarithmes du multiplicande & du multiplicateur, & toute division à une soustraction du logarithme du diviseur de celui du dividende. Il faut encore se rappeller que toute Regle de Trois se réduit à l'addition des logarithmes des deux moyens, & à la soustraction du logarithme du premier extrême de la somme de ceux des moyens. Cela posé, il est évident que si l'on connoît les logarithmes des sinus, tangentes & sécantes, comme on a ceux des nombres naturels qui expriment les côtés des triangles que l'on veut calculer, les proportions qu'il faut faire se réduiront à l'addition de deux logarithmes, & à la soustraction du logarithme du premier terme de la somme des logarithmes des moyens. Ainsi en cherchant les sinus, il faudra prendre le logarithme du sinus; en cherchant une tangente, il faudra prendre le logarithme de cette tangente, & en cherchant la sécante, il faudra prendre le logarithme de cette sécante au lieu des sinus des tangentes & des sécantes. Ensuite au lieu de mettre les nombres naturels qui expriment le nombre de toises ou de pieds contenus dans les côtés connus, il faudra prendre les logarithmes de ces nombres, que l'on cherchera dans les

Tables des Logarithmes calculées depuis l'unité jusqu'à 200000, que l'on trouve dans le même Livre que les Tables des sinus tangentes & sécantes. On en va voir des exemples dans les articles suivans.

EXEMPLE I.

Figure 180. 730. Ayant un triangle rectangle ADE, dont on connoît l'angle A de 30 degrés, & le côté AD de 20 toises; l'on demande de trouver le côté DE, en se servant des logarithmes.

Pour le trouver, je cherche dans la Table la page, au sommet de laquelle il y a 30 degrés; & au lieu de prendre la tangente de la troisieme colonne, je prends son logarithme, qui est 97614394. Et comme j'ai aussi besoin du sinus total, au lieu de prendre celui qui est divisé en 100000 parties, je prends son logarithme, qui est divisé en 100000000 parties; & comme il faut faire une Regle pour trouver le côté DE, dont le premier terme doit être le sinus total dont je viens de parler, le second la tangente que nous venons de trouver, & le troisieme la valeur du côté AD. Il faut aussi, au lieu de mettre simplement 20 toises au troisieme terme, mettre à sa place le logarithme de ce nombre, que l'on trouvera dans le premier feuillet de la Table des Logarithmes des nombres naturels à côté du nombre 20, dont le logarithme est 13010300. Présentement il faut faire cette proportion arithmétique : Si le sinus total 100000000 donne 97614394 pour le logarithme de la tangente de 30 degrés, combien donneront 13010300, logarithme de 20 toises, pour le logarithme du nombre que je cherche; & pour le trouver, j'additionne le second & le troisieme terme, & de la somme j'en soustrais le premier pour avoir 10624694, qui est le logarithme du nombre que je cherche: & pour sçavoir quel est ce nombre, j'ai recours à la Table des Logarithmes des nombres naturels pour chercher un logarithme qui approche le plus de celui-ci, & j'en trouve un qui est un peu trop petit, qui correspond au nombre 11, & un autre qui est un peu trop grand, qui correspond au nombre 12; c'est pourquoi j'en cherche un qui soit à peu près moyen entre ces deux-là, comme est, par exemple, $11\frac{1}{2}$; ce qui fait voir que le côté DE est à peu près de 11 toises 3 pieds.

Exemple II.

731. Si l'on a un triangle rectangle ABC, dont on connoît le côté AB de 16 toises, & le côté BC de 14, pour connoître l'angle A, il faut chercher dans la seconde Table le logarithme de 16, qui est 12041200, & le logarithme de 14, qui est 11461280; & à cause des triangles semblables ABC & ADE, l'on dira : Si 12041200, logarithme du côté AB, donne 11461280 pour le logarithme du côté BC, que donnera le logarithme du côté AD, qui est 100000000 pour le logarithme de la tangente DE, l'on trouvera (après avoir ajouté le second & le troisieme terme, & soustrait de leur somme le premier) que la différence est 99420080 pour le logarithme de la tangente, lequel correspond dans les Tables à 41 degrés 12 minutes, qui est la valeur de l'angle A. *Figure* 179.

Exemple III.

732. Ayant un triangle ABC, dont on connoît l'angle A de 40 degrés, & l'angle B de 60, & le côté BC de 15 toises, l'on demande la valeur du côté AC. *Figure* 182.

Je cherche le logarithme du sinus de 40 degrés, qui est 98080675, & le logarithme de 60 degrés, qui est 99375306; & enfin dans la seconde Table le logarithme du nombre 15, qui est 11760913; & faisant l'analogie ordinaire, je dis : Si le logarithme du sinus de l'angle A, qui est 98080675, donne 11760913 pour le logarithme du côté BC, que donnera le logarithme du sinus de l'angle B, qui est 99375306 pour le logarithme du côté AC, que je trouve de 13055544; & cherchant dans la seconde Table le logarithme qui approche le plus de celui-ci, je trouve qu'il correspond au nombre 20; ce qui fait voir que le côté AC est de 20 toises.

Application de la Trigonometrie a la pratique.

PROPOSITION XIV.

Probleme.

733. *Trouver une distance inaccessible.* Pl. XII.

Un objet quelconque tel que C étant donnée, duquel on suppose qu'on ne peut pas approcher, on demande la quantité de toises qu'il peut y avoir de cet objet à l'endroit D. *Figure* 190.

Pour la trouver, il faut envoyer une personne avec un jalon à l'endroit A, éloigné d'une distance proportionnée à l'intervalle qu'il peut y avoir du point D au point C. Cette distance sera, par exemple, ici de 20 toises, qui est une quantité qui doit servir de base pour faire l'opération. Après cela vous prendrez l'ouverture de l'angle formé par la base D A, & le rayon visuel D C; & pour bien prendre cet angle, il faut commencer par mettre les deux pinulles du graphometre, qui sont immobiles d'alignement avec les points D & A : après quoi vous faites tourner l'alidale de maniere que vous puissiez appercevoir par les fentes des pinulles (qui sont à ses extrêmités) l'objet C. Après quoi vous comptez la quantité de degrés que contient l'angle marqué sur le graphometre, c'est-à-dire l'angle compris par le côté du graphometre, qui est d'alignement avec les points D & A, & le rayon visuel qui apperçoit l'objet C; & je suppose que c'est ici de 70 degrés. Cela étant fait, il faut poser un autre jalon à l'endroit où étoit posé le pied du graphometre, c'est-à-dire au point D, & puis venir à l'endroit A pour y prendre la valeur de l'angle D A C, j'entends l'angle formé par la base, & par un second rayon visuel, qui doit observer l'objet C, & je suppose que cet angle est de 80 degrés. Cela posé, il ne s'agit plus que de connoître l'angle C, que l'on trouvera aisément en soustrayant la somme des deux angles A & D de la valeur de deux droits, & vous trouverez que cet angle est de 30 degrés. Or pour connoître le côté C D, il n'y a qu'à dire : Si le sinus de 30 degrés m'a donné 20 toises pour le côté A D, que me donnera le sinus de l'angle A de 80 degrés pour la valeur du côté C D ? L'on trouvera 39 toises deux pieds pour la distance que l'on cherche.

Remarque.

734. Il arrive quelquefois que l'on est embarrassé de trouver une distance inaccessible, lorsqu'elle est extrêmement éloignée, comme si elle avoit deux ou trois lieues La difficulté pour lors est d'avoir une base assez grande, qu'il faut dans ce cas-là au moins de 1000 toises. Comme il seroit fort pénible de mesurer une si longue distance, jointe à l'inégalité du terrein, & aux obstacles qu'on peut rencontrer, le parti qu'il faut prendre, c'est de se donner d'abord une petite base, par le moyen de laquelle vous pouvez en avoir une trois ou quatre fois plus grande;

grande; & avec cette seconde, une troisieme plus grande est suffisante pour faire votre opération.

Les opérations précédentes sont très-utiles pour lever des Cartes, afin de se donner des points capitaux pour y rapporter tous les lieux qui y ont rapport; ou bien si l'on veut lever la campagne qu'occupe une armée, pour y marquer les quartiers, les lignes de circonvallation, les postes de conséquence; enfin tout ce qui peut devenir intéressant en pareil cas.

Si on assiége une Place, & que l'on soit obligé de faire quelques galeries pour établir des fourneaux sous les angles du chemin couvert, ou sous quelque ouvrage avancé, il faut absolument avoir recours à cette opération, afin qu'étant prévenu de la distance de l'entrée de la galerie à l'objet vers lequel on chemine, on sçache donner à cette galerie la longueur nécessaire pour être positivement sous l'objet qu'on veut faire sauter.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

735. *Trouver la distance inaccessible d'un lieu à un autre, comme de l'endroit* D *à l'endroit* C. *Figure* 191.

Pour faire cette opération, il faut commencer par se donner une base telle que AB, que je suppose ici de 100 toises, & de l'extrêmité B prendre avec l'instrument l'ouverture de l'angle ABC, formé par la base AB, & le rayon visuel BC; on suppose cet angle de 92 degrés: du même endroit B il faut prendre aussi l'ouverture de l'angle ABD, qui sera, par exemple, de 45 degrés; & cette opération étant faite, il faut venir à l'autre extrêmité A de la base AB, pour y prendre l'ouverture de l'angle DAB, que je suppose ici de 98 degrés; & du même endroit prendre encore l'ouverture de l'angle DAC, qui sera, par exemple, de 50 degrés. Les angles étant connus, aussi-bien que la base AB, l'on n'aura aucune difficulté de trouver la distance DC, non plus que celle de D en A, & celle de B en C: car considérez qu'il est facile de trouver la valeur des côtés AC & BC du triangle CAB, parce que l'on connoît le côté AB de 100 toises, l'angle B de 92 degrés, & l'angle CAB de 48, & par conséquent l'angle ACB de 40 degrés. Cela posé, pour trouver la valeur du côté CB,

il n'y a qu'à dire : Si le ſinus de l'angle ACB m'a donné le côté AB de 100 toiſes, que me donnera le ſinus de l'angle CAB pour la valeur du côté CB que je cherche ? & pour trouver le côté AC, il faut dire encore : Si le ſinus de l'angle ACB m'a donné la valeur du côté AB, que me donnera le ſinus de l'angle du complément de 92 degrés, qui ſera celui de 88 degrés pour la valeur du côté AC, parce que l'angle ABC eſt obtus ?

Comme on ne peut pas connoître la valeur du côté DC ſans celle du côté DA, pour le trouver il faut dire : Si le ſinus de l'angle ADB de 37 degrés m'a donné la valeur du côté AB de 100 toiſes, que me donnera le ſinus de 45 degrés pour la valeur du côté DA, lequel étant connu, auſſi-bien que le côté AC, & l'angle DAC, nous aurons deux côtés connus, & l'angle compris dans un triangle, qui pourra nous donner les deux angles inconnus ; & en ſuivant ce qui eſt dit dans la propoſition 10ᵉ, art. 725, il faudra d'abord chercher les angles en D & en C : par cette proportion, la ſomme des deux côtés AC, AD (que l'on vient de trouver), eſt à leur différence, comme la tangente de la moitié de la ſomme des angles en C & en D eſt à la tangente de la moitié de la différence. Ayant l'angle C, que je ſuppoſerai le plus grand, pour avoir le côté CD, on fera cette autre proportion : Le ſinus de l'angle C eſt au côté AD connu, comme le ſinus de l'angle A eſt au côté DC que je cherche ; & l'on aura ainſi le côté DC, qui eſt la diſtance que l'on demande.

Comme il arrive preſque toujours que la campagne n'eſt pas marquée ſur le plan des Villes que l'on aſſiege, & que ſi elle y eſt figurée, l'on ne peut pas, ſans faire de grandes erreurs, ſe fier à la préciſion de ceux qui les ont levés ou copiés, l'opération précédente nous donne un excellent moyen pour orienter ſur le plan par rapport à la place, la queue de la tranchée de chaque attaque, afin de pouvoir enſuite projetter les travaux que l'on a envie de faire d'une nuit à l'autre, ou ſeulement les y marquer à meſure qu'on les avance, parce qu'ayant une fois un bout de parallele, l'on peut de dedans la tranchée meſurer les boyaux, & prendre l'ouverture des angles qui ſont les retours ; marquer la poſition des batteries ; enfin lever le plan de la tranchée avec autant d'exactitude que s'il n'y avoit aucun obſtacle.

REMARQUE GENERALE.

736. Il faut bien remarquer que lorſque l'on cherche un côté, on doit toujours commencer la proportion par un ſinus; & ſi c'eſt un angle que l'on veut avoir, il faut commencer la proportion par un côté: de cette maniere la grandeur que l'on cherche ſera toujours le quatrieme terme d'une proportion géométrique, dont les trois premiers termes ſont connus, en cas que l'on ſe ſerve des ſinus & des nombres naturels, ou ce quatrieme terme ſera le logarithme de ce que l'on cherche, en cas que l'on prenne les logarithmes des ſinus & ceux des nombres naturels.

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

737. *Tirer une ligne parallele à une autre inacceſſible.* *Figure* 192.

On demande de tirer par le point C une parallele à une ligne inacceſſible AB.

Pour réſoudre ce problême, il faut commencer par ſe donner une baſe telle que CD, qui doit être, comme nous l'avons dit ailleurs, proportionnée à la diſtance de l'objet, afin que l'opération en ſoit plus juſte, & nous ſuppoſons que 150 toiſes eſt la longueur qui lui convient.

Nous ſçavons que deux lignes paralleles étant coupées par une troiſieme, forment les angles alternes égaux, & que par conſéquent lorſque les angles alternes ſeront égaux, les lignes ſeront paralleles; d'où il ſuit que ſi l'on connoît l'angle ABC, formé par la parallele AB, & le rayon viſuel CB, on n'aura qu'à faire l'angle BCE égal au précédent, pour que la ligne CE ſoit parallele à la ligne AB: ainſi toute la queſtion eſt réduite à trouver la valeur de l'angle ABC. Afin de la connoître, je commence du point C par prendre l'ouverture de l'angle ACB, que je trouve de 40 degrés: enſuite je viens au point D pour y prendre l'ouverture de l'angle CDB, qui eſt de 86 degrés; & je prends auſſi l'ouverture de l'angle ADB, qui ſera, par exemple, de 60 degrés. Ces choſes étant connues, je fais enſorte de trouver par leur moyen la valeur des lignes CA & CB. Pour cela, je cherche dans le triangle CDB la valeur du côté CB. Pour le trouver, je conſidere

que l'angle BCD est de 80 degrés, & que l'angle CDB est de 86; d'où il suit que l'angle CBD est de 14 degrés. Cela posé, il faut dire : Si le sinus de l'angle de 14 degrés m'a donné 150, que me donnera le sinus de 86 pour la valeur du côté opposé CB?

Pour trouver le côté CA, je fais attention que l'angle CDA est de 26 degrés, & que l'angle ACD étant de 120 degrés, l'angle CAD doit être de 34 degrés. Cela étant, je dis encore: Si le sinus de l'angle CAD de 34 degrés, m'a donné 150 toises pour le côté CD, que me donnera le sinus de l'angle CDA de 26 degrés pour la valeur du côté CA? Or comme nous avons dans le triangle ACB les deux côtés AC & CB de connus avec l'angle compris ACB, il s'ensuit que l'on trouvera aisément par la proposition 10e la valeur de l'angle ABC, dont la connoissance est la solution du problême.

L'on est souvent obligé de mener une parallele à une ligne inaccessible dans une infinité d'occasions, soit qu'on veuille percer des routes dans un bois avec certaines précautions, ou soit dans les siéges, quand on veut dresser une batterie qui soit parallele à la face de l'ouvrage que l'on veut battre, ou quand on en veut faire une autre en écharpe, dont les feux aillent se diriger selon un angle donné avec la face.

PROPOSITION XVII.

PROBLEME.

Figure 193. 738. *Mesurer une hauteur accessible ou inaccessible.*

Pour mesurer la hauteur AB d'une Tour, il faut se donner une base telle que EB, qu'il faut mesurer exactement depuis le point du milieu B de la Tour jusqu'à l'endroit E, qui est le lieu où l'on aura planté le graphometre; & supposant que cette base soit de 25 toises, l'on prendra l'ouverture de l'angle ACD formé par deux rayons visuels, dont le premier CD doit être parallele à l'horizon, & le second CA doit aboutir au sommet de la Tour; & supposant que l'angle soit de 35 degrés, l'on cherchera dans le triangle ACD le côté AD, en disant: Comme le sinus total est à la tangente de l'angle C, ainsi le côté CD de 25 toises est au côté DA, que l'on trouvera de 17 toises 3 pieds; à quoi ajoutant la hauteur DB ou CE du pied de l'instrument, qui est ordinairement de 4 pieds, on

trouvera que la hauteur AB de la Tour est de 18 toises un pied.

Mais si l'on avoit à prendre la hauteur d'une Tour ou d'une éminence qui fût inaccessible, comme on le voit dans la figure 194, il faudroit de l'endroit F prendre l'ouverture de l'angle ADG, formé par deux rayons; & supposant qu'on a trouvé cet angle de 50 degrés, il faudra se reculer sur l'alignement des points D & G jusqu'à l'endroit C, afin d'avoir une base EF d'une longueur suffisante pour que l'angle CAD ne soit pas trop aigu; & cette base ayant été trouvée de 40 toises, l'on prendra encore l'ouverture de l'angle ACG, qui sera, par exemple, de 30 degrés. Or comme l'angle ADG est égal aux deux autres intérieurs opposés du triangle CAD, la différence de cet angle, qui est de 50 degrés à l'angle ACD, qui est de 30 degrés, sera la valeur de l'angle CAD, que l'on trouvera de 20 degrés. Or comme dans le triangle rectangle ADG nous avons besoin de connoître le côté DA pour connoître le côté AG, l'on dira: Si le sinus de l'angle CAD de 20 degrés m'a donné 40 toises pour le côté CD, que donnera le sinus de l'angle ACD de 30 degrés pour le côté AD, que l'on trouvera de 63 toises 2 pieds? *Figure* 194.

Pour donc trouver le côté AG, je dis: Comme la sécante de l'angle ADG est à sa tangente, ainsi le côté DA de 63 toises 2 pieds, est au côté AG, que l'on trouvera de 48 toises 3 pieds: à quoi il ne faut plus qu'ajouter la hauteur du pied de l'instrument pour avoir la ligne AB.

Maniere de lever une Carte par le moyen de la Trigonométrie.

739. L'on doit distinguer deux sortes de cartes: les unes sont des cartes générales, & les autres des cartes particulieres: les dernieres sont celles que l'on leve avec beaucoup d'attention, n'oubliant rien de tout ce qui peut avoir lieu dans la carte, tel que la grandeur & la figure des Villages, des Bourgs & des Villes, les Bois, les Ponts, les Rivieres, les Chemins, les Fontaines, les Croix, Chapelles, Justices, &c. *Figure* 195.

Pour les cartes générales, l'on ne prend que la position des lieux les plus considérables, & la figure des grands chemins, omettant quantité de choses qui ne pourroient se placer sur ces sortes de cartes, parce qu'elles sont ordinairement dressées sur de petites échelles. Telles sont les Cartes des

Royaumes & des grandes Provinces. Cependant l'on peut dire que l'on s'y prend de la même façon pour lever les cartes particulieres & générales, parce que pour les unes & les autres l'on commence par faire un canevas, qui n'est autre chose que la grandeur de la carte determinée avec les principales positions, après quoi l'on entre dans le détail de chaque chose, comme nous le ferons voir après avoir enseigné la maniere de prendre les positions qui doivent faire les principaux points de la carte.

Si l'on vouloit, par exemple, lever la carte des lieux marqués par les lettres de cette figure, l'on voit que l'objet qu'on se propose n'est autre chose que de placer sur le papier les différens endroits qui sont ici, ensorte que la distance qu'il y a d'un lieu à un autre ait le même rapport sur la carte que sur le terrein; ce qui est proprement faire une réduction de grand en petit. Comme ces réductions ne peuvent se faire que par les triangles semblables, il s'ensuit qu'en levant la carte d'un pays par le moyen de la Trigonométrie, il ne s'agit que de trouver la valeur des angles & des côtés qui sont formés par la distance des lieux. Cela posé, je commence par établir une base la plus grande qu'il est possible, afin que les lieux qui doivent s'y rapporter soient plus exactement levés. Pour cela il faut éviter, autant qu'il est possible, d'avoir des angles trop obtus & trop aigus. Ayant donc choisi les points de station A & B, je commence par en chercher la distance de la maniere que nous l'avons enseigné dans la seconde proposition: l'ayant trouvée, je viens à l'endroit B, pour y prendre l'ouverture des angles formés par la base AB, & les différens endroits que je me propose de lever. Pour cela, je prends l'ouverture de l'angle ABC, de l'angle ABD, de l'angle ABE, je passe le point F, parce que l'angle qu'il formeroit avec la base seroit trop obtus, & qu'on auroit trop de peine à couper le rayon qui seroit tiré de B en F: je continue à prendre l'ouverture des angles ABG, ABH, ABI, & ABK: je passe aussi le point L, parce que l'angle formé par la base AB, & le rayon de B en L seroit trop aigu.

Présentement il ne s'agit plus, pour avoir la position des endroits qu'on voit marqués ci-dessus, que de couper les rayons qu'on vient de tirer. Pour cela, je viens au point A, pour y prendre l'ouverture de l'angle BAE, qui me donnera

le point E, parce que dans le triangle ABE, je connois le côté AB, & la valeur des angles EAB & ABE, par le moyen desquels je trouverai les distances AE & BE. Pour les autres points, je continue à couper les rayons que j'ai tirés dans la premiere opération, en prenant l'ouverture des angles BAD, BAC, BAG, BAH, BAI, BAK. Comme tous les triangles formés par ces rayons ont la base AB pour côté commun, il s'ensuit qu'on pourra en trouver la longueur, puisqu'il n'y a point de triangle dans lequel on ne connoisse deux angles & un côté. Comme nous avons passé deux endroits pour les raisons que nous avons dites, il faut faire voir comment on en peut trouver la position, sans se servir de la base AB: pour donc trouver le point F, je prends la distance BE ou BG pour base, ou toute autre qui pourroit mieux convenir; mais je choisis ici le côté BE, & du point B je prends l'ouverture de l'angle EBF, & du point E l'ouverture de l'angle BEF, qui me donne le point F. Je fais la même chose pour trouver le point L, & même le point M, que je suppose n'avoir pu prendre dans les opérations précédentes, c'est-à-dire, je choisis la base AC, & du point A je prends les ouvertures des angles CAM & CAL, & du point C je prends encore l'ouverture des angles ACL & ACM.

Après avoir trouvé la valeur de tous les côtés des triangles qui sont ici, il faut les rapporter sur le papier, en donnant à chaque ligne la valeur qu'elle doit avoir; ce qui se fera sans difficulté par le moyen d'une échelle: & après que toutes ces positions seront rapportées bien exactemenr, l'on pourra, en suivant la même méthode, continuer à lever les lieux qu'on aura pu découvrir dans les premieres opérations; ce qui sera bien aisé, puisqu'on aura de toutes parts des bases, dont la valeur sera connue. Par exemple, pour lever les objets au-delà des points C & D, on pourra prendre la distance CD pour base; d'un autre côté on pourra prendre la ligne IH; enfin sur la gauche la distance LK, sur la droite toute autre ligne que l'on choisira de même.

Des attentions qu'il faut avoir pour lever une Carte particuliere.

740. Quand on veut lever une carte d'une façon à ne rien omettre de toutes les particularités qui entrent dans le détail

d'une carte, ceux qui conduisent le travail doivent envoyer des personnes entendues dans les Villages pour lever leurs situations, leurs figures, la forme des rues, la position des fontaines, s'il s'y en trouve, des carrieres, des montagnes, collines & vallons, qui peuvent se rencontrer dans les environs. On réduit chaque village sur l'échelle de la carte; & pour les rapporter, on a soin que l'Eglise soit positivement au point qui est marqué sur le canevas, parce que ces points sont ordinairement des clochers & des tours. Pour les Villes, on fait ensorte d'en avoir les plans, qu'on réduit à l'échelle de la carte. Quand il se rencontre des bois ou des forêts, l'on commence par lever exactement les villages & les hameaux qui sont les plus proches, pour avoir des bases, qui ne sont autre chose que la distance d'un lieu à un autre, desquels on forme un espece de polygone qui entoure le bois : après quoi il est aisé de rapporter à ce polygone un nombre de points, qui marquent les limites du bois, pour en tracer ensuite à la vue la figure extérieure, quand il ne s'agira que de quelque sinuosité peu considérable. Après cela, il faut entrer dans le bois pour y considerer les principaux chemins, les ruisseaux, les fontaines, les maisons & les châteaux qui pourroient s'y rencontrer. Toutes ces choses doivent être levées avec le plus de précision qu'il est possible. Pour cela l'on se donne des points de position que l'on prend dans les bois, par des opérations que l'on fait sur quelque éminence hors du bois. Ces points de position sont ordinairement des clochers, des châteaux, ou bien quelques grands arbres qui se font distinguer au dessus des autres : & lorsqu'on est une fois parvenu à la connoissance de quelqu'un de ces points, l'on peut, sans aucune difficulté, orienter les différens endroits qui se trouvent dans le bois, à l'aide des positions connues.

Application de la Trigonométrie à la Fortification.

Pl. XIII. 741. Quand on veut tracer une fortification sur le terrein, *Figure 196.* il est absolument néceessaire de connoître toutes les lignes & les angles qui en composent le projet; & comme cette connoissance doit être la plus exacte qu'il est possible, il ne conviendroit pas que l'on se servît du compas pour trouver avec l'échelle les lignes que l'on ne connoît pas, non plus que du rapporteur

rapporteur pour trouver la valeur des angles, puisque l'on peut faire des erreurs insensibles sur le papier, qui deviendroient de conséquence sur le terrein; c'est pourquoi il est à propos d'avoir recours à la Trigonométrie, pour déterminer par le moyen des lignes que l'on connoît, celles que l'on ne connoît pas: & comme dans la fortification, selon la méthode de M. de Vauban, l'on connoît la base de 180 toises, la perpendiculaire CF de 30, & la face AD de 50, voici de quelle maniere on pourra connoître l'angle de l'épaule, l'angle flanquant, le flanc & la courtine; supposant qu'on est prévenu que la ligne DH est égale à la ligne DE.

Il faut avant toutes choses chercher la valeur de l'angle FAC, en disant: Comme le côté AC de 90 toises est au côté CF de 30, ainsi le sinus total AI est à la tangente ID, qui étant trouvée, l'on verra qu'elle correspond à un angle de 18 degrés 26 minutes, qui est la valeur de l'angle FAC: par conséquent celle de l'angle HDE, à cause des paralleles AB & DE qui aboutissent sur AH.

Or comme nous avons besoin dans le triangle DAI du côté AI, on n'aura qu'à dire (pour le connoître): comme la sécante de l'angle DAI est au sinus total, ainsi le côté AD de 50 toises est au côté AI; que l'on trouvera de 47 toises 2 pieds, qu'on n'aura qu'à retrancher de la ligne AC de 90 toises pour avoir la ligne IC de 42 toises 4 pieds; & comme cette ligne est moitié du côté DE, on verra que ce même côté est de 85 toises 2 pieds.

Comme le triangle HDE est isoscele, & que l'on connoît l'angle du sommet avec les deux côtés qui le comprennent, parce que la ligne DH est le prolongement de la ligne AD; & que la ligne DE est parallele à la ligne AB, *par construction*, on aura l'angle en H ou l'angle en E, en retranchant l'angle D de 180 degrés, & prenant la moitié pour cet angle. Ainsi l'on dira (pour avoir le flanc HE): Si le sinus de l'angle DHE m'a donné le côté DE, que me donnera le sinus de l'angle HDE pour le flanc ou côté HE, que l'on trouvera de 27 toises 2 pieds?

Comme les angles de la base du triangle isoscele sont chacun de 80 degrés & 47 minutes, puisque l'angle du sommet est de 18 degrés 26 minutes; il s'ensuit, à cause des angles alternes formés par les lignes paralleles GH & DE, que si de l'angle

HED on retranche l'angle GED de 18 degrés 26 minutes, il restera 62 degrés 21 minutes pour l'angle GEH, dont le supplément à 180, qui est l'angle de l'épaule HEB, est de 117 degrés 39 minutes: & si l'on ajoute au contraire à DHE l'angle GHD, qui est aussi de 18 degrés 26 minutes, l'on trouvera que l'angle flanquant GHE est de 99 degrés 13 minutes.

Or comme du triangle GHE l'on connoît les angles & le côté HE, l'on n'aura (pour connoître la courtine) qu'à dire: Comme le sinus de l'angle HGE est au côté HE, ainsi le sinus de l'angle GEH est au côté GH, que l'on trouvera de 76 toises 3 pieds.

Pour connoître l'angle flanqué, considérez qu'il est plus petit que l'angle de la circonférence de deux fois l'angle DAI, qui est de 18 degrés 26 minutes: & comme l'on suppose qu'il s'agit ici d'un exagone, dont l'angle de la circonférence est de 120 degrés, l'on n'aura qu'à retrancher 36 degrés 52 minutes de 120 degrés pour avoir l'angle flanqué, qui sera de 83 degrés 8 minutes.

L'on pourra calculer de même tous les autres fronts de fortification, dont le côté extérieur auroit plus ou moins de 180 toises, parce que les proportions se trouveront toujours. Ainsi quand il s'agira de calculer les lignes & les angles dont un ouvrage à corne, ou un ouvrage à couronne est composé, il suffira de connoître le côté extérieur, la perpendiculaire, & la face d'un bastion pour connoître le reste: c'est pourquoi cette pratique peut avoir également lieu dans la fortification irréguliere comme dans la réguliere; car soit que l'on fasse les flancs perpendiculaires sur la ligne de défense, ou sur la courtine, selon les cas où l'on seroit obligé de suivre une méthode plutôt qu'une autre, l'on trouvera le calcul également aisé, pourvu que l'on ait seulement quelques grandeurs connues, par le moyen desquelles on puisse opérer.

742. De tout ce qui regarde le calcul d'une fortification, je n'ai point trouvé de partie plus difficile à calculer que la valeur de la face de la demi-lune; & l'on peut même regarder ce cas-là comme un petit problême de fortification: c'est pourquoi je crois qu'on sera bien aise d'en voir la solution; car quoiqu'elle paroisse peu de chose, elle ne laisseroit pas que d'embarrasser un Commençant: ainsi pour bien sçavoir de quoi il est question, voici comme on suppose que la demi-lune a été tracée.

Après avoir pris le point E sur la face d'un bastion à 5 toises *Figure 197.* au dessus de l'angle de l'épaule, l'on a du point C comme centre, & de l'intervalle CE, décrit un arc, qui venant rencontrer la capitale, a donné le point F pour la pointe de la demi-lune; ensuite l'on a pris le point D à trois toises au dessus de l'angle de l'épaule, & l'on a tiré la ligne FD: après quoi l'on a fait le fossé de 20 toises sur le prolongement de la face à l'endroit AH, & l'on a tiré la ligne HK, qui détermine la longueur IF de la face de la demi-lune, dont il s'agit de trouver la valeur.

Comme il seroit facile de trouver la longueur IF, si l'on connoissoit la valeur des lignes DI & DF, nous allons voir comment on peut y parvenir, en tirant les lignes DH, DK, CF, & en connoissant les parties du corps de la Place que nous venons de trouver. Pour y arriver, je cherche dans le triangle rectangle CLF la valeur de l'angle LCF, par le moyen des deux côtés LC & CF, qui me sont connus (puisque l'un vaut la moitié de la courtine, & que l'autre est égal à la ligne CE), en disant: Comme le côté LC est au côté CF; ainsi le sinus total est à la sécante, qui donnera 65 degrés pour l'angle LCF, duquel ayant retranché l'angle MCD de 18 degrés 26 minutes, restera 46 degrés 34 minutes pour l'angle DCF.

Or comme le côté DC est de 88 toises 2 pieds, & le côté CF de 90 toises 2 pieds, & que l'on connoît l'angle qu'ils comprennent, on trouvera par l'analogie ordinaire que le côté DF est de 70 toises 2 pieds, & que l'angle CDF est de 68 degrés 15 minutes.

Comme nous avons besoin de connoître l'angle CDK, aussi-bien que le côté DK, considérez que dans le triangle CDK, l'on connoît les deux côtés DC & CK avec l'angle qu'ils comprennent, & que par conséquent il sera facile de trouver ce que l'on cherche. Aussi verra-t'on que CDK est de 17 degrés 49 minutes, & le côté DK de 88 toises.

Or comme il faut dans le triangle HDK connoître, outre le côté DK, le côté HD avec l'angle qu'ils comprennent pour parvenir à la solution du problême, considérez que dans le triangle AHD l'on connoît le côté AD de 47 toises, & le côté AH de 20, & qu'on connoîtra l'angle HAD, quand on sçaura la valeur de l'angle flanqué, puisqu'il en est la différence avec deux droits; & comme l'on suppose que c'est ici un exa-

gone, l'angle flanqué sera par conséquent de 83 degrés 8 minutes : ainsi l'angle DAH sera de 96 degrés 52 minutes ; & en faisant la regle ordinaire, l'on trouvera (art. 725) que le côté HD est de 53 toises un pied, & que l'angle ADH est de 21 degrés 59 minutes.

Présentement si l'on retranche de 180 degrés la somme des deux angles CDK & ADH, il restera 140 degrés 12 minutes pour la valeur de l'angle HDK.

743. Or comme l'on connoît dans le triangle HDK deux côtés & l'angle compris, on trouvera par conséquent (art. 725) les deux autres angles, particuliérement l'angle DKI, dont nous avons besoin, qui est de 14 degrés 4 minutes ; & comme il nous faut aussi l'angle FDK, on trouvera qu'il est de 50 degrés 26 minutes, si l'on retranche de l'angle FDC l'angle KDC : mais comme ceci nous donne la valeur de l'angle DIK, qui est de 115 degrés 30 minutes, l'on pourra donc dire pour trouver le côté DI : Si le sinus du supplément de l'angle DIK a donné le côté DK, que donnera le sinus de l'angle DKI pour la valeur du côté DI, que l'on trouvera de 23 toises 4 pieds, qu'on n'aura qu'à retrancher de la ligne DF, qui vaut, comme nous l'avons vu, 70 toises 2 pieds, l'on trouvera que la face IF de la demi-lune est de 46 toises 4 pieds ?

744. Pour trouver la demi-gorge IN de la demi-lune, faites attention que dans le triangle ODF, l'on connoît les deux angles FOD & ODF, & que par conséquent on connoîtra l'angle OFD, qui se trouve de 40 degrés 11 minutes ; & comme cet angle se trouve aussi dans le triangle INF, dont on connoît l'angle NIF, puisqu'il est supplément de l'angle DIK, il s'ensuit qu'ayant deux angles dans le triangle IFN, l'on connoîtra le troisieme INF ; par conséquent l'on pourra dire : Si le sinus de l'angle INF de 75 degrés 19 minutes a donné le côté IF, que donnera le sinus de l'angle IFN pour le côté IN, que l'on trouvera de .... ?

Enfin si pour tracer la demi-lune l'on avoit besoin de la distance du milieu L de la courtine au point F, il feroit facile de la trouver, en disant : Comme le sinus total est à la tangente de l'angle LCF, ainsi le côté CL est au côté LF, que l'on trouvera de 82 . 0 . 9 pouces.

Je ne parle point de la maniere de calculer les lignes, tant droites que courbes, qui forment la contrescarpe, parce que

c'est une chose qui m'a paru fort aisée, & que les Commençans pourront faire d'eux-mêmes. Je ne dis rien non plus de la maniere de calculer une fortification, dont les bastions seroient à orillons, pour leur laisser le plaisir de faire quelque chose par eux-mêmes, ayant mieux aimé leur donner, au lieu de cela, une idée de la façon de tracer une fortification sur le terrein.

Maniere de tracer les Fortifications sur le terrein.

745. Après que l'on a fait le calcul des lignes & des angles qui composent la fortification, on commence, pour la tracer sur le terrein, par planter des piquets à tous les angles qui doivent former le polygone; ensuite l'on s'attache à tracer la fortification de chaque front, jusqu'à ce que tout soit achevé.

Si l'on suppose que les points A & B représentent deux endroits auxquels l'on a planté des piquets, qui déterminent la longueur AB d'un des côtés du polygone, qui sera, par exemple de 180 toises, voici comment il faut s'y prendre pour tracer le front qui correspond à ses côtés.

Ayant marqué sur un plan le projet de la fortification avec la valeur des lignes & des angles, comme on le voit dans la figure 198, l'on commencera par poser le pied du graphometre à l'endroit du piquet A: l'on fera avec la base AB, & les pinnules immobiles, un angle EAB de 18 degrés 26 minutes; & ayant fait porter un piquet sur l'alignement du rayon visuel AE, on déterminera, en toisant fort juste, une longueur comme AC de 50 toises, qui donnera une des faces du premier bastion. Après quoi l'on portera l'instrument à l'extrêmité C, & l'on fera avec la ligne CA un angle ACD de 117 degrés 39 minutes, qui sera l'angle de l'épaule, & l'on prendra dans la longueur CD une quantité de 27 toises 2 pieds, en commençant du point C pour avoir le flanc CD. *Figure 199.*

L'on fera la même opération au piquet B, comme on vient de faire à l'autre; & après avoir tracé, ou seulement planté des piquets aux points F & E, l'on se portera au point E pour voir s'il se trouve de même alignement que les deux C & A, afin de remarquer si la face AC se termine précisément dans l'angle flanquant; & l'on fera la même chose pour être assuré de la justesse de la face BF; ensuite l'on n'aura plus qu'à tracer avec un cordeau la courtine DE, aussi-bien que les faces &

les flancs des bastions : & pour voir si on ne s'est pas trompé en traçant les faces & les flancs, on mesurera la courtine, afin de la vérifier avec le calcul.

Pour faire sentir encore davantage l'utilité de la Trigonométrie dans ce qui concerne les fortifications, nous allons ajouter quelques problêmes, dont la solution dépend des principes précédens, & qui peuvent être d'un grand usage dans l'attaque des places, & dans la conduite des ouvrages, pour connoître par une seule observation la distance où l'on est de certains endroits remarquables que l'on a intérêt d'attaquer.

Problêmes de Trigonométrie applicables à la Fortification.

PROBLEME I.

Figure 173. 746. *Connoissant une ligne* AB, *dont on ne peut approcher, avec les angles* ADC, ADB; *& les angles* BCD, BCA *observés aux points de station* C & D, *connoître tous les angles & les lignes de cette figure.*

SOLUTION.

Puisque l'on connoît l'angle ACD & l'angle ADC, on connoît aussi l'angle en A, en ôtant les deux premiers de 180 degrés ; de même dans le triangle BCD on connoît l'angle CBD, puisque, *par hypothese*, les angles BCD, BDC sont connus. Quoique je ne connoisse point les côtés AC, AD, DC, BC, BD de ces triangles, je sçais cependant que ces côtés sont entr'eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés ; & comme ces angles sont connus, les rapports des côtés le seront aussi. Cela posé, dans le triangle CAD, on aura cette proportion, S.CAD : S.ADC :: DC : AC, & dans le triangle CBD, on aura cette autre, S.BDC : S.CBD :: BC : DC : donc en multipliant terme par terme ces deux proportions, on aura S.CAD × S.BDC : S.ADC × S.CBD :: BC × DC : AC × DC :: BC : AC. D'où il suit que dans le triangle BCA, on a le rapport exact des côtés AC, CB qui comprennent l'angle connu ACB ; ainsi on supposera pour un instant que ces côtés sont effectivement égaux aux produits des sinus des angles CAD, BDC, ADC, CBD ; & pour avoir les angles en A & en B du triangle ABC, on fera cette proportion : La somme des deux côtés AC + BC est à leur différence, comme

la tangente de la moitié de la somme des angles opposés à ces côtés, est à la tangente de la moitié de la différence des mêmes angles (art. 725). Ayant ainsi déterminé les angles en A & en B, on calculera de nouveau le triangle ABC, pour avoir la véritable expression des côtés AC, BC que l'on trouvera en faisant cette proportion : Le sinus de l'angle ACB est au côté comme AB, comme le sinus de l'angle ABC, que l'on vient de trouver, est au côté AC. On calculera par le secours de la même analogie tous les autres côtés de la figure ; ainsi le problême est résolu.

REMARQUE.

747. On a dû remarquer que dans le triangle ACB l'on ne connoissoit d'abord que le côté AB & l'angle opposé C, & rien de plus. L'on pourroit donc être tenté de croire que la connoissance d'un angle & du côté opposé suffit pour connoître toutes les parties d'un triangle, mais il est aisé d'appercevoir la fausseté d'une pareille induction ; il est vrai que l'on ne connoît qu'un angle & le côté opposé, mais les observations des angles en D suppléent à ce qui nous manque, en donnant le rapport des côtés AC & CB, par le moyen desquels on a calculé les angles en A & en B.

748. Si l'on appelle le sinus de l'angle ADC, a; celui de l'angle CAD, b; celui de l'angle CBD, c; & enfin celui de l'angle BDC, d; on aura au lieu de la proportion S.CAD × S.BDC : S.ADC × S.CBD :: BC : AC, celle-ci $bd : ac$ :: BC : AC : donc en divisant les deux premiers termes par c, on auroit $\frac{bd}{c} : a$ :: BC : AC.

Si l'on vouloit se servir des logarithmes pour faire cette opération, voici comment on pourroit s'y prendre. On cherchera d'abord les sinus des angles a, b, c, d, que l'on regardera comme des nombres naturels ; on cherchera ensuite dans la Table des Logarithmes des nombres naturels, les logarithmes de ces sinus considérés comme tels ; on ajoutera ensemble les logarithmes des sinus a, b, d, & de la somme on retranchera le logarithme de c : ce qui viendra sera le logarithme de la fraction $\frac{bd}{c}$; on cherchera ce logarithme dans la Table des Logarithmes pour voir le nombre qui lui répond. Après cela on prendra la somme de ce nombre & du sinus a, & la diffé-

rence des mêmes nombres ; on cherchera encore les logarithmes de ces nouvelles quantités, & dans les Tables des Sinus le logarithme de la tangente de la moitié de la somme des angles opposés aux côtés AC & BC. Ajoutant les logarithmes de cette tangente, & de la différence des nombres a & $\frac{bd}{c}$, on aura, après en avoir retranché le logarithme de la somme des mêmes nombres, celui de la tangente de la moitié de la différence des angles que l'on cherche, & le problême sera résolu.

PROBLEME II.

Figure 200. 749. *La ligne* AC *& ses parties* AB, BC *étant connues avec les angles* AFB, BFC, *observés dans un point* F, *trouver les distances du point* F *aux points* A, B, C.

Ce problême peut être résolu géométriquement, & par le calcul trigonométrique : nous allons donner la solution qui dépend du calcul, & nous donnerons ensuite la solution géométrique.

SOLUTION I.

Figure 200. Imaginons les lignes AF, BF, CF, tirées des extrêmités A, B, C des parties de la ligne AC, au point d'observation F ; imaginons encore, que par chacun des deux triangles ABF, BCF, on ait fait passer un cercle FBC, ABF. Comme les angles en F seront à la circonférence, ils ne seront que la moitié des angles BEC, BDA, appuyés sur les mêmes bases BC, AB, & dont le sommet est au centre E ou D. Cela posé, puisque les angles BFC, AFB sont connus, les angles au centre doubles des angles observés le seront aussi, & dans les triangles isosceles BEC, BDA, on connoîtra les trois angles & un côté ; ainsi on connoîtra les côtés ou les rayons BE, BD, puisque l'on connoît les angles CBE, ABD ; on connoîtra aussi l'angle DBE, qui joint avec ces angles, fait la valeur de deux droits ; de plus on vient de trouver les côtés BE, BD : donc on connoîtra toutes les parties de ce triangle dans lequel on a les côtés BD, BE, & l'angle compris entre ces côtés : ainsi on connoîtra l'angle en E & l'angle en D. Puisque les cercles décrits sur les triangles CBF, ABF se coupent en deux points B, F, le centre F sera également éloigné des points B, F, & le point D de la même ligne DE sera aussi également éloigné des mêmes points B, F ; ainsi la ligne DE sera

sera perpendiculaire à la ligne BF, & partout dans le triangle rectangle BGE, dans lequel on connoît déja l'angle en E, comme on vient de voir, on connoîtra aussi l'angle GBE; ajoutant cet angle à l'angle connu CBE du triangle isoscele BEC, on aura l'angle total CBF; ainsi dans le triangle CBF on connoît deux angles & un côté: donc on peut connoître toutes les autres parties.

Solution geométrique.

750. Puisque les parties de la ligne AC sont connues, ainsi que les angles AFB, BFC, je prends une ligne AB qui contienne autant de parties égales que la ligne AB, que l'on suppose sur le terrein, contient de toises: je prends de même sur la ligne AB prolongée une partie BC qui contienne autant de parties égales, que la ligne BC observée sur le terrein contient de toises. Je double l'angle AFB, j'ôte cet angle de 180 degrés, & je divise le reste en deux parties égales. Au point A & au point B, je fais les angles BAD, ABD égaux chacun à la moitié de cette différence; ce qui me détermine le point D. Je double de même l'angle observé BFC, & ôtant ce double de 180 degrés, je fais en B & en C les angles CBE, BCE égaux chacun à la moitié de la différence du double de l'angle observé; ce qui me donne le point E: je mene la ligne ED; du point B j'abaisse sur cette ligne ED la perpendiculaire BGF, & je prends GF = BG; le point F est le point qui me donne tout ce dont j'ai besoin: ainsi je n'ai qu'à voir combien les lignes BF, CF, AF contiennent de parties égales, & j'aurai les distances du point F aux points donnés A, B, C.

751. On pourroit encore résoudre le problême géométriquement d'une autre maniere: il n'y auroit qu'à décrire sur les lignes AB & BC des segmens capables des angles donnés AFB, BFC, & le point où ces cercles s'entrecouperoient au dehors de la ligne AC, seroit celui qui donneroit les distances demandées.

Remarque.

752. On pourroit encore résoudre le problême par les méthodes que nous venons de proposer dans le cas où les parties AB & BC ne seroient pas en lignes droites, comme dans les figures 202, 203, pourvu que l'on connût l'angle ABC qu'elles

forment entr'elles, ou bien les trois côtés du triangle BAC. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à relire les deux solutions précédentes, en les appliquant sur les figures suivantes, & observant que dans la figure 201, l'angle DBE est égal à la différence de l'angle ABC aux angles ABD, CBE, & que dans la figure 202 on trouve l'angle DBE, en prenant la différence des trois angles ABC, ABD, CBE à quatre droits. Enfin l'on remarquera que si le point F d'observation est placé au dedans du triangle ABC, & que l'un des angles observés soit obtus, on fera de l'autre côté de la ligne AB un triangle isoscele ADB, dont l'angle D soit double du supplément de l'angle AFB; & dans ce cas l'angle DBE est égal à la somme des angles BBA, ABC, moins l'angle EBC, que l'on connoîtra, puisque l'on connoît, *par construction* ou *par hypothese*, les angles qui le déterminent.

COROLLAIRE I.

753. Il suit delà que si l'on connoît la position de trois objets placés au dedans d'une Ville assiégée par le moyen d'un plan, ou bien parce qu'on l'aura déterminée géométriquement; on pourra toujours par une seule opération déterminer la distance de l'endroit où l'on est aux mêmes objets que l'on a intérêt d'attaquer; & par conséquent on sera le maître d'y conduire des galeries de mines, ou d'y jetter des bombes, ou enfin de diriger ses batteries de la maniere qui paroîtra la plus avantageuse. Il faut dans le cas où l'on auroit besoin d'une grande précision se servir des solutions numériques préférablement aux solutions géométriques, parce que le calcul donne toujours les distances avec la derniere exactitude.

COROLLAIRE II.

Pl. XIV. Figure 210. 754. Il suit encore delà que l'on peut, par le moyen des mêmes objets, que nous supposons toujours visibles, lever très-promptement les dehors d'une place par deux observations, sans être obligé de mesurer des bases dans un terrein exposé au feu de l'ennemi. Supposons, par exemple, qu'on veuille avoir la position des bastions F, G, H d'une place que l'on assiége, par deux observations faites aux points D, E. On prendra par Trigonométrie la position des trois objets qui avoisinent la place, tels que A, B, C, ce que l'on pourra faire

ſans aucun danger, en meſurant une baſe dans un terrein qui ſoit à l'abri du canon; enſuite par le moyen de ces trois objets, deux Ingénieurs placés l'un en E, l'autre en D, obſerveront les angles formés par les rayons viſuels, dirigés des points de ſtations aux points A, B, C, & aux angles du flanc des baſtions F, G, H; ſçavoir, celui qui eſt placé en E, les angles CEH, CEG, CEF, & celui qui eſt placé en D les angles BDH, BDG, BDF; de cette maniere on aura tout d'un coup la poſition reſpective des baſtions les uns à l'égard des autres, & leurs diſtances aux points d'obſervations: car il eſt évident que les ſtations D, E ſont déterminées par rapport aux points A, B, C; ce qui ſuffit pour déterminer tout le reſte.

Nota. Le problême propoſé (art. 746) pourroit auſſi ſervir aux mêmes uſages, & l'on peut en faire l'application à bien d'autres opérations qu'il ſeroit inutile de détailler ici. L'occaſion fournit des reſſources & des expédiens lorſque l'on eſt d'abord muni d'une bonne théorie; ainſi chacun pourra s'exercer à mettre en œuvre les propoſitions que nous venons de démontrer.

Theorie et pratique du Nivellement.

Définitions.

I.

755. L'on dit que deux points ſont de *niveau*, lorſqu'ils ſont également éloignés du centre de la terre: Pl. XIV. *Figure* 203.

756. De ſorte qu'une ligne qui a tous ſes points également éloignés du centre de la terre, eſt appellée *ligne du vrai niveau*, qui ne peut être qu'une ligne courbe.

757. L'on peut donc dire que la ſuperficie des lacs, des étangs, & de toutes les eaux qui ne ſont guere agitées, renferment une infinité de points de niveau, puiſqu'ils ſont tous également éloignés du centre de la terre.

II.

758. *Ligne de niveau apparent*, eſt une ligne telle que BD, tangente au cercle de la terre, & par conſéquent perpendiculaire au demi-diametre AB; cette ligne eſt nommée *ligne de niveau apparent*, parce que ſes extrêmités B & D ne ſont pas

également éloignées du centre de la terre : ainsi toute ligne parallele à l'horizon, & qui étant prolongée par une de ses extrêmités, s'écarte de la superficie de la terre, comme une tangente s'écarte de la circonférence d'un cercle, est une ligne de niveau apparent.

Comme le point B est de niveau avec le point C, puisqu'ils sont également éloignés du centre A de la terre, l'on voit qu'il s'en faut toute la ligne CD, que le point B ne soit de niveau avec le point D ; l'on peut donc dire que la ligne CD est *la différence du niveau apparent au dessus du vrai.*

759 Quand une ligne de niveau apparent n'a pas plus de 100 ou 150 toises, il s'en faut si peu que ses extrêmités ne soient également éloignées du centre de la terre, qu'on peut la regarder comme étant parfaitement de niveau ; mais si elle surpasse cette longueur, il faut avoir égard à la différence du niveau apparent au dessus du vrai, comme nous le ferons voir en son lieu.

III.

Quand on veut niveler deux endroits pour sçavoir de combien l'un est plus élevé que l'autre, ces deux endroits sont nommés *termes*, & pour lors l'endroit par où l'on commence le nivellement, est nommé *premier terme*, & celui où se va terminer la ligne de niveau apparent, est nommé le *second terme*.

CHAPITRE PREMIER,

Où l'on donne l'usage du Niveau d'eau.

Figure 204. 760. LA principale piece du niveau d'eau est un tuyau AB de 5 ou 6 pieds de long, recourbé par ses extrêmités C & D ; ce tuyau peut avoir un pouce de diametre : aux extrêmités sont deux bouteilles FC & GD, qui sont le principal du niveau : ces bouteilles, pour être d'un bon usage, doivent être d'un verre fort blanc, bien clair & transparent, faites exprès pour être plus commodes ; car les deux cercles F & G, qui ont environ trois pouces de diametre, sont proprement les culs de ces bouteilles, dans le milieu desquels il y a un trou circulaire d'environ un pouce : ces bouteilles, qui ont 5 pouces de hauteur, ont un petit goulot, dont la grosseur est plus

petite que celle du tuyau, parce qu'elles doivent être mastiquées dedans aux extrémités C & D : dans le milieu du tuyau A B est une virole avec un genou, qui répond à un bâton MN de 4 pieds, de sorte que le niveau étant posé à un endroit, on le peut faire tourner en tous sens, comme sur un pivot sans bouger le pied.

Pour se servir de cet instrument, l'on verse de l'eau dans une des bouteilles, qui va aussi-tôt se communiquer dans l'autre, à cause du tuyau qui est ouvert par les deux bouts ; & quand les bouteilles ont de l'eau environ jusqu'aux deux tiers, l'eau donne deux surfaces H & I, qui sont parfaitement de niveau. Cela posé, si l'on veut sçavoir de combien le terme Q est plus élevé que le terme P, celui qui fait l'opération envoie un aide au second terme Q, où il pose une toise, ou une double toise, le plus perpendiculairement qu'il est possible, qu'il doit tenir de la main gauche, parce que dans la droite il doit avoir un carton blanc de la grandeur d'un cul de chapeau, & dans le milieu duquel on fait un petit rond noir d'un pouce de diametre ; & supposant que cet aide soit bien instruit des mouvemens qu'il doit faire, soit pour aller sur la droite ou sur la gauche, ou pour faire monter ou descendre le carton le long de la toise, aux différens signes qu'on lui fera, celui qui fait l'opération vise horizontalement aux surfaces de l'eau, l'endroit de la toise qui se rencontre dans le rayon de mire K L ; & ayant fait signe à l'aide de faire glisser le carton le long de la toise, pour que le bord supérieur du rond noir se rencontre au point L, on lui fera ensuite un autre signe, pour lui faire entendre qu'il s'est rencontré juste, & pour lors un autre aide, qui est avec celui-ci, mesure exactement la hauteur Q L, que je suppose de 2 pieds 9 pouces, & pendant ce tems-là un autre aide, qui ne quitte point celui qui fait l'opération, mesure la hauteur K P, qui sera, par exemple, de 4 pieds 6 pouces : après avoir mis en écrit de part & d'autre les hauteurs que l'on aura trouvées, & les deux aides que l'on a détachés, étant venus joindre celui qui fait l'opération, l'on cherche quelle est la différence de la ligne K P à la ligne L Q, en les soustrayant l'une de l'autre, & l'on trouve un pied 9 pouces, qui est la hauteur du second terme au dessus du premier : ainsi l'on voit que tout l'objet du nivellement est de connoître de combien un lieu est plus élevé qu'un autre.

761. Comme les coups de niveau, qui se donnent avec cet instrument, ne vont guere au-delà de 100 à 120 toises, l'on n'a point égard au niveau apparent dans les petites opérations comme celle-ci, parce que le niveau apparent peut être pris pour le vrai.

Figure 205. A cause de la petite portée des coups de niveau, on est obligé d'en donner plusieurs de distance en distance, quand les objets que l'on veut niveler sont beaucoup plus éloignés l'un de l'autre que l'on ne l'a supposé ici : cependant quand cette distance est environ double de la portée du coup de niveau, on peut par une seule station trouver la différence des hauteurs du niveau de ces deux endroits, pourvu que l'on puisse les appercevoir tous les deux, quand on se sera placé à peu près dans le milieu de leur distance.

Figure 205. Par exemple, supposant que la distance de A en B soit de 220 toises, & qu'on veuille sçavoir de combien le terme A est plus bas que le terme B, il faut poser le niveau en C, qui sera à peu près le milieu de la distance A B, ensuite viser de D en E, le rond noir du carton que l'aide aura posé au point G, que je suppose élevé de 2 pieds 4 pouces. Cela posé, celui qui fait l'opération, quitte la bouteille D, & vient à la bouteille E, pour viser de E en F, parce qu'il doit y avoir à l'endroit A un autre aide pour tenir la toise & le carton : & comme il peut arriver que la ligne A F soit élevé au dessus de l'endroit A de plus de 6 pieds, en ce cas on a une autre toise, au bout de laquelle est un carton, comme celui dont nous avons déja parlé, & l'aide fait glisser cette toise le long de l'autre, la faisant monter & descendre tant que le rond noir du carton se rencontre dans le rayon de mire E F ; après quoi un autre aide mesure exactement la hauteur F A. Or supposant qu'ayant mesuré avec autant de précision qu'il est possible, l'on ait trouvé 9 pieds 6 pouces pour la hauteur A F, on soustraira de cette quantité 2 pieds 4 pouces, qui est l'élevation du point G, & la différence sera 7 pieds 2 pouces, qui fait voir que l'endroit A est plus bas que B de 7 pieds 2 pouces.

Cette maniere de niveler est la meilleure de toutes, parce qu'elle est moins sujette à erreur, soit de la part du niveau apparent, ou des réfractions ; car tant que le point C sera dans le milieu de deux termes, les points F & G seront parfaitement de niveau, puisqu'ils sont également éloignés du centre

de la terre : d'ailleurs par cette pratique, on fait beaucoup moins de ſtations que ſi l'on alloit par pluſieurs coups de niveau d'un terme à l'autre.

CHAPITRE II,

Où l'on donne la maniere de faire le Nivellement composé.

762. QUand les deux termes que l'on veut niveler sont beaucoup plus éloignés l'un de l'autre qu'on l'a ſuppoſé dans l'opération précédente, on eſt obligé de faire pluſieurs ſtations ; & en ce cas l'on dit que le nivellement eſt composé : car en effet il eſt composé de pluſieurs coups de niveau, que l'on fait enſorte d'abréger, comme on le va voir dans l'opération suivante. *Figure 206.*

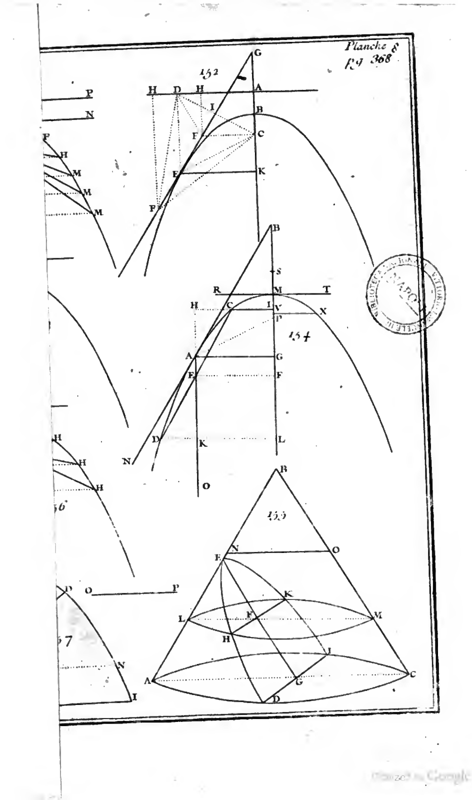
Pour niveler deux objets A & B, éloignés l'un de l'autre de 680 toiſes, il faut diviſer ce nombre par 200 ou 220 toiſes, pour voir combien l'on ſera obligé de faire de ſtations: car dans l'opération précédente on a nivelé par une ſeule ſtation une diſtance de 220 toiſes : ainſi comme 680, diviſé par 220, donne 3 au quotient, je vois qu'en trois ſtations on peut niveler les deux termes A & B. Pour cela, je commence par chercher dans la diſtance AB les trois endroits qui ſont les plus commodes pour faire les ſtations : je choiſis d'abord le point C à peu près dans le milieu de AB, où je fais planter un piquet, & à une diſtance de 100 ou 110 toiſes du point A j'en fais planter un autre en D, & à la même diſtance du point B j'en fais placer un troiſieme E, & autant qu'il ſe peut, il faut que ces trois piquets ſoient d'alignement avec les deux termes A & B. Ayant donc déterminé les trois ſtations D, C, E, il faut envoyer deux aides au premier terme A, dont le premier porte une ou deux toiſes, & le ſecond ſoit chargé d'écrire les hauteurs ; on en envoie un troiſieme à peu près dans le milieu de la diſtance DC, lequel ne doit point bouger de ſa place, qu'on n'ait achevé les opérations de la premiere & de la ſeconde ſtation, parce que la toiſe qu'il tiendra en main doit ſervir de terme commun pour les deux premieres ſtations.

Ayant donc fait porter le niveau au point D, il faut viſer de T en S, pour que le rayon de mire TM aille rencontrer

le bord supérieur du rond noir, qui sera au point M, & le second Aide mesure la hauteur MA, que je suppose de 8 pieds 2 pouces, qu'il a soin d'écrire sur des tablettes: ensuite on vise de S en T, pour découvrir le rond noir au point K; & comme il n'est pas nécessaire de connoître la hauteur KF, qui seroit plus embarrassante qu'utile, l'Aide qui tient la toise se contente de marquer un trait de crayon à l'endroit de la toise où le rayon de mire SK s'est terminé: delà on vient à la seconde station C, & on envoie à peu près dans le milieu de la distance CE un Aide à l'endroit G, qui ne doit pas bouger de sa place, que les opérations de la seconde & de la troisieme station ne soient finies. Présentement il faut donner un coup de niveau de Q en R, pour découvrir le point L du rond noir; & quand on l'aura rencontré, on mesurera la hauteur KL, qui est la distance du trait de crayon que l'on a marqué sur la toise au point L, & celui qui tenoit les tablettes à l'endroit A, a eu soin de se rendre à la seconde station, pour y écrire la hauteur KL, qui sera, par exemple, de 3 pieds 6 pouces: après cela il faut viser de R en Q, pour que celui qui est en G puisse marquer sur la toise le point H par un trait de crayon, sans s'embarrasser de son élévation, qu'il est inutile de connoître, comme nous l'avons déja dit. Enfin, l'on fait porter le niveau à la troisieme station E, pour donner un coup de niveau de P en O, qui déterminera ensuite le point I; on mesurera la ligne HI, que je suppose de 4 pieds 3 pouces, qu'on aura soin d'écrire sur les tablettes; après quoi on donnera le dernier coup de niveau ON, & l'Aide qui est en B, mesurera la hauteur BN, que je suppose d'un pied 6 pouces, qu'il faudra écrire à part, parce que cette hauteur n'a rien de commun avec ce que l'on a marqué sur les tablettes.

Le nivellement étant achevé, l'on ajoutera ensemble les hauteurs que l'on a écrites sur les tablettes, c'est-à-dire 8 pieds 2 pouces, 3 pieds 6 pouces, & 4 pieds 3 pouces, qui font 15 pieds 11 pouces, d'où il faudra soustraire la hauteur BN d'un pied 6 pouces, & la différence sera 14 pieds 5 pouces, qui est l'élévation de l'endroit B au dessus de l'endroit A.

CHAPITRE III.


152
G
H
D
H
A
I
B
F
C
E
K
F
P
N
P
H
M
M
M
B
S
R
M
T
H
C
I
V
X
P
154
A
G
E
F
D
K
L
N
O
H
H
H
56
B
153
E
N
O
K
L
F
M
H
I
A
G
C
D
D
O
P
57
N
I

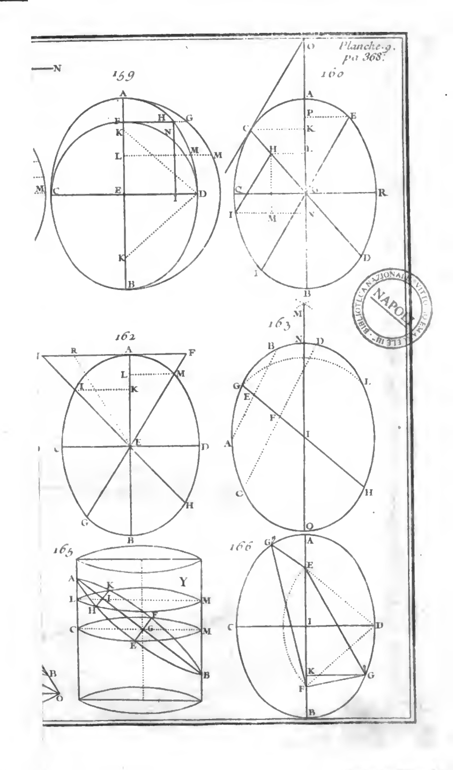
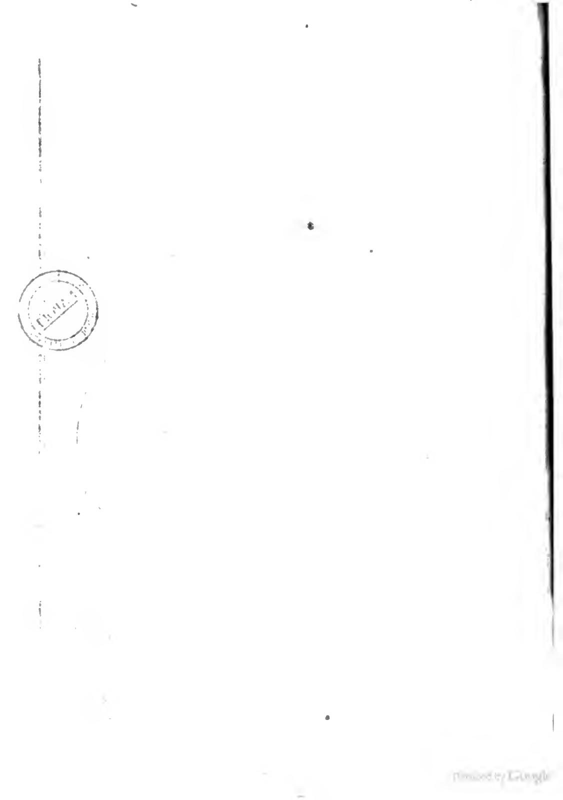
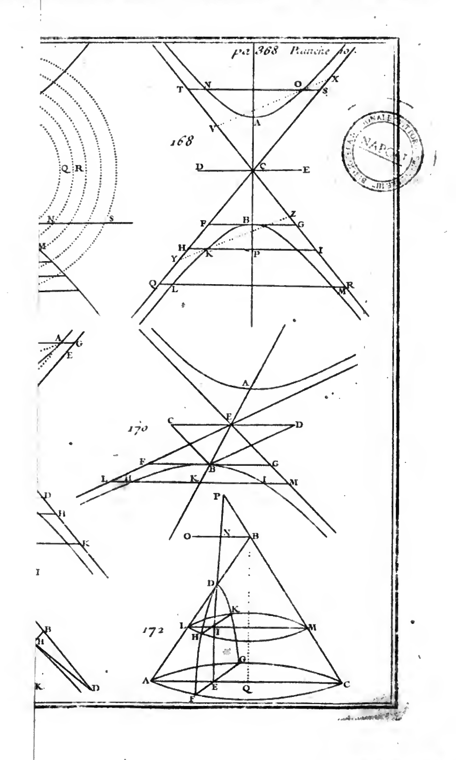
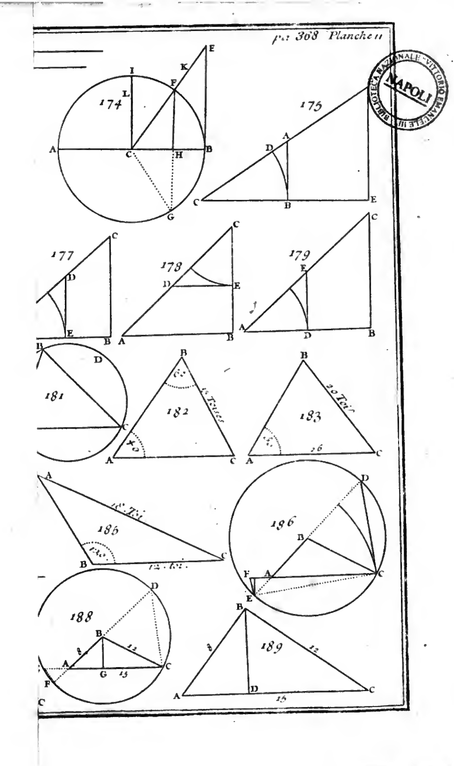
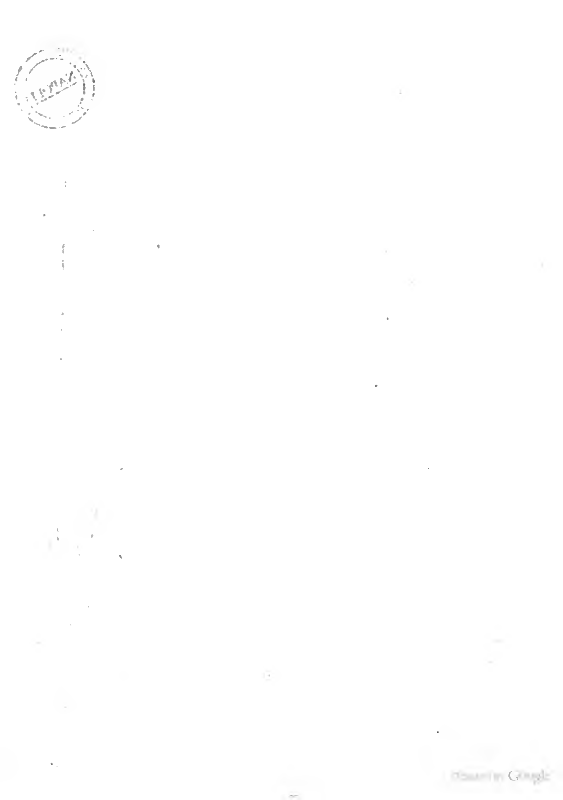


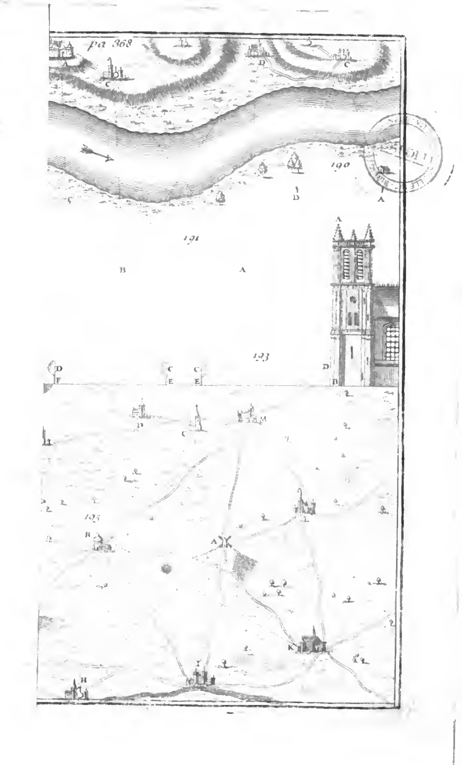
Planche 9.
pa 368.
159
160
162
163
165
166



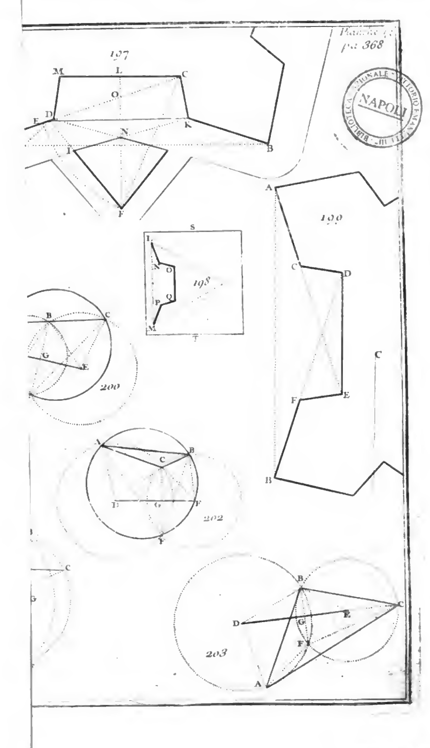

pa 368 Planche 10.
168
170
172


174
I
L
K
E
F
A
C
H
B
G
175
A
D
C
B
E
177
C
D
E
B
178
C
D
E
A
B
179
C
E
A
D
B
B
D
181
C
B
182
A
C
B
183
A
16
C
A
185
B
C
B
186
D
F
A
C
E
188
D
B
A
G
C
F
C
8
12
15
B
189
8
12
A
D
15
C




pa 368
A
C
D
C
190
D
A
191
B
A
A
123
D
C
C
D
F
E
E
B
D
C
M
H
195
B
A
L
K
H




197
M
L
C
O
D
E
K
N
I
B
F
198
S
T
199
A
C
D
E
F
B
C
200
B
C
G
E
202
A
B
C
D
G
F
F
203
B
C
D
E
G
F
A

CHAPITRE III,

Où l'on donne la maniere de niveler deux termes, entre lesquels il se trouve des hauteurs & des fonds.

763. QUand on veut niveler deux objets fort éloignés l'un de l'autre, il est assez rare qu'on ne rencontre en chemin des hauteurs & des fonds, qui obligent de niveler tantôt en montant, tantôt en descendant: en ce cas, il faut observer certaines choses dont nous n'avons pas encore parlé, qui sont, d'écrire sur les tablettes dans une colonne toutes les hauteurs que l'on trouvera en montant, & dans une autre colonne toutes celles que l'on trouvera en descendant; & pour les distinguer à l'avenir, nous nommerons premiere colonne celle dans laquelle il faudra écrire les hauteurs que l'on trouvera en montant, & seconde colonne celle dans laquelle on écrira toutes les hauteurs que l'on trouvera en descendant. L'on va voir ceci dans l'opération suivante. *Figure* 207.

Pour niveler deux lieux A & B, il faut commencer par poser le niveau au point D, éloigné d'environ 100 toises des endroits A & 3, où l'on aura envoyé des Aides avec des toises; ensuite il faut donner les coups de niveau DC & DE, & écrire la hauteur AC de 9 pieds 4 pouces dans la premiere colonne, & marquer un trait de crayon à l'endroit E: delà il faut faire porter le niveau au point 4, qui n'est pas dans le milieu de la ligne FH, à cause que la rampe de trois en 5 ne le permet point, mais cela n'empêche pas que les coups de niveau GF & GH ne soient justes, parce qu'ils ne sont pas d'une grande portée. Ayant donc déterminé les points F & H, il faut mesurer la hauteur FE, qui sera, par exemple, de 9 pieds 6 pouces, qu'il faut écrire dans la premiere colonne, & ne pas oublier de marquer un trait de crayon au point H de la toise 5: delà il faut venir à la station 6, & donner les coups de niveau KI & KL; l'on marquera, comme à l'ordinaire, un trait de crayon au point L, & l'on écrira dans la premiere colonne la hauteur IH, que je suppose de 7 pieds: delà on viendra à la station 8, de laquelle je suppose qu'on ne peut donner que le coup de niveau NM, à cause que la rampe est trop grande pour pouvoir

en donner un second de l'autre côté, l'on mesurera la hauteur LM depuis le point L, que l'on a marqué sur la toise jusqu'au point M du rayon de mire, qui se trouve de 8 pieds 2 pouces; l'on aura soin de l'écrire dans la seconde colonne, parce que c'est une hauteur que l'on a trouvée en descendant: mais comme la hauteur NO du niveau fait voir de combien le point O est plus bas que le point M, il faudra mesurer cette hauteur, que je suppose de 4 pieds & demi, pour l'écrire aussi dans la seconde colonne; ensuite il faudra faire planter un piquet à l'endroit O, & descendre le niveau au point 9, qu'il faudra trouver; de sorte que le rayon de mire PO aille rencontrer le pied du piquet: après quoi l'on donnera le coup de niveau PQ, & l'Aide qui tient la toise aura soin de marquer un trait de crayon au point Q. Delà on ira à la station 11, pour y donner les coups de niveau SR & ST, afin d'avoir la hauteur RQ, qui sera, par exemple, de 3 pieds, qu'il faudra écrire dans la premiere colonne, parce que c'est une hauteur que l'on a trouvée en montant; il faut aller après cela au point 13, pour y donner les coups de niveau XV, XY, & l'on écrira dans la premiere colonne la hauteur VT, qu'on suppose de 5 pieds 5 pouces: & comme il arrive que le rayon XY va se terminer à un point Y de la hauteur, il n'y aura pas de trait de crayon à marquer sur la toise à cet endroit-là, on y laissera seulement un Aide pour servir à l'opération 15, laquelle ayant déterminé les points Z & B, des coups de niveau AZ & AB, l'on mesurera la hauteur ZY, que je suppose de 7 pieds 4 pouces, qu'il faudra encore écrire dans la premiere colonne: delà il faut venir à la station 17, pour y donner les coups de niveau DC & DE, marquer un trait de crayon au point E, & considérer que la hauteur BC, qu'on suppose de 6 pieds 6 pouces; a été trouvée en descendant, & que par conséquent il faut l'écrire dans la seconde colonne. Enfin l'on portera le niveau à la derniere station B, pour déterminer par le rayon GF la hauteur EF, qui sera, par exemple, de 8 pieds 5 pouces, qu'il faudra écrire dans la seconde colonne, aussi-bien que la hauteur GB du niveau, qui est ordinairement de 4 pieds 6 pouces.

Présentement si l'on additionne les nombres de la premiere colonne, l'on trouvera 41 pieds 7 pouces; & faisant la même chose pour la seconde, l'on aura 32 pieds un pouce. Or si l'on retranche la plus petite somme de la plus grande, c'est-à-dire

32 pieds un pouce, de 41 pieds 7 pouces, la différence sera 9 pieds 6 pouces, qui fait voir que le terme A est plus bas que le terme B de 9 pieds 9 pouces.

Il est bon de remarquer que lorsque l'on a un nivellement à faire en montant, & qu'on s'apperçoit que les coups de niveau sont trop courts, de sorte qu'on est obligé d'en donner trop souvent, il vaut mieux monter au sommet de la hauteur, & faire le nivellement en descendant, observant d'écrire dans la premiere colonne les hauteurs que l'on trouvera en allant vers un terme, & dans la seconde colonne, celles que l'on trouvera en allant vers l'autre.

Par exemple, si l'on veut connoître la différence des hauteurs de deux termes A & B, & qu'on s'apperçoive qu'il faudra trop de tems & trop d'opérations pour niveler de A en B par une suite de coups de niveau, on fera porter le niveau à l'endroit 6, que je suppose être le sommet de la hauteur, & l'on nivellera de 6 en A, en observant d'écrire dans la premiere colonne les hauteurs que l'on trouvera ; après cela l'on viendra à l'endroit 6 pour niveler de 6 en 10, & les hauteurs que l'on trouvera, on les écrira dans la seconde colonne. Enfin on viendra au sommet 15 de la seconde éminence, pour niveler de 15 en 10, mettant toutes les hauteurs que l'on trouvera dans la premiere colonne ; après quoi l'on nivellera de 15 en B, & on écrira les hauteurs de cette derniere opération dans la seconde colonne, & le reste sera comme dans l'opération précédente.

L'on peut faire beaucoup d'ouvrage en peu de tems par cette maniere de niveler, parce que tandis qu'une personne entendue fait le nivellement de 6 en A, une autre peut faire celui de 6 en 10 ; & de la même façon celui de 15 en 10, & de 15 en B.

PREMIERE COLONNE.			SECONDE COLONNE.		
Pieds.	*Pouces.*	*Lignes.*	*Pieds.*	*Pouces.*	*Lignes.*
9″—	4″—	0″	8″—	2″—	0″
9″—	6″—	0″	4″—	6″—	0″
7″—	0″—	0″	6″—	6″—	0″
3″—	0″—	0″	8″—	5″—	0″
5″—	5″—	0″	4″—	6″—	0″
7″—	4″—	0″			
41 *pieds*″	7 *pou*″	0 *lig.*″	32 *pieds*″	1 *pouce*″	0 *lig.*″

pieds.	*pouces.*
41″—	7″—0″
32″—	1″—0″
Différence	*9 pieds 6 pouces.*

CHAPITRE IV,

Où l'on fait voir la maniere de connoître de combien le Niveau apparent est élevé au dessus du vrai, pour une ligne de telle longueur que l'on voudra.

764. L'On n'a pas eu égard à la différence du niveau apparent au dessus du vrai dans les nivellemens que nous venons d'enseigner, parce que les coups de niveau étoient fort petits; d'ailleurs les opérations ont été faites d'une maniere à ne pas donner lieu à cette différence : mais comme le niveau d'eau ne peut servir que pour des petits nivellemens, & qu'il demande une grande exactitude, pour ne point faire d'erreur, quand le nivellement est fort composé, on a inventé une autre espece de niveau, avec lequel, par le moyen d'une lunette, l'on peut donner des coups de niveau extrêmement grands; c'est l'usage de ce niveau que nous allons enseigner, après avoir donné dans ce chapitre la maniere de calculer la hauteur du niveau apparent au dessus du vrai, dont la connoissance est absolument nécessaire, quand on fait de grands nivellemens.

765. Nous avons vu dans la Géométrie que le quarré de

la tangente BD étoit égal au rectangle compris sous la sécante GD, & sous la partie CD : ainsi divisant le quarré de la ligne BD par la valeur de la ligne GD, on trouvera la ligne CD. Mais comme la ligne GC, qui est le diametre de la terre, a été trouvée de 6538594 toises, elle ne differe de la ligne GD que d'une quantité infiniment petite, il s'ensuit que l'on pourra prendre la ligne GC pour la ligne GD, & que divisant le quarré de la ligne BD par le diametre GC de la terre, c'est-à-dire par 6538594, l'on aura la valeur de la ligne CD, qui est la différence du niveau apparent avec le vrai. Or supposant que la ligne de niveau apparent BD soit de 800 toises, il faudra les réduire en lignes, & l'on aura 691200 lignes, qu'il faut ensuite quarrer pour avoir 477754440000, qui est le quarré de la ligne BD. Présentement si l'on réduit le diametre de la terre, qui est de 6538594 toises en lignes, on aura 5649345216 lignes; & divisant le quarré de la ligne BD par le nombre précédent, l'on aura environ 85 lignes, qui font 7 pouces une ligne, pour la différence CD du niveau apparent au dessus du vrai. *Figure 203.*

766. L'on peut encore d'une maniere plus géométrique que la précédente, trouver la valeur CD du niveau apparent au dessus du vrai : car à cause du triangle rectangle ABD, les quarrés AB & BD, pris ensemble, valent le quarré de l'hypoténuse AD. Ainsi il n'y a qu'à quarrer la valeur du demi-diametre de la terre, & la valeur de BD de la ligne de niveau apparent, & additionner ces deux quarrés, dont la racine sera la ligne AD, de laquelle il faudra retrancher la valeur du demi-diametre AB ou AC de la terre, & la différence sera la valeur de la ligne CD.

767. L'on peut remarquer que les hauteurs de deux points de niveau apparent au dessus du vrai, sont dans la même raison que les quarrés des lignes des niveaux apparens ; car prenant le diametre GC pour la ligne GD, & le diametre HK pour la ligne HI, le quarré de la ligne BI étant aussi égal au rectangle compris sous HK & KI, les quarrés des lignes BD & BI seront dans la même raison que les rectangles qui leur sont égaux : mais ces rectangles ayant chacun pour base le diametre GC ou HK de la terre, seront comme leurs hauteurs CD & KI : ainsi les quarrés BD & BI seront donc dans la raison des lignes CD & KI.

768. L'on peut tirer de cette conséquence une regle générale pour trouver la hauteur du niveau apparent au dessus du vrai, d'une façon bien plus courte, que par les deux méthodes précédentes : car si on connoît une fois la hauteur du niveau apparent au dessus du vrai pour une ligne d'une certaine longueur, l'on pourra trouver la même chose pour toutes les autres.

Par exemple, étant prévenu que pour une distance de 600 toises, le niveau apparent est élevé au dessus du vrai de 4 pouces, pour sçavoir combien il est élevé pour une distance de 1000 toises, je fais une Regle de Trois, en disant : Si le quarré de 600, qui est 360000, donne 4 pouces, combien donnera le quarré de 1000, qui est 1000000 ? La Regle étant faite, on trouvera 11 pouces une ligne 4 points pour la hauteur du niveau apparent au dessus du vrai, d'un coup de niveau de 1000 toises.

CHAPITRE V,

Où l'on fait la description du Niveau de M. Huyghens.

769. Nous n'avons parlé jusqu'à présent que du niveau d'eau, parce que c'est celui qui est le plus en usage dans les nivellemens qui ne sont pas d'une grande étendue. Cependant comme les niveaux qui ont des lunettes sont bien plus commodes, parce que l'on peut en deux ou trois coups de niveau, ou quelquefois même en un seul, niveler deux objets, dont on ne pourroit connoître la différence des hauteurs avec le niveau d'eau, sans faire beaucoup plus d'opérations, voici celui qui a été inventé par M. Huyghens, qui peut passer pour le plus commode & le plus juste de tous ceux qui ont été faits dans ce goût-là.

Une des principales parties de cet instrument est la virole D, qui a deux branches plates, C & E qui sont semblables, chacune d'environ un demi-pied de long ; de sorte que le tout fait une espece de croix. Cette virole D porte la lunette AB longue de deux pieds : si elle n'a que deux verres convexes, elle représentera les objets renversés, mais avec beaucoup plus de clarté que si elle en a quatre, qui les remettroient dans leur

situation naturelle. Le tuyau de cette lunette doit être de cuivre, ou de quelqu'autre matiere forte, & à l'épreuve des injures de l'air.

Au bout des branches de la virole D sont attachés deux filets doubles passés dans des petits anneaux, & serrés entre des pinces à deux dents, dont l'une est fixée au bout de sa branche, & l'autre y est attachée de telle maniere qu'elle se puisse ouvrir.

Comme la lunette est suspendue par la virole D au crochet F, elle est tendue horizontalement par le poids qui est enfermé dans la boîte G, dont il ne sort que son crochet. La pesanteur de ce poids ne doit être qu'environ la pesanteur de la croix, & le vuide qui reste dans cette boîte est rempli d'huile de noix ou de lin, ou de quelqu'autre liqueur qui ne se glace ni ne se fige point; & c'est par cette liqueur que sont arrêtés les balancemens du poids & de la lunette. Il doit y avoir au dedans de la lunette un fil de soie tendu horizontalement au foyer du verre objectif; & c'est par une vis que l'on tourne au travers du trou H, percé dans le tuyau de la lunette, que l'on abaisse ou éleve ce fil selon le besoin. Il faut mettre au tuyau de la lunette une petite virole, qui doit être fort legere, & ne pas peser plus d'une 80e partie de la croix: elle n'est point attachée au tuyau de la lunette, parce qu'il faut la pousser vers le bout, ou l'en reculer autant qu'il est nécessaire pour trouver l'équilibre de la lunette, & la mettre parallele à l'horizon.

Cette machine est suspendue au haut d'une espece de croix de bois plate, où il y a pour cela le crochet F, qui peut se hausser ou baisser par le moyen de la vis qui tient à l'anneau qui suspend la machine: cette même croix tient la boîte qui contient le plomb & l'huile; & cette boîte est enfermée par les côtés & par le fond.

On couvre le niveau par une autre espece de croix, qui est creuse, que l'on applique contre la croix de bois plate, avec plusieurs crochets, afin de couvrir le niveau contre les injures du tems; de sorte que le tout fait une boîte.

Pour rectifier ce niveau, on le suspendra par l'anneau d'une de ses branches, sans attacher de poids par en bas, & l'on visera par la lunette à quelque objet éloigné, remarquant l'endroit où le point de l'objet est coupé par le fil de la lunette,

& ensuite on mettra le poids, en l'accrochant dans l'anneau d'en bas: & si alors le fil de la lunette répond à la même marque de l'objet, c'est une preuve certaine que le centre de gravité, ou les deux points de la suspension de la croix répondent au centre du tuyau de la lunette, ou au centre de la terre; mais si cela ne se trouve pas précisément au même point, on la vérifiera par le moyen de la virole I, en la faisant couler de part ou d'autre, pour réparer le défaut, & mettre la lunette en équilibre; & la lunette étant mise horizontalement par la virole sans poids & avec poids, on la tournera sans dessus dessous, mettant en haut la branche d'en bas, & attachant le poids à la branche que l'on a abaissée.

Si après cette rectification, le fil qui est dans la lunette se trouve à la même hauteur de l'objet que devant; c'est une marque que le fil du foyer de la lunette est directement au milieu de ce foyer: mais si le fil ne vise pas au même point, & qu'il coupe l'objet au dessus ou au dessous, on haussera ou baissera moyennant la vis qui est pour cela, jusqu'à ce que le fil coupe le point moyen, qui est entre les deux points remarqués, & après cela le niveau sera bien rectifié.

Le pied qui doit porter la machine est une espece de table de fer ou de cuivre, qui est ronde & un peu concave, afin que la machine soit plus solidement établie dans la concavité: elle est élevée sur trois pieds, qui y sont attachés en charniere, & dont la hauteur est de trois ou quatre pieds.

La figure N représente en grand le tuyau qui porte en dedans de la lunette le fil horizontal, qui est attaché à la fourchette K avec de la cire.

Il faut si peu de chose pour faire de grandes erreurs en nivelant, que l'on ne sçauroit prendre trop de précautions à se bien servir des instrumens: pour cela, il faut les connoître parfaitement; quand je dis les connoître, j'entends que l'on doit si bien les examiner, que l'on puisse en sçavoir jusqu'au moindre défaut, entre lesquels il n'y en a point de plus considérable que de baisser ou hausser la mire. Il est vrai que pour le niveau de M. Huyghens, quand même il n'auroit pas été fait avec assez de précaution pour avoir cet inconvénient, il ne faut pas beaucoup s'en embarrasser; car s'il baisse la mire dans un sens, il la haussera d'autant dans un autre; & prenant le point milieu des deux objets, l'on aura toujours le vrai niveau

niveau apparent, qui est un avantage particulier de ce niveau, de pouvoir être renversé de bas en haut, & de haut en bas; mais comme on peut se servir de tout autre instrument qui n'aura pas cet avantage, voici le moyen de corriger un rayon de mire faux.

Ayant posé un instrument à l'endroit A, pour pointer vers DG, je suppose que l'on a reconnu que la lunette, au lieu de donner le point C du niveau apparent BC, donne le point D, qui est plus élevé que le point C, parce que l'instrument hausse la mire; & ayant remarqué que sur une distance BC de 200 toises, le point D est élevé de deux pouces au dessus du point C. Après en être bien assuré, si je vois que cette faute ne se puisse pas réparer, parce que l'on suppose que l'instrument a été mal fait, j'ai égard, dans toutes les opérations que je fais, à la correction de l'instrument; de sorte qu'ayant donné un autre coup de niveau BE de 600 toises, je cherche à quel point de la hauteur EH doit être le niveau apparent, parce que je suis prévenu que ce n'est pas le point E, mais que ce doit être un autre point au dessus de celui-ci. Pour le trouver, je dis: Si 200 toises donnent 2 pouces pour le haussement du rayon de mire, combien donneront 600 toises? La Regle étant faite, je trouve 6 pouces; ainsi je prends le point F, six pouces au dessous du point E, & pour lors la ligne BF est celle du niveau apparent: mais si l'instrument baisse la mire, au lieu de la hausser, on trouvera toujours le point du vrai niveau apparent en suivant la même regle, qui est fondée sur ce que les triangles BCD & BFE sont semblables. *Figure 209.*

CHAPITRE VI,

Où l'on donne la maniere de se servir du Niveau de M. Huyghens.

770. LE niveau ayant été posé au lieu destiné pour l'opération, on envoyera, comme à l'ordinaire, un Aide à une distance convenable, & on regardera exactement par la lunette l'endroit de la perche où le fil répondra; & l'Aide qui tient la carte l'ayant haussée & baissée tant que le petit rond noir réponde au rayon de mite, il a soin de marquer un trait de crayon

ſur la perche à l'endroit où le rayon de mire a répondu, & il ne bouge point de ſa place juſqu'à ce qu'il ſoit averti; & alors celui qui eſt à l'inſtrument, le change de diſpoſition, mettant le deſſus au deſſous, c'eſt-à-dire qu'il faut accrocher la croix par l'anneau d'en bas; après quoi on viſe de rechef avec la lunette, & celui qui eſt à la perche hauſſe & baiſſe encore le carton, pour marquer à quelle hauteur porte le rayon de mire, qui doit répondre au même endroit que l'on a marqué. Or ſuppoſant qu'il donne au deſſous de la marque, il faut marquer exactement à quel endroit; enſuite diviſer en deux également l'intervalle des deux coups de niveau différens, & l'on aura au juſte la hauteur du niveau apparent, de laquelle il faudra retrancher la hauteur du niveau apparent au deſſus du vrai, que l'on trouvera, ſelon qu'il a été enſeigné au quatrieme chapitre, & la différence ſera la hauteur du vrai niveau, laquelle on pourroit encore trouver ſans faire de calcul, comme on le va voir.

Figure 210. Ayant deux perches CA & BE, éloignées l'une de l'autre, je ſuppoſe d'une diſtance de 600 toiſes, l'on demande quelle ſeroit la hauteur du niveau apparent au deſſus du vrai.

Pour la trouver, poſez le niveau à l'endroit A, & pointez avec la lunette l'endroit de la perche BE, où le rayon de mire ira la rencontrer, ſuppoſant que ce ſoit au point B, il faut y faire une marque, & vérifier ce coup de niveau, en renverſant l'inſtrument, pour voir ſi dans cette ſituation le rayon de mire ſe termine au point B. Cela poſé, faites porter l'inſtrument à l'endroit E, & diſpoſez-le de maniere que le foyer du verre de la lunette ſoit préciſément à la hauteur B. Après cela donnez un autre coup de niveau BC, qui aille rencontrer la perche AC au point C, qu'il faudra marquer ſur la perche, après l'avoir vérifié comme ci-devant; & ſi l'on meſure exactement la diſtance CA, je dis qu'elle ſera double de la hauteur du niveau apparent au deſſus du vrai; de ſorte que CA doit ſe trouver ici de 8 pouces: car en diviſant CA en deux également au point D, l'on aura la ligne CD de 4 pouces, qui ſera la différence du niveau apparent au deſſus du vrai, pour une diſtance de 600 toiſes, comme on le peut voir par le calcul: ainſi les points B & D ſont de niveau, étant également éloignés du centre de la terre, comme vous l'allez voir.

Si l'on prend le point A pour l'extrêmité d'un des rayons de la terre, le point B sera plus éloigné du centre de la terre que le point A de 4 pouces: mais le point C étant plus éloigné du centre de la terre que le point B aussi de 4 pouces, le point C sera donc plus éloigné que le point A du centre de la terre de 8 pouces: donc les points D & B étant chacun plus éloignés du centre de la terre que le point A de 4 pouces, il s'ensuit qu'ils seront de niveau, & que la moitié de la ligne CA sera la hauteur du niveau apparent au dessus du vrai.

L'on voit que par le nivellement réciproque l'on peut d'une maniere fort simple déterminer deux points parfaitement de niveau, sans s'embarrasser de leur distance. Il est vrai que l'on peut encore trouver deux points de niveau, sans même faire de nivellement réciproque, en posant l'instrument dans le milieu de la distance de deux objets que l'on a à niveler; ce qui se fait à peu près de la maniere qu'on a expliqué dans l'usage du niveau d'eau.

CHAPITRE VII,

Où l'on donne la maniere de faire le Nivellement composé, avec le niveau de M. Huyghens.

771. NOus avons dit que pour faire un nivellement composé, il falloit ajouter toutes les hauteurs que l'on trouveroit en montant, & que l'on auroit mises dans la premiere colonne, & ajouter aussi ensemble toutes celles que l'on aura trouvées en descendant, qui sont dans la seconde colonne, afin de soustraire la somme des unes de la somme des autres, pour avoir la différence, qui fait voir de combien l'un des endroits est plus élevé que l'autre : mais comme dans cette pratique nous nous sommes servis du niveau d'eau, dont les coups de niveau ne sont pas considérables, & que d'ailleurs l'instrument pour chaque station a été placé dans le milieu des deux termes, on n'a pas eu égard à la différence du niveau apparent au dessus du vrai, ni en descendant, ni en montant, parce que, selon cette pratique, la différence du niveau apparent n'a pas lieu : mais il n'en est pas de même, lorsqu'on *Figure 112.*

se sert d'un instrument à pouvoir donner des grands coups de niveau, ou il faut avoir égard à la différence du niveau apparent au dessus du vrai, en montant comme en descendant, surtout quand l'instrument est placé au premier terme, pour niveler d'un terme à l'autre : car dans cette occasion, il faut non seulement mettre dans la premiere colonne les hauteurs que l'on a trouvées en montant, & dans la seconde celles que l'on a trouvées en descendant; mais encore écrire à côté de chaque colonne la différence du niveau apparent au dessus du vrai, pour chaque distance qui sont dans les colonnes, tant en montant qu'en descendant : & ce qu'il y a de particulier en ceci, c'est qu'après avoir mis dans une somme les hauteurs du niveau apparent au dessus du vrai, que l'on aura trouvées en montant, il faut l'ajouter à la somme des hauteurs de la premiere colonne, pour ne faire qu'une somme des hauteurs de la premiere colonne, & des différences de leur niveau apparent au dessus du vrai.

L'on écrira de même à côté de la seconde colonne, la différence du niveau apparent au dessus du vrai, pour chaque hauteur que l'on aura trouvée en descendant ; & l'on fera une somme de toutes ces différences, qu'il faudra ensuite soustraire de celles des hauteurs, tellement qu'il faut regarder comme une regle générale, qu'en montant il faut ajouter la différence du niveau apparent au dessus du vrai, aux hauteurs que l'on trouvera en descendant, & qu'en descendant il les faut soustraire ; & en voici la raison.

Figure 211. Supposons qu'en montant l'on ait donné des coups de niveau B C & F G, & en descendant les coups de niveau K N & Q R. Cela posé, considérez qu'ayant mené à la ligne B C la parallele A D, cette parallele sera une tangente à la terre, & la ligne D E marquera la hauteur du niveau apparent au dessus du vrai. Or comme les lignes B A & C D sont égales, le point C sera plus éloigné du centre de la terre que le point B de toute la ligne D E : ainsi pour que le point B soit de niveau avec le point C, il faudra ajouter à la hauteur B A la ligne D E, c'est-à-dire la ligne de la différence du niveau apparent au dessus du vrai. De même si à la ligne de niveau apparent F G l'on mene la parallele E H, la ligne H I sera encore la différence du niveau apparent au dessus du vrai. Or

les lignes FE & GH étant égales, le point G sera plus éloigné du centre de la terre que le point F de toute la ligne HI: il faut donc, pour que le point F soit de niveau avec le point G, ajouter à la hauteur FC la ligne HI.

A l'égard des coups de niveau KN & QR, que l'on a donnés en descendant, l'on voit que leur ayant mené les paralleles LO & PS, qui sont des tangentes à la terre, le point N est plus éloigné du centre de la terre que le point K de toute la ligne OP; & que pour trouver un point de niveau avec le point K, il faut ôter de la hauteur NQ la ligne OP, qui est la différence du niveau apparent au dessus du vrai pour la longueur KN. Enfin comme le point R n'est pas de niveau avec le point Q, parce que le premier est plus éloigné du centre de la terre que le second de toute la ligne ST, il faudra donc encore ôter la ligne ST de la hauteur RT, pour mettre le point R de niveau avec le point Q. Il en sera de même des autres.

L'on a supposé que les lignes BA & CD, FE & GH, &c. étoient paralleles, quoiqu'elles soient des demi-diametres de la terre prolongés; mais à cause de la grande distance au centre, on les peut regarder comme telles, sans que cela puisse faire une erreur sensible. *Figure* 212.

Pour appliquer à un exemple ce que nous venons d'enseigner, soient les lieux A & F, dont on veut connoître la différence de niveau.

Pour cela je me sers d'un niveau à lunettes, que je pose au premier terme A, pour donner le coup de niveau GB, qui se termine à un point B de la hauteur, auquel j'envoie un Aide pour y planter un piquet, & je considere que la différence du niveau apparent est de 4 pieds & demi, qui est la hauteur GQ du niveau, que j'écris dans la premiere colonne; ensuite je fais mesurer la longueur GB, que je suppose de 600 toises, & je cherche quelle est la hauteur du niveau apparent au dessus du vrai, que je trouve de 4 pouces: j'écris cette hauteur à côté de la premiere colonne, vis-à-vis de 4 pieds & demi. Après cela je fais porter le niveau au point B, & j'envoie un Aide à l'endroit C, qui est une distance que l'on aura jugé convenable; & après avoir donné le coup de niveau HI, je suppose que l'on a trouvé IC de 2 pieds, que je soustrais de 4 pieds &

demi, & il reste 2 pieds & demi pour la hauteur du point C au dessus du point B. Ayant donc écrit cette quantité dans la premiere colonne, je fais mesurer la longueur HI, que je trouve de 380 toises, qui donnent un pouce 7 lignes pour la différence du niveau apparent au dessus du vrai, que j'écris à côté de la premiere colonne, vis-à-vis 2 pieds 6 pouces.

Delà je viens au point C, & j'envoie un Aide au point D avec une perche; ensuite je donne le coup de niveau KL, & l'Aide qui est en L, marque un trait de crayon à l'endroit de la perche où a répondu le rayon de mire, & on mesure la hauteur LD, qui sera, par exemple, de 9 pieds; d'où ayant soustrait la hauteur du niveau, il vient 4 pieds & demi, qui fait voir la différence de niveau apparent des points C & D. Mais comme 4 pieds & demi est une hauteur que l'on a trouvée en descendant, je l'écris dans la seconde colonne, à côté de laquelle j'écris aussi 2 pouces 4 lignes, qui est la différence du niveau apparent au dessus du vrai pour la longueur KL. Après cela je fais porter le niveau au point D, & j'envoie un Aide en E, pour marquer le point M sur la perche, après que j'aurai donné le coup de niveau MN: ayant trouvé 10 pieds & demi pour la hauteur EN, j'en soustrais celle du niveau, qui est de 4 pieds & demi, & la différence est 6 pieds, que j'écris dans la seconde colonne: & supposant que la distance MN soit de 650 toises, je cherche la hauteur du niveau apparent au dessus du vrai pour une pareille distance, & je trouve qu'elle est de 4 pouces 8 lignes, que j'écris à côté de la seconde colonne, vis-à-vis le dernier nombre que j'y ai marqué, c'est-à-dire vis-à-vis 6 pieds. Enfin je fais porter le niveau en E, pour faire la derniere opération OP, qui donne 8 pieds pour la hauteur PF; d'où ayant retranché celle du niveau, la différence est 3 pieds & demi, que j'écris dans la seconde colonne, à côté de laquelle je mets 5 pouces 4 lignes, qui est la différence du niveau apparent au dessus du vrai pour la distance OP, que nous supposons de 700 toises.

Après que l'on a fait l'opération, il faut faire l'addition des hauteurs de la premiere colonne, & l'on aura 6 pieds, & ajouter aussi ensemble les hauteurs des niveaux apparens au dessus du vrai, pour avoir 5 pouces 7 lignes, qu'il faut ajouter avec la premiere colonne, & le tout sera 6 pieds 5 pouces 7 lignes.

Ensuite il faut ajouter les hauteurs de la seconde colonne, qui font 14 pieds; mettre aussi dans une somme les hauteurs du niveau apparent au dessus du vrai, qui sont à côté, pour avoir un pied 4 lignes, qu'il faut soustraire de la somme des hauteurs de la seconde colonne, c'est-à-dire, de 14 pieds, & la différence sera 12 pieds 11 pouces 8 lignes. Enfin il faut soustraire 6 pieds 5 pouces 7 lignes de cette quantité, & le reste sera 6 pieds 6 pouces une ligne, qui fait voir que le lieu A est plus élevé que le lieu F de 6 pieds 6 pouces une ligne.

772. Quand le terrein le permet, il vaut beaucoup mieux faire le nivellement entre deux termes, que de suivre ce qui vient d'être dit, parce que l'on n'a point d'égard à la différence du niveau apparent au dessus du vrai, non plus que dans les pratiques que nous avons données au sujet du niveau d'eau : mais pour cela il seroit à propos que le niveau eût deux lunettes, l'une pour pointer de la droite à la gauche, & l'autre pour pointer de la gauche à la droite. Les corrections des coups de niveau se feront toujours de la même façon qu'il a été enseigné.

Par exemple, voulant connoître la différence des hauteurs de deux endroits I & E, je partage la distance de ces deux termes, pour faire des stations aux endroits les plus convenables; & ayant fait planter des piquets aux endroits F, G, H, je fais ma premiere station au point A, à peu près dans le milieu de EF, la seconde au point B, aussi dans le milieu de FG, la troisieme au point C, & la quatrieme au point D; observant toujours d'écrire dans la premiere colonne les hauteurs que l'on trouvera en montant, & dans la seconde celles que l'on trouvera en descendant, sans se mettre en peine des hauteurs du niveau apparent au dessus du vrai. Je crois avoir assez dit pour ne rien laisser à désirer sur tout ce qui regarde le nivellement; & pour peu qu'on s'attache à le bien entendre, il ne faudra qu'un peu de pratique pour être en état de faire toutes les opérations qui se pourront présenter. *Figure 213.*

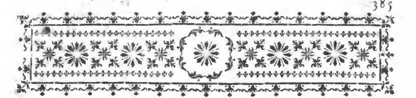
AVERTISSEMENT.

M'étant apperçu qu'une grande partie de ceux qui se servent tous les jours du toisé, n'en ont que la routine, & que les personnes qui en ont écrit ne se sont attachées qu'à donner la pratique de ce calcul, sans rien dire des raisons sur lesquelles il est établi; j'ai cru devoir en donner un petit Traité avant de parler de la mesure des corps, afin que ceux qui commencent puissent les calculer, & trouvent dans cet Ouvrage tout ce qu'il faut qu'ils sçachent, pour être en état de se servir utilement de ce qui a été enseigné dans la premiere Partie.

Fin du dixieme Livre.



NOUVEAU



NOUVEAU COURS
DE
MATHÉMATIQUE.

LIVRE ONZIEME.

Du Toisé en général, où l'on enseigne la maniere de faire le calcul du toisé des plans, des solides, & de la charpente.

773. L'On entend ordinairement par le *toisé*, la maniere de calculer les dimensions de tous les ouvrages qui font partie de la fortification d'une place, & même de tous les édifices civils. Quoique chaque pays ait sa mesure particuliere, & que le pied ne soit pas le même partout, cela n'empêche pas que pour les ouvrages du Roi, l'on ne se serve toujours de la toise, qui est (comme nous l'avons dit ailleurs) composée de six pieds. Mais comme le pied est dans un endroit de dix pouces, dans un autre de onze pouces, on a nommé celui dont on se sert en France pour les fortifications, *pied de Roi*, lequel est composé de 12 pouces; ainsi la toise vaut 72 pouces. L'on a aussi divisé le pouce en douze parties, que l'on nomme *lignes*, & la ligne en douze autres parties, que l'on nomme *points*.

Cependant on distingue trois sortes de toises; la toise *courante*, la toise *quarrée*, & la toise *cube*. La toise courante est celle qui a 6 pieds de longueur, sans largeur ni profondeur; la toise quarrée est celle qui a 6 pieds de longueur sur 6 pieds de largeur, sans hauteur ou profondeur; & la toise *cube* est celle qui a 6 pieds de longueur, 6 pieds de largeur, sur 6 pieds de hauteur, & qui a par conséquent les trois dimensions égales:

auſſi cette toiſe ſert-elle à meſurer les ſolides, au lieu que la toiſe quarrée ne ſert qu'à meſurer les ſuperficies, & la toiſe courante les longueurs, & à déterminer les dimenſions des plans & des ſolides.

Ainſi ce que nous venons d'expliquer à l'égard de la toiſe, eſt la même choſe que ce que l'on a dit à l'égard du pied au commencement du premier Livre.

La toiſe quarrée ayant 6 pieds de longueur ſur 6 pieds de largeur, l'on peut dire que ſa ſuperficie eſt compoſée de 36 pieds quarrés, puiſque multipliant les deux dimenſions de cette toiſe l'une par l'autre, c'eſt-à-dire 6 pieds par 6 pieds, l'on aura 36 pieds quarrés: à l'égard de la toiſe cube, comme ſes trois dimenſions ſont chacune compoſées de 6 pieds, on voit qu'elle doit être compoſée de 216 pieds cubes; car multipliant la toiſe quarrée, qui vaut 36 pieds quarrés par 6 pieds, qui eſt la hauteur de la toiſe cube, l'on aura 216 pieds cubes.

774. Il eſt bon de remarquer ici que dans le toiſé des plans & des ſolides, tel que nous l'allons expliquer, on ne conſidere point combien il faut de pieds quarrés pour compoſer une toiſe quarrée, ni combien il faut de pieds cubes pour compoſer une toiſe cube; parce que pour rendre le calcul plus court, l'on a pris pour le pied de la toiſe quarrée, la ſixieme partie de la même toiſe, & pour le pied de la toiſe cube, la ſixieme partie de cette toiſe; tellement que ſi l'on conſidere le quarré AB comme une toiſe quarrée, dont le côté AC eſt diviſé en ſix parties égales, le rectangle DE étant la ſixieme partie du quarré AB, il ſera par conſéquent un pied de toiſe quarrée, de même que le rectangle DF renferme 3 pieds de toiſe quarrée, puiſqu'il eſt la moitié du quarré AB. Mais comme la toiſe quarrée vaut 36 pieds quarrés, & que le rectangle DE eſt la ſixieme partie de la toiſe, il s'enſuit qu'un pied de toiſe quarrée vaut 6 pieds quarrés, & que le rectangle DF, qui eſt la moitié de la toiſe, en vaut 18.

Figure 214.

L'on pourroit dire la même choſe des pouces, des lignes, des points de toiſe quarrée; car un pouce tel que celui-ci eſt un rectangle, qui a un pouce de baſe ſur une toiſe de hauteur; de même une ligne eſt un rectangle, qui a une ligne de baſe ſur une toiſe de hauteur. Enfin un point eſt encore un rectangle, qui a pour baſe la douzieme partie d'une ligne, & pour hauteur une toiſe: ainſi l'on voit que 12 points de toiſe

quarrée font une ligne de la même toise, que 12 lignes font un pouce, que 12 pouces font un pied, & que 6 pieds font une toise quarrée, puisque toutes ces quantités ont la même hauteur. Nous ferons voir la même chose à l'égard des pieds, des pouces, des lignes & des points de la toise cube, après que nous aurons suffisamment expliqué la maniere de multiplier deux dimensions exprimées par des toises & des parties de toises courantes.

CHAPITRE PREMIER,

Où l'on fait voir comment on multiplie deux dimensions, dont la premiere est composée de toises & de parties de toises, & la seconde de toises seulement.

775. AYant une longueur AB de 6 toises, à laquelle on a ajouté une petite longueur CB de 2 pieds, & une autre CD de 6 pouces, toute la ligne AD vaudra 6 toises 2 pieds 6 pouces; laquelle étant multipliée par la ligne AE d'une toise, le produit donnera le rectangle EADH, dont on aura la valeur, en multipliant 6 toises 2 pieds 6 pouces par une toise, pour en faire le calcul.

toises.	pieds.	pou.
6.	2.	6.
1.	0.	0.
6.	2.	6.

Je pose les deux dimensions comme on les voit ici; ensuite je multiplie les plus petites parties, en commençant par la droite, & finissant par la gauche, en disant: une fois 6 est 6, que je pose à la colonne des pouces, parceque ce sont 6 pouces de toise quarrée, & puis une fois 2 est 2, que je pose au rang des pieds, parce que ce sont des pieds de toise quarrée: enfin une fois 6 est 6, que je pose au rang des toises, parce que ce sont autant de toises quarrées: ainsi le produit 6 toises 2 pieds 6 pouces, est la valeur du rectangle AH, lequel est composé du rectangle AF, qui vaut 6 toises du rectangle BG, qui vaut 2 pieds, & du rectangle CH, qui vaut 6 pouces.

toises.	pieds.	pou.
10.	4.	8.
5.	0.	0.
53.	5.	4.

Pour multiplier 10 toises 4 pieds 8 pouces par 5 toises, je dispose ce nombre comme on le voit ici, & je dis, 5 fois 8 font 40, faisant attention que ce sont 40 unités, qui valent

chacune un petit rectangle, qui a pour base un pouce sur une toise de hauteur ; & comme ce sont autant de pouces de toise quarrée, je considere en 40 combien il y a de fois 12, parce que 12 pouces de toise quarrée valent un pied de la même toise : & comme je trouve qu'en 40 il y a trois fois 12, & 4 de reste, je pose 4 au rang des pouces, & je retiens 3 pieds : ensuite je dis, 5 fois 4 font 20, & 3 de retenu, font 23, dont chaque unité vaut un pied de toise quarrée ; & comme il faut 6 de ces pieds pour faire une toise, je considere combien 6 se trouve de fois dans 23 ; & comme il y est 3, & qu'il reste 5, je pose 5 au rang des pieds, & je retiens 3, qui font autant de toises quarrées, que j'ajoute avec le produit de 10 par 5, pour avoir 53 : ainsi l'opération étant faite, on trouvera 53 toises 5 pieds 4 pouces.

toises.	pieds.	pou.
60.	3.	9.
84.	0.	0.
240.		
480.		
42.	0.	0.
10.	3.	0.
5092.	3.	0.

Pour multiplier 60 toif. 3 pieds 9 pouces par 84 toises, je remarque que le nombre 84 étant considérable, la mémoire seroit fatiguée en multipliant les pieds & les pouces, comme on le voit dans cette opération : car d'aller dire 84 fois 9, on n'apperçoit pas d'abord combien ce produit doit donner de pouces ; & supposé qu'on le sçache à l'instant, l'on trouveroit encore un autre embarras, en cherchant combien ce produit contient de pieds, à moins qu'on ne fasse une division par 12 ; & ceci se rencontrera, non seulement à l'égard des pouces, mais encore pour les pieds, les lignes, & les points. Or pour éviter les difficultés que pourroit donner un pareil calcul, on agit d'une façon fort simple pour multiplier les pieds, les pouces, les lignes & les points de la premiere dimension, quand le nombre de toises de la seconde est composé de plus d'une figure. Pour cela, il faut commencer par multiplier les entiers par les entiers : ainsi je multiplie 60 par 84, & j'écris le produit comme à l'ordinaire ; ensuite je remarque que si au lieu de 3 pieds j'avois une toise à multiplier par 84, le produit seroit 84 toises ; mais comme 3 pieds ne valent que la moitié d'une toise, la moitié de 84 sera donc le produit de 3 pieds ; ainsi je dis : La moitié de 8 est 4, & la moitié de 4 est 2, ce qui donne 42 pour le produit ; mais il faut remarquer que dans le tems que je prends la moitié de 84 pour le produit de 3 pieds, j'agis

comme si 84 contenoit des toises quarrées: car pour que 42 toises soient le produit de deux dimensions, ou autrement soient des toises quarrées, il faut que 84 soient regardées comme des toises quarrées.

Mais comme il y a encore 9 pouces qui n'ont pas été multipliés, je considere quel est le rapport de 9 pouces avec 3 pieds, de même que j'ai considéré celui de 3 pieds avec la toise. Or comme 3 pieds valent 36 pouces, je vois que le rapport de 9 à 36 est un quart, & que si le produit de 84 par 3 pieds a donné 42 toises, le produit de 9 pouces par 84 ne doit donner que le quart de 42 : je dis donc, le quart de 4 est 1, que je pose sous le 4, & le quart de 2 est 0; mais comme 2 toises valent 12 pieds, n'ayant pu prendre le quart de 2 toises en nombres entiers, je les réduis en pieds pour en prendre le quart, qui est 3; après quoi je fais l'addition de tous ces produits, afin d'avoir le produit total, qui est 5092 toises & 3 pieds.

Pour rendre ce calcul plus familier aux Commençans, voici encore plusieurs exemples des mêmes Regles.

Pour multiplier 18 toises 2 pieds 8 pouces par 24 toises, l'on commence par multiplier les toises par les toises, comme à l'ordinaire: après cela il faut considérer le rapport de 2 pieds avec la toise; & comme 2 pieds en est le tiers, je prends le tiers de 24, qui est 8; & comme ce sont autant de toises, je les place au rang des toises.

toises.	pieds.	pou.
18.	2.	8.
24.	0.	0.
72.		
36.		
8.	0.	0.
2.	4.	0.
442.	4.	0.

Pour être convaincu que 24 multipliés par 2 pieds, donne 8 toises, faisons-en la multiplication comme à l'ordinaire, l'on verra que le produit est 48 pieds, c'est-à-dire 48 petits rectangles, dont chacun a un pied pour base, & une toise pour hauteur: & comme il en faut 6 pour faire une toise quarrée, l'on voit que divisant 48 par 6, le quotient sera 8, qui est le même nombre que nous avons trouvé de l'autre façon.

Mais il nous reste encore à multiplier 24 toises par 8 pouces; & comme cela se peut faire par le moyen du produit de 2 pieds, je considere le rapport que 2 pieds ont avec 8 pouces, parce que le rapport du produit de 8 pouces avec celui de 2 pieds sera le même que 8 pouces avec 2 pieds. Or comme 2 pieds valent 24 pouces, & que 8 en est le tiers, je prends le tiers du produit de 2 pieds, c'est-à-dire le tiers de 8 toises, en disant: Le tiers

de 8 eſt 2, il reſte 2 toiſes, qui valent 12 pieds, dont le tiers eſt 4 pieds, que je poſe au rang des pieds; après quoi je fais l'addition de tous les produits pour avoir le total, qui eſt 442 toiſes 4 pieds.

toiſes.	pieds.	pouces.	lig.
36.	5.	6.	9.
28.	0.	0.	0.
288.			
72.			
14.	0.	0.	0.
9.	2.	0.	0.
2.	2.	0.	0.
0.	1.	9.	
1033.	5.	9.	0.

Pour multiplier 36 toiſes 5 pieds 6 pouces 9 lignes par 28 toiſes, je commence, comme à l'ordinaire, à multiplier les toiſes par les toiſes; enſuite je compare le rapport de 5 pieds avec la toiſe, & je vois que c'eſt les $\frac{5}{6}$, & par conſéquent il faut pour multiplier 28 toiſes par 5 pieds, prendre les $\frac{5}{6}$ de 28 toiſes; & comme il n'eſt pas aiſé de prendre cela tout d'un coup, je cherche des parties aliquotes pour rendre le calcul plus aiſé; & comme 5 eſt composé de 3 & de 2, dont 3 eſt la moitié de la toiſe, & 2 le tiers, je prends d'abord pour 3 la moitié de 28, qui eſt 14, enſuite pour 2 pieds le tiers, en diſant: Le tiers de 28 eſt 9; & comme il reſte une toiſe, j'en prends encore le tiers, qui eſt 2 pieds.

Pour multiplier les 6 pouces, j'ai recours au produit de 2 pieds, qui paroît le plus commode, parce que 6 pouces eſt le quart de 2 pieds, puiſque 2 pieds valent 24 pouces; ainſi le produit de 6 pouces ſera le quart de celui de 2 pieds; & comme ce produit eſt 9 toiſes 2 pieds, je dis: Le quart de 9 eſt 2, il reſte une toiſe, qui vaut 6 pieds, leſquels étant ajoutés avec les 2 pieds qui reſtent, font 8 pieds, dont le quart eſt 2: ainſi le produit de 6 pouces eſt 2 toiſes 2 pieds.

Comme il reſte encore 9 lignes, qui n'ont pas été multipliées, je cherche le rapport de 9 lignes avec 6 pouces. Or comme 6 pouces valent 72 lignes, & que 9 lignes en font la huitieme partie, le produit de 9 lignes ſera donc la huitieme partie de celui de 6 pouces, je dis donc: La huitieme partie de 2 eſt 0; mais ce ſont 2 toiſes qui valent 12 pieds, auxquels ajoutant 2 pieds qui reſtent, on aura 14, dont la huitieme partie eſt un pied, il reſte 6 pieds, que je réduis en pouces pour avoir 72 pouces, dont la huitieme partie eſt 9, que je poſe au rang des pouces; après quoi je fais l'addition, qui donne 1033 toiſes 5 pieds 9 pouces pour produit total.

Pour multiplier 12 toiſes 9 pouces par 18 toiſes, je fais la

multiplication des toises comme à l'ordinaire; ensuite pour multiplier 18 toises par 9 pouces, je cherche le rapport de 9 pouces avec la toise, & je trouve qu'ils en font la huitieme partie, puisqu'une toise vaut 72 pouces; mais comme il se peut rencontrer une quantité de nombres, 7, 11, 10, où ce rapport ne se fera pas appercevoir aisément, il vaut mieux faire une fausse position, c'est-à-dire supposer le produit d'un pied. Faisant donc comme s'il y avoit un pied à la place du zero, je multiplie ce pied supposé par 18 toises; & comme un pied est la sixieme partie de la toise, je prends la sixieme partie de 18, qui est 3 toises, que je pose au rang des toises, ayant soin de couper le 3 par un trait de plume, pour faire voir qu'il ne doit point être compris dans l'addition. Cela posé, je cherche le rapport de 9 pouces avec un pied, qui est les $\frac{3}{4}$: je prends donc d'abord pour 6 pouces, qui est la moitié; ainsi je dis: la moitié de 3 est 1, il reste une toise, qui vaut 6 pieds, dont la moitié est 3; ensuite je prends la moitié de ce produit pour 3 pouces, en disant: la moitié d'un n'est rien, mais c'est une toise qui vaut 6 pieds, lesquels étant joints avec les 3 pieds qui restent, font 9 pieds, dont la moitié est 4 pieds 6 pouces, que j'additionne avec les autres produits, & il vient 218 toises un pied 6 pouces pour le produit total.

toises.	pieds.	pou.
12.	0.	9.
18.	0.	0.
96.		
12.		
3.	6.	6.
1.	3.	0.
0.	4.	6.
218.	1.	6.

Pour multiplier 24 toises 2 pieds 6 lignes par 52 toises, il faut, après avoir multiplié les toises par les toises, chercher le rapport de 2 pieds avec la toise; & comme c'est le tiers, on prendra donc le tiers de 52, qui est 17 toises 2 pieds. Comme il reste 6 lignes à multiplier par 52 toises, il n'est pas aisé de voir le rapport de 6 lignes avec 2 pieds; l'on auroit bien plus de facilité, si l'on avoit le produit de quelque pouce: cependant comme il n'y a pas de pouces dans la premiere dimension, il faut se donner un produit supposé d'un pouce; & comme un pouce est la 24e partie de 2 pieds, je m'apperçois qu'il n'est pas encore aisé de prendre la 24e partie

toises.	pieds.	pouces.	lig.
24.	2.	0.	6.
52.	0.	0.	0.
48.			
120.			
17.	2.	0.	0.
8.	4.	0.	0.
0.	4.	4.	0.
0.	2.	2.	0.
1265.	4.	2.	0.

de 17 toises 2 pieds; c'est pourquoi j'en prends la moitié pour avoir le produit d'un pied seulement, qui sera 8 toises 4 pieds. Ayant posé ces nombres à leurs places ordinaires, je les coupe par un trait de plume, pour qu'ils ne soient pas compris dans l'addition : après cela je considere qu'un pouce étant la douzieme partie d'un pied, si je prends la douzieme de 8 toises 4 pieds, j'aurai 4 pieds 4 pouces pour le produit d'un pied : après quoi je barre ces deux nombres, parce qu'ils composent un produit supposé. Or comme 6 lignes sont la moitié d'un pouce, il n'y a donc qu'à prendre la moitié de 4 pieds 4 pouces, qui est 2 pieds 2 pouces, pour avoir le produit de 6 lignes : si l'on fait l'addition de tous les produits, l'on aura 1265 toises 4 pieds 2 pouces pour le produit total.

Si l'on avoit eu à multiplier 24 toises 6 lignes par 52 toises, & que dans la premiere dimension il n'y eût eu ni pieds ni pouces, comme on le suppose ici, il auroit fallu pour trouver le produit de 6 lignes, supposer celui d'un pied, ensuite celui d'un pouce pour avoir celui de 6 lignes, qui sera la moitié de celui d'un pouce.

CHAPITRE II,

Où l'on donne la maniere de multiplier deux dimensions, dont chacune est composée de toises, pieds, pouces, &c.

776. NOus avons affecté de ne pas mettre des pieds, pouces, & des lignes dans la seconde dimension des multiplications que l'on a faites dans le chapitre précédent, afin de rendre les opérations plus simples : mais comme il arrive presque toujours que s'il y a des pieds, des pouces dans la premiere dimension, il y en a aussi dans la seconde, voici la maniere de multiplier les parties de toises qui peuvent se rencontrer dans l'une & dans l'autre.

Pour multiplier 15 toises 4 pieds 8 pouces 7 lignes par 6 toises 3 pieds 6 pouces, je considere que le nombre des toises de la seconde dimension étant exprimé par un chiffre seulement, je puis faire la multiplication de toute la premiere dimension par 6 toises, par un calcul de mémoire, comme on l'a fait au commencement du chapitre précédent : ainsi faisant abstraction

toises.	pieds.	pouces.	lig.	poi.
15.	4.	8.	7.	o.
6.	3.	6.	o.	o.
94.	4.	3.	6.	o.
7.	5.	4.	3.	6.
1.	1.	10.	8.	7.
103.	5.	6.	6.	1.

tion pour un moment des 3 pieds 6 pouces de la seconde dimension, je commence par multiplier les plus petites parties de la premiere dimension par 6 toises, en disant : six fois 7 font 42 lignes, qui valent 3 pouces 6 lignes. Ayant posé 6 lignes en leur place, je retiens 3 pouces; je dis ensuite : six fois 8 font 48, & 3 de retenus font 51 pouces, qui valent 4 pieds 3 pouces : je pose 3 pouces, & retiens 4 pieds, & je viens à la multiplication des pieds, en disant : six fois 4 font 24, & 4 de retenus font 28 pieds, qui valent 4 toises 4 pieds, je pose 4 pieds, & retiens 4 toises, que j'ajoute au produit de 15 toises par 6 pour avoir 94: ainsi le produit de 6 toises par la premiere dimension est 94 toises 4 pieds 3 pouces 6 lignes, qui est une quantité qui contient autant de fois la premiere dimension, qu'il y a d'unités dans le nombre 6.

Présentement je considere que puisque chaque toise du nombre 6 a donné pour son produit une quantité semblable à celle de la premiere dimension, si j'ai à multiplier cette premiere dimension par des parties de la toise, il faut que le produit ait le même rapport avec celui de la toise par la premiere dimension, que ses parties avec la toise même. Cela posé, comme la premiere dimension doit être multipliée encore par 3 pieds, je considere que 3 pieds étant la moitié de la toise, le produit de 3 pieds sera la moitié de la premiere dimension, qui est supposée dans ce cas avoir été multipliée par la toise; ainsi je dis : la moitié de 15 est 7, il reste une toise qui vaut 6 pieds, qui étant ajoutés avec 4 pieds, font 10 pieds, dont la moitié est 5; je dis ensuite : la moitié de 8 est 4, & la moitié de 7 lignes est 3 lignes 6 points.

Comme il nous reste encore 6 pouces à multiplier, je considere que 6 pouces étant la sixieme partie de 3 pieds, le produit de 6 pouces sera la sixieme partie de celui de 3 pieds; ainsi je prends la sixieme partie de ce produit, qui donne une toise un pied 10 pouces 8 lignes 7 points, qui étant ajoutés avec le reste, il vient 103 toises 5 pieds 6 pouces 6 lignes un point pour le produit total.

Pour multiplier 68 toises 3 pieds 4 pouces 9 lignes par 9 toises 4 pieds 9 pouces, je commence par multiplier la premiere di-

menſion par 9, & le produit donne 617 toiſes 6 pouces 9 lignes; enſuite je conſidere que 4 pieds ſont les deux tiers de la toiſe : ainſi je prends deux fois le tiers pour avoir moins d'embarras, c'eſt-à-dire, je prends chaque fois pour deux pieds, en diſant : le tiers de 6 eſt 2, le tiers de 8 eſt encore 2, & il reſte 2 toiſes, qui valent 12 pieds, qui étant ajoutés avec les 3 pieds qui ſont ſur la droite, font 15, dont le tiers eſt 5. Après cela le tiers de 4 eſt 1, & il reſte un pouce, qui vaut 12 lignes, qui étant ajoutées avec 9, font 21 lignes, dont le tiers eſt 7 : ainſi le produit de 2 pieds étant 22 toiſes 5 pieds un pouce 7 lignes, j'écris encore une ſeconde fois ce produit, afin que les deux faſſent celui de 4 pieds; & comme il y a encore 9 pouces à multiplier, je prends ſeulement pour 6 pouces le quart du produit de 2 pieds, en diſant : le quart de 22 eſt 5, il reſte 2, qui valent 12 pieds, & 5 font 17, dont le quart eſt 4, il reſte un pied, qui vaut 12 pouces, dont le quart eſt 3, il reſte encore un pouce, qui vaut 12 lignes, & 7 font 19, dont le quart eſt 4 : enfin il reſte 3 lignes, qui valent 36 points, dont le quart eſt 9 points; de ſorte que le produit de 6 pouces eſt 5 toiſes 4 pieds 3 pouces 4 lignes 9 points. Mais comme je dois avoir le produit de 9 pouces, & que je n'ai encore que celui de 6, je prends pour le produit de 3 pouces la moitié de celui de 6 pouces, qui eſt 2 toiſes 5 pieds un pouce 8 lignes 4 points & demi : après quoi je fais l'addition de tous ces produits, qui font enſemble 671 toiſes 2 pieds 3 pouces un point & demi.

toiſes.	*pieds.*	*pou.*	*lig.*	*points.*
68.	3.	4.	9.	0.
9.	4.	9.	0.	0.
617.	0.	6.	9.	0.
22.	5.	1.	7.	0.
22.	5.	1.	7.	0.
5.	4.	3.	4.	9.
2.	5.	1.	8.	4. $\frac{1}{2}$
671.	2.	3.	0.	1. $\frac{1}{2}$

Pour multiplier 12 toiſes 5 pieds 6 pouces 4 lignes par 6 toiſes 4 pouces 8 lignes, je commence, comme à l'ordinaire, par multiplier la premiere dimenſion par 6 toiſes; après quoi je remarque que comme il n'y a point de pieds dans la ſeconde dimenſion, il n'eſt pas aiſé de trouver le produit de 4 pouces, ſans faire une fauſſe poſition : c'eſt pourquoi je ſuppoſe le produit d'un pied, en prenant la ſixieme partie de

toiſes.	*pieds.*	*pou.*	*lig.*	*points.*
12.	5.	6.	4.	0.
6.	0.	4.	8.	0.
77.	3.	2.	0.	0.
~~2.~~	~~0.~~	11.	~~0.~~	~~8.~~
.	4.	3.	8.	2. $\frac{2}{3}$
.	0.	8.	7.	4. $\frac{4}{9}$
78.	2.	2.	3.	7. $\frac{1}{9}$

la premiere dimension, qui est 2 toises 11 pouces 8 points, dont j'ai soin de barrer les chiffres; & comme 4 pouces est le tiers d'un pied, je prends le tiers du produit d'un pied, qui est 4 pieds 3 pouces 8 lignes 2 points & deux tiers; & comme il y a encore 8 lignes à multiplier, je vois que 8 lignes étant la sixieme partie de 4 pouces (puisque 4 pouces valent 48 lignes) le produit de 8 lignes sera la sixieme partie de celui de 4 pouces: après avoir pris cette sixieme partie, qui est 8 pouces 7 lignes 4 points & 4 neuviemes, j'additionne le tout pour avoir le produit total, qui est 78 toises 2 pieds 2 pouces 3 lignes 7 points $\frac{1}{3}$.

Pour multiplier 40 toif. 3 pieds 6 pouces 8 lignes par 24 toises 6 pieds 8 pouces, je commence par multiplier les toises par les toises, au lieu de multiplier d'abord les lignes, les pouces, & les pieds de la premiere dimension, à cause qu'il y a plus d'une figure dans le nombre des toises de la seconde dimension; ensuite j'agis comme j'ai fait dans le chapitre précédent, en prenant pour 3 pieds la moitié de 24, qui est 12, n'ayant égard qu'aux nombres entiers de la seconde dimension: ainsi je fais abstraction de 5 pieds & de 8 pouces qui s'y trouvent, parce qu'il n'est pas encore tems de les multiplier. Ayant donc trouvé le produit de 3 pieds, qui est 12 toises, je considere que les 6 pouces qui sont dans la premiere dimension, font la sixieme partie de 3 pieds, c'est-à-dire la sixieme partie de 12, qui est 2; & ayant encore 8 lignes de la premiere dimension à multiplier, je vois que 6 pouces valant 72 lignes, les 8 lignes en font la neuvieme partie, & par conséquent le produit de ces 8 lignes sera la neuvieme partie du produit de 6 pouces. Or comme le produit de 6 pouces est 2 toises, je dis: la neuvieme partie de 2 n'est rien, mais ce sont 2 toises, qui valent 12 pieds, dont la neuvieme partie est un pied, & il en reste 3, qui valent 36 pouces, dont la neuvieme partie est 4, que je place au rang des pouces.

toises.	*pieds.*	*pou.*	*lig.*	*points.*
40.	3.	6.	8.	0.
24.	5.	8.	0.	0.
160.				
80.				
12.	0.	0.	0.	0.
2.	0.	0.	0.	0.
0.	1.	4.	0.	0.
20.	1.	9.	4.	0.
13.	3.	2.	2.	8.
4.	3.	0.	8.	10. $\frac{2}{3}$
1012.	3.	4.	3.	6. $\frac{2}{3}$

Jusqu'ici nous n'avons fait que multiplier la premiere dimension par les 24 toises qui sont dans la seconde: mais comme

ces 24 toises sont accompagnées de 5 pieds 8 pouces, il faut, comme dans les opérations précédentes, chercher le produit de ces deux quantités : ainsi je considere que 5 pieds valent 3 & 2, c'est-à-dire la moitié & le tiers de la toise : je prends donc pour 3 pieds la moitié de toutes les quantités qui se trouvent dans la premiere dimension, & pour 2 pieds le tiers de ces mêmes quantités. Or comme ce dernier produit est celui de 2 pieds, je remarque que 8 pouces étant le tiers de 2 pieds, le produit de 8 pouces sera le tiers de celui de 2 pieds. Ayant donc pris le tiers de ce produit, je l'additionne avec les autres, pour avoir le produit total, qui est 1012 toises 3 pieds 4 pouces 3 lignes 6 points $\frac{2}{3}$.

Pour multiplier 36 toises 3 pouces 9 lignes pat 50 toises 8 lignes, je multiplie les toises pat les toises, comme à l'ordinaire ; ensuite pour trouver le produit de 3 pouces, je vois que j'ai besoin de supposer celui d'un pied : ainsi je prends la sixieme partie de 50 toises, qui est 8 toises 2 pieds ; & comme 3 pouces font le quart d'un pied, je prends le quart de 8 toises 2 pieds, qui est 2 toises 6 pouces : après cela je cherche le produit de 9 lignes, en considérant que 9 lignes étant le quart de 3 pouces, qui valent 36 lignes, le quart du produit de 3 pouces sera par conséquent celui de 9 lignes ; je prends donc le quart de 2 toises 6 pouces, qui est 3 pieds un pouce 6 lignes.

toises.	*pieds.*	*pou.*	*lig.*	*points.*
36.	0.	3.	9.	0.
50.	0.	0.	8.	0.
1800.				
8.	2.	0.	0.	0.
2.	0.	6.	0.	0.
0.	3.	1.	6.	0.
6.	0.	0.	7.	6.
0.	3.	0.	0.	7. $\frac{1}{2}$
0.	1.	0.	0.	2. $\frac{1}{2}$
0.	1.	0.	0.	2. $\frac{1}{2}$
1802.	5.	7.	6.	5.

Après cela je vois que j'ai 8 lignes dans la seconde dimension, & que n'ayant ni pieds ni pouces dans cette dimension, il faut nécessairement supposer des faux produits pour trouver celui de 8 lignes. Je cherche donc d'abord celui d'un pied, en prenant la sixieme partie des quantités qui composent la premiere dimension, & je trouve 6 toises 7 lignes & 6 points : mais comme le rapport de 8 lignes à un pied est encore trop grand, pour ne point fatiguer la mémoire, je prends la douzieme partie de ce produit, qui est 3 pieds 7 points & demi pour le produit d'un pouce ; & comme 8 lignes sont les deux tiers d'un pouce, je prends pour leur produit les deux tiers de celui

d'un pouce, lequel ayant été additionné, donne pour le produit total 1802 toises 5 pieds 7 pouces 6 lignes & 5 points.

CHAPITRE III,

Où l'on donne la maniere de multiplier trois dimensions exprimées en toises, pieds, pouces, &c.

777. LE calcul que l'on a enseigné dans les deux chapitres précédens, ne convient qu'aux superficies, parce que nous n'y avons supposé que deux dimensions; il est vrai que le calcul de trois dimensions ne differe pas beaucoup de celui-ci, puisque pour en avoir le produit, il ne faut que multiplier celui des deux premieres dimensions par la troisieme: mais comme le produit de trois dimensions donne non seulement des toises cubes, mais aussi des pieds, des pouces, & des lignes de toise cube, voici l'idée qu'il faut avoir de ces différentes parties.

Nous avons dit que la toise cube étoit composée de 216 pieds cubes; mais dans le calcul on ne s'embarrasse point de ces sortes de pieds: car on entend par un pied de toise cube la sixieme partie de la même toise, qui est (si l'on veut) de 36 pieds cubes, qui font un parallelepipede EAFGHID, qui a pour base une toise quarrée EAHD, & pour hauteur la ligne HG d'un pied: de sorte que ce solide est la sixieme partie du corps EABC, qui est une toise cube. On considérera de même que le pouce de toise cube est un parallelepipede, qui a une toise quarrée pour base sur un pouce de hauteur, & qu'une ligne de toise cube est un parallelepipede, qui a pour base une toise quarrée, & une ligne pour hauteur; ainsi des autres parties.

778. Il suit de cette définition, que 12 lignes de toise cube font un pouce de la même toise; que 12 pouces font un pied, & que 6 pieds font une toise cube; puisque tous ces solides ont pour base une toise quarrée, & des hauteurs, qui étant jointes ensemble, peuvent donner des toises cubes, ou des parties de toises cubes, comme on le va voir dans les opérations suivantes.

Pour multiplier trois dimensions, dont la premiere est de 8 toises 2 pieds 4 pouces, la seconde 6 toises 4 pieds 8 pouces,

toises.	pieds.	pouces.	lig.	points.
8.	2.	4.	0.	0.
6.	4.	8.	0.	0.
5.	3.	6.	0.	0.
8.	2.	4.	0.	0.
6.	4.	8.	0.	0.
50.	2.	0.	0.	0.
2.	4.	9.	4.	0.
2.	4.	9.	4.	0.
	5.	7.	1.	4.
56.	5.	1.	9.	4.

& la troisieme 5 toises 3 pieds 6 pouces, il faut commencer par multiplier la seconde dimension par la premiere, & le produit sera 56 tois. 5 pieds un pouce 9 lignes 4 points, qu'il faut ensuite multiplier par la troisieme dimension, agissant comme dans les regles des chapitres précédens, c'est-à-dire qu'il faut faire comme si le produit des deux premieres dimensions ne faisoit qu'une dimension. Je dis donc : cinq fois 4 font 20, qui sont autant de points de toise cube, c'est-à-dire que ce sont autant de petits parallelepipedes, qui ont pour base une toise quarrée, & pour hauteur un point : car si l'on fait attention que chaque unité du nombre 4 est un petit parallélogramme, qui a pour base un point, & pour hauteur une toise, puisque ce sont des points de toise quarrée (art. 774), l'on verra que multipliant ce parallélogramme par une ou plusieurs toises, ils seront changés en parallelepipedes, qui auront deux dimensions d'une toise, qui font ensemble une toise quarrée ; ce qui répond à la définition. De même si l'on multiplie 9 lignes de toise quarrée par des toises, l'on aura encore des petits parallelepipedes, qui auront pour base une toise quarrée, & pour hauteur une ligne, puisque l'on aura multiplié par des toises les rectangles qui ont une de leurs dimensions, qui vaut une toise; il en sera ainsi des pouces & des pieds. A l'égard des toises, il n'y a point de doute que multipliant des toises quarrées par des toises courantes, le produit ne donne des toises cubes.

Ainsi multipliant 56 toises 5 pieds 1 pouce 9 lignes 4 points de toise quarrée par 5 toises courantes, le produit sera 284 toises 1 pied 8 pouces 10 lignes 8 points de toise cube.

Or comme 56 toises 5 pieds 1 pouce 9 lignes 4 points étant multipliés par une toise, donneront des toises & des parties de toise cube, qui seront toujours exprimées par les mêmes nombres qui sont ici, c'est-à-dire par 56 toises 5 pieds, &c. si l'on suppose que cette multiplication a été faite, la moitié de cette quantité sera donc le produit de 3 pieds: ainsi comme il y a 3 pieds dans la seconde dimension, je prends la moitié de

cette quantité, qui sera 28 toises 2 pieds 6 pouces 10 lignes 8 points, que je regarde comme des toises & des parties de toise cube, qui composent le produit de 3 pieds.

Enfin comme il y a encore 6 pouces dans la troisieme dimension, je considere que 6 pouces étant la sixieme partie de 3 pieds, le produit de 6 pouces sera la sixieme partie de celui de 3 pieds : ainsi prenant la sixieme partie de ce produit, l'on aura 4 toises 4 pieds 5 pouces une ligne 9 points & un tiers pour le produit de 6 pouces, qui étant ajoutés avec les autres, donneront le produit total de 317 toises 2 pieds 8 pouces 11 lignes 1 point & un tiers.

Pour multiplier trois dimensions, dont la premiere est 15 toises 5 pieds 3 pouces, la seconde 8 toises 3 pieds 9 pouces, & la troisieme 6 toises 2 pieds 6 pouces, je multiplie, comme ci-devant, les deux premieres dimensions l'une par l'autre pour avoir leur produit, qui est 136 toises 5 pieds 6 pouces 4 lignes 6 points ; & comme ce produit donne des toises & des parties de toises quarrées, je multiplie encore le tout par la troisieme dimension, c'est-à-dire par 6 toises 2 pieds 6 pouces, & le produit donne 878 toises 3 pieds 5 pouces 10 lignes 10 points & demi.

toises.	*pieds.*	*pou.*	*lig.*	*points.*
15.	5.	3.	0.	0.
8.	3.	9.	0.	0.
6.	2.	6.	0.	0.
15.	5.	3.	0.	0.
8.	3.	9.	0.	0.
127.	0.	0.	0.	0.
7.	5.	7.	6.	0.
1.	5.	10.	10.	6.
136.	5.	6.	4.	6.
6.	2.	6.	0.	0.
821.	3.	2.	3.	0.
45.	3.	10.	1.	6.
11.	2.	5.	6.	4. $\frac{1}{2}$
878.	3.	5.	10.	10. $\frac{1}{2}$

Pour multiplier trois dimensions, dont la premiere est 4 toises 2 pieds 5 pouces, la seconde 3 toises 1 pied 6 pouces, & la troisieme 5 pieds 4 pouces, je commence par multiplier les deux premieres dimensions, dont le produit est 14 toises 1 pied 10 pouces 3 lignes ; ensuite je multiplie ce produit par 5 pieds 4 pouces ; & comme il n'y a point de toises dans la troisieme dimension, je pose un zero en leur place, & je multiplie par 5 pieds 4 pouces, commençant par prendre pour 3 pieds la moitié de 14 toises 1 pied, &c ; ensuite je prends pour 2 pieds le tiers de la même quantité, & le produit donne 4 toises 4 pieds 7 pouces 5 lignes, dont je prends la sixieme partie pour le produit de 4 pouces, parce que 4 pouces est la sixieme partie de 2 pieds : enfin j'additionne ce produit avec

les autres pour avoir 12 toiſes 4 pieds 3 pouces 9 lignes 4 points; ce qui eſt le produit total.

toiſes.	*pieds.*	*pouces.*	*lignes.*	*points.*
4.	2.	5.	0.	0.
3.	1.	6.	0.	0.
0.	5.	4.	0.	0.
4.	2.	5.	0.	0.
3.	1.	6.	0.	0.
13.	1.	3.	0.	0.
	4.	4.	10.	0.
	2.	2.	5.	0.
14.	1.	10.	3.	0.
0.	5.	4.	0.	0.
7.	0.	11.	1.	6.
4.	4.	7.	5.	0.
0.	4.	9.	2.	10.
12.	4.	3.	9.	4.

Pour multiplier trois dimenſions, dont la premiere eſt 5 pieds 9 pouces 6 lignes, la ſeconde 3 pieds 6 pouces, & la troiſieme 4 pieds 8 pouces 6 lignes, je range les deux premieres dimenſions l'une ſur l'autre, en mettant des zero à la place des toiſes; enſuite comme il ſe trouve 3 pieds dans la ſeconde dimenſion, je prends la moitié des termes de la premiere dimenſion, pour avoir le produit de 3 pieds; & comme il y a encore 6 pouces, qui valent la ſixieme partie de 3 pieds, je prends pour le produit de 6 pouces la ſixieme partie du produit de 3 pieds; & l'addition étant faite, il vient 3 pieds 4 pouces, 6 lignes 6 points pour le produit des deux premieres dimenſions, que je multiplie enſuite par la 3me, qui eſt, comme nous

toiſes.	*pieds.*	*pou.*	*lig.*	*points.*
0.	5.	9.	6.	0.
0.	3.	6.	0.	0.
0.	4.	8.	6.	0.
0.	5.	9.	6.	0.
0.	3.	6.	0.	0.
0.	2.	10.	9.	0.
0.	0.	5.	9.	6.
0.	3.	4.	6.	6.
0.	4.	8.	6.	0.
0.	1.	1.	6.	2.
0.	1.	1.	6.	2.
0.	0.	4.	6.	0. $\frac{2}{3}$
0.	0.	2.	1.	6. $\frac{1}{6}$
0.	0.	0.	3.	4. $\frac{7}{12}$
0.	2.	7.	9.	4. $\frac{1}{3}$

nous l'avons dit, composée de 4 pouces 8 lignes 6 points : ainsi je commence par prendre deux fois le tiers de ce produit pour avoir celui de 4 pieds ; & comme celui de 2 pieds est 1 pied 1 pouce 6 lignes 2 points, je considere que 8 pouces étant le tiers de 2 pieds, le produit de 8 pouces sera le tiers de celui de 2 pieds, qui donne 4 pouces 6 lignes & $\frac{2}{3}$ de points : mais nous avons encore 6 lignes dans la troisieme dimension, dont le rapport étant un peu éloigné de 8 pouces, je trouve qu'il est moins embarrassant de faire un faux produit ; & comme celui de 2 pouces conviendroit fort, parce qu'on n'auroit qu'à prendre le quart pour avoir celui de 6 lignes, je prends donc le quart du produit de 8 pouces pour avoir celui de 2 pouces, qui est 1 pouce 1 ligne 6 points & $\frac{1}{6}$, dont je coupe les figures ; & prenant le quart de ce produit, il vient 3 lignes 4 points & $\frac{7}{12}$ pour le produit de 6 lignes : & comme il ne reste plus rien à multiplier, je fais l'addition de tous les produits pour avoir le total, qui est 2 pieds 7 pouces 9 lignes 9 points & $\frac{1}{4}$ de points cubes.

Avertissement.

779. Comme les preuves de toutes les Regles d'Arithmétique se font par des Regles contraires, il semble que la meilleure preuve que l'on puisse donner du calcul du toisé, seroit qu'après avoir multiplié deux dimensions, l'on divisât le produit par la premiere dimension pour avoir la seconde au quotient, ou bien diviser par la seconde pour avoir la premiere : il y en a qui pratiquent cette preuve, mais ils sont obligés de réduire tous les termes du produit en leur moindre espece, aussi-bien qu'une des dimensions, c'est-à-dire que si l'on a réduit le produit en lignes, il faut aussi réduire une des dimensions en lignes : après cela on fait une division, dont on réduit le quotient en toises, en pieds, &c. pour avoir l'autre dimension ; mais comme cette preuve demande beaucoup d'opération, en voici une beaucoup plus simple.

Après que l'on a trouvé le produit des deux dimensions, pour voir si l'opération est juste, l'on prend la moitié de la premiere dimension, & l'on double la seconde ; ensuite l'on multiplie les deux dimensions ainsi changées l'une par l'autre, & il vient un second produit, qui doit être égal au premier. Par exemple, pour sçavoir si le produit de 6 toises 5 pieds

4 pouces par 4 toises 2 pieds 6 pouces, qui est 30 toises 2 pieds 6 pouces 8 lignes est bon, il faut prendre la moitié de la premiere dimension pour avoir 3 toises 2 pieds 8 pouces, & doubler la seconde, qui vaudra 8 toises 5 pieds: après cela si l'on multiplie ces deux quantités l'une par l'autre, l'on trouvera que le produit est encore 30 toises 2 pieds 6 pouces 8 lignes; ce qui ne peut arriver autrement, si l'opération est bien faite.

CHAPITRE IV,

Où l'on donne la maniere de calculer le Toisé de la charpente.

780. LE toisé de la charpente est fort différent de celui des autres ouvrages, parce que ce toisé a une mesure particuliere, que l'on nomme *solive*, qui est une quantité qui contient 3 pieds cubes de bois; de sorte que si l'on a une piece de bois DC, dont la longueur AD soit de 6 pieds, la largeur AB de 12 pouces, & l'épaisseur BC de 6 pouces, cette piece composera une solive, puisqu'elle vaut 3 pieds cubes. Or comme la toise cube vaut 216 pieds cubes, & que 216 divisé par 3 donne 72, il s'ensuit qu'une solive est la soixante & douzieme partie d'une toise cube.

La solive, ainsi que la toise, est divisée en 6 pieds, que l'on nomme *pieds de solive*, qui est une quantité d'une toise de longueur sur un pied de largeur, & un pouce d'épaisseur: de sorte que si la ligne BG est la sixieme partie de la ligne BC, la solive DAFGBEH sera un pied de solive, puisqu'il est la sixieme partie de DC.

Comme un pied de toise cube vaut 36 pieds cubes, la solive en sera donc la douzieme partie: & comme un pied de solive est la sixieme partie de la solive, il s'ensuit qu'un pied de solive est la soixante & douzieme partie d'un pied de toise cube, puisqu'il faut 6 pieds de solive pour faire une solive, & 12 solives pour faire un pied de toise cube. Comme le pouce de solive est la douzieme partie du pied de solive, l'on verra de même qu'il est la soixante & douzieme partie d'un pouce de toise cube: il en sera ainsi des lignes & des points.

Il suit de ce qu'on vient de dire, que si l'on a une piece de bois qui contienne un certain nombre de toises, de pieds &

de pouces cubes, pour réduire cette piece en solives, il faut multiplier sa valeur par 72, & le produit sera la quantité de solives contenues dans la piece.

Par exemple, si l'on suppose que 2 toises 3 pieds 6 pouces cubes soient la valeur d'une piece de bois, je considere que chaque toise de cette quantité vaut 72 solives, chaque pied 72 pieds de solive, & chaque pouce 72 pouces de solive : ainsi si l'on multiplie 2 toises 3 pieds 6 pouces cubes par 72, on aura 186 solives.

toises.	*pieds.*	*pou.*	*cubes.*
2.	3.	6.	
72.			
144.			
46.			
6.			
186 *solives.*			

Pour mesurer une piece de bois, dont la premiere dimension a 4 toises 5 pieds 9 pouces, la seconde 1 pied 6 pouces, & la troisieme 1 pied 3 pouces, je multiplie, comme à l'ordinaire, la premiere dimension par la seconde, & le produit donne une toise 1 pied 5 pouces 3 lignes, que je multiplie par la troisieme dimension pour avoir 1 pied 6 pouces 7 lig. 1 point & demi. Présentement pour réduire cette quantité en solives, je la multiplie par 72. Pour cela je prends pour 1 pied la sixieme partie de 72, qui est 12, & pour 6 pouces la moitié du produit d'un pied, qui est 6 : & comme il y a 7 lignes, je prends d'abord pour 6 la douzieme partie du produit de 6 pouces, qui est 3 pieds ; ensuite pour une ligne la sixieme partie du produit précédent, qui donne 6 pouces, il reste encore un point & demi ; je prends premiérement pour un point la douzieme partie de 6 pouces, qui est 6 lignes ; enfin pour la moitié d'un point la moitié du dernier produit pour avoir 3 lignes ; après quoi j'additionne le tout, qui donne 18 solives 3 pieds 6 pouces 9 lignes de solive, pour la valeur de la piece de bois.

toises.	*pieds.*	*pouces.*	*lig.*	*points.*
4.	5.	9.	0.	0.
	1.	6.	0.	0.
0.	4.	11.	6.	0.
0.	2.	5.	9.	0.
1.	1.	5.	3.	0.
0.	1.	3.	0.	0.
0.	1.	2.	10.	6.
0.	0.	3.	8.	7. $\frac{1}{2}$
0.	1.	6.	7	1. $\frac{1}{2}$
72.				
12.	0.	0.	0.	0.
6.	0.	0.	0.	0.
0.	3.	0.	0.	0.
0.	0.	6.	0.	0.
0.	0.	0.	6.	0.
0.	0.	0.	3.	0.
18.	3.	6.	9.	0.

Il y a une maniere de calculer les bois, qui est bien plus

courte que la précédente; c'est de réduire d'abord une des deux dimensions de l'équarrissage en pouces, ensuite les mettre au rang des toises, & l'autre à la place qu'elle doit occuper naturellement. L'on multiplie ces deux dimensions l'une par l'autre, comme dans les regles précédentes, regardant celle qu'on a mise au rang des toises, comme des toises mêmes; après quoi on multiplie le produit qui en vient par la longueur de la piece pour avoir un second produit, qui donne le nombre des solives, des pieds & des pouces de solive, qui sont contenues dans la piece.

Par exemple, pour calculer la même piece de bois que ci-devant, qui a 1 pied 6 pouces sur 1 pied 3 pouces d'équarrissage, & 4 toises 5 pieds 9 pouces de longueur, je réduis une des dimensions de l'équarrissage en pouces, qui sera, par exemple, 1 pied 6 pouces pour avoir 18 pouces, que je mets au rang des toises, & 1 pied 3 pouces de l'autre dimension à leur place ordinaire; ensuite je prends pour 1 pied la sixieme partie de 18, qui est 3; & comme il y a encore 3 pouces qui sont le quart d'un pied, je prends le quart du produit d'un pied, pour avoir celui de 3 pouces, qui est 4 pieds 6 pouces, & j'additionne le tout pour avoir le produit de 3 toises 4 pieds 6 pouces, qu'il faut multiplier par la longueur de la piece, c'est-à-dire par 4 toises 5 pieds 9 pouces, & l'on aura 18 solives 3 pieds 6 pouces 9 lignes de solive.

toises.	pieds.	pouces.	lig.
18.	0.	0.	0.
0.	1.	3.	0.
3.	0.	0.	0.
	4.	6.	0.
3.	4.	6.	0.
4.	5.	9.	0.
15.	0.	0.	0.
1.	1.	6.	0.
1.	5.	3.	0.
	2.	9.	9.
18.	3.	6.	6.

Pour entendre ceci, considérez que si l'on a trois quantités *a*, *b*, *c* à multiplier l'une par l'autre, le produit sera *abc*; & que si ce produit doit être multiplié par *d*, l'on aura *abcd*; mais si au lieu de multiplier le produit *abc* par *d*, l'on multiplioit seulement une des dimensions, comme *a* par *d*, l'on aura *ad*, *bc*, dont le produit donne encore *abcd*; ainsi c'est la même chose de multiplier le produit de trois dimensions par une quantité, ou de multiplier une des dimensions par la même quantité, & ensuite ce produit par les autres dimensions, puisqu'à la fin l'on trouvera toujours la même chose pour le produit total.

781. Or si l'on fait attention qu'une toise vaut 72 pouces,

l'on verra que mettant un pouce au rang des toises, c'est comme si on l'avoit multiplié par 72: ainsi quand nous avons mis 18 pouces au rang des toises, on les a donc multipliés par 72; & par conséquent le produit de cette quantité par les deux autres dimensions est devenu 72 fois plus grand qu'il n'eût été, si l'on avoit mis les 18 pouces à leur place ordinaire; ce qui fait voir que le produit doit donner des solives: car le produit total devient 72 fois plus grand qu'il n'eût été, si l'on n'avoit pas mis les 18 pouces au rang des toises, & que l'on eût fait l'opération à l'ordinaire. Mais pour donner aux Commençans plus de facilité de se servir de cette méthode, voici encore quelques exemples sur le même sujet.

Pour sçavoir combien il y a de solives dans une piece de bois, qui a 3 toises 4 pieds 8 pouces de longueur sur 8 à 14 pouces d'équarrissage, je pose 8 pouces au rang des toises, & l'autre dimension, qui vaut 1 pied 2 pouces, au rang qu'elle doit occuper, & je dis: la sixieme partie de 8 est 1, il reste 2, qui valent 12, dont la sixieme partie est 2; & comme il y a encore 2 pouces, qui font la sixieme partie d'un pied, je prends pour 2 pouces la sixieme partie du produit d'un pied pour avoir 1 pied 4 pouces, & le produit total est une toise 3 pieds 4 pouces, que je multiplie par la longueur, c'est-à-dire par 3 toises 4 pieds 8 pouces, & le produit donne 5 solives 5 pieds 3 pouces une ligne 4 points de solive pour la valeur de la piece.

toises.	*pieds.*	*pou.*	*lig.*	*points*
8.	0.	0.	0.	0.
0.	1.	2.	0.	0.
1.	2.	0.	0.	0.
0.	1.	4.	0.	0.
1.	3.	4.	0.	0.
3.	4.	8.	0.	0.
4.	4.	0.	0.	0.
0.	3.	1.	4.	0.
0.	3.	1.	4.	0.
0.	1.	0.	5.	4.
5.	5.	3.	1.	4.

L'on peut remarquer que ce n'est pas une nécessité absolue de commencer par multiplier les deux dimensions de l'équarrissage l'une par l'autre: car si l'on veut, il n'y a qu'à multiplier la longueur par la dimension de l'équarrissage, qui doit être mise au rang des toises: ainsi pour avoir la valeur de la piece de bois précédente, je prends pour premiere dimension la longueur, qui est 3 toises

toises.	*pieds.*	*pou.*	*lig.*	*points.*
3.	4.	8.	0.	0.
8.	0.	0.	0.	0.
30.	1.	4.	0.	0.
0.	1.	2.	0.	0.
5.	0.	2.	8.	0.
0.	5.	0.	5.	4.
5.	5.	3.	1.	4.

4 pieds 8 pouces; & ſuppoſant que 8 pouces de l'équarriſſage valent 8 toiſes, je les poſe pour ſeconde dimenſion, & la multiplication étant faite, il vient 30 toiſes 1 pied 4 pouces, qui étant multipliés par 1 pied 2 pouces, donnent encore 5 ſolives 5 pieds 3 pouces une ligne 4 points de ſolive.

Pour calculer la valeur d'une piece de bois, qui a 3 toiſes 4 pieds de longueur ſur 10 à 9 pouces 6 lignes d'équarriſſage, je prends la plus ſimple de deux dimenſions de l'équarriſſage, c'eſt-à-dire celle qui eſt compoſée des pouces ſeulement, pour la mettre au rang des toiſes : ainſi ayant pris 10 pour la premiere dimenſion, je la multiplie par la longueur de la piece, ou par l'autre dimenſion de l'équarriſſage : car il eſt indifférent de multiplier d'abord par l'une ou l'autre de ces quantités, comme on l'a déja dit :

toiſes.	pieds.	pou.	lig.	points.
10.	0.	0.	0.	0.
3.	4.	0.	0.	0.
30.				
5.	0.	0.	0.	0.
1.	4.	0.	0.	0.
36.	4.	0.	0.	0.
0.	0.	9.	6.	0.
6.	0.	8.	0.	
5.	0.	4.	0.	
1.	3.	2.	0.	
	1.	6.	4.	
4.	5.	0.	4.	

ainſi je multiplie 10 par 3 toiſes 4 pieds pour avoir le produit, qui eſt 36 toiſes 4 pieds, que je multiplie enſuite par 9 pouces 6 lignes, & il vient 4 ſolives 5 pieds 4 lignes de ſolives pour la valeur de la piece de bois.

782. S'il arrive que dans les deux dimenſions de l'équarriſſage il ſe trouve des pouces & des lignes, il faut pour la dimenſion qu'on doit changer de valeur, mettre les pouces au rang des toiſes, comme à l'ordinaire, & regarder les lignes de cette dimenſion comme des pieds : ainſi on les mettra au rang des pieds, avec cette attention, qu'au lieu de mettre autant de pieds qu'il y a de lignes, il n'en faut mettre que la moitié, c'eſt-à-dire que ſi cette dimenſion eſt compoſée de 6 pouces 8 lignes, l'on mettra 6 pouces au rang des toiſes, & la moitié des lignes au rang des pieds, pour avoir 6 toiſes 4 pieds; & ſi au lieu de 8 on en avoit 7 ou 9, ou tout autre nombre impair, on en prendra toujours la moitié, & l'on marquera 3 pieds 6 pouces, ou bien 4 pieds 6 pouces. L'on va voir ceci dans les deux exemples ſuivans.

Pour toiſer une piece de bois qui a 6 toiſes 3 pieds de longueur ſur 9 pouces 6 lignes à 10 pouces 8 lignes d'équarriſſage, il faut, pour changer une des deux dimenſions de l'équarriſſage,

qui sera, par exemple, 9 pouces 6 lignes, mettre 9 pouces au rang des toises, & la moitié de 6 lignes au rang des pieds, pour avoir 9 toises trois pieds, qu'il faut multiplier par l'autre dimension, c'est-à-dire par 10 pouces 8 lignes, pour avoir une toise 2 pieds 5 pouces 4 lignes au produit, qui étant multiplié par la longueur de la piece, l'on verra qu'elle contient 9 solives 10 pouces 8 lignes.

EXEMPLE I.

toif.	*pieds.*	*pou.*	*lig.*	*points.*
9.	3.	0.	0.	0.
0.	0.	10.	8.	0.
1.	3.	6.	0.	0.
0.	4.	9.	0.	0.
0.	3.	2.	0.	0.
0.	0.	6.	4.	0.
1.	2.	5.	4.	0.
6.	3.	0.	0.	0.
8.	2.	8.	0.	0.
0.	4.	2.	8.	0.
9.	0.	10.	8.	0.

EXEMPLE II.

toif.	*pieds.*	*pou.*	*lig.*	*points.*
8.	3.	6.	0.	0.
0.	0.	9.	6.	0.
1.	2.	7.	0.	0.
0.	4.	3.	6.	0.
0.	2.	1.	9.	0.
0.	0.	4.	3.	6.
1.	0.	9.	6.	6.
0.	5.	8.	0.	0.
0.	3.	4.	9.	3.
0.	2.	2.	2.	2.
0.	0.	9.	0.	8. $\frac{2}{3}$
1.	0.	5.	0.	1. $\frac{2}{3}$

Pour trouver la valeur d'une piece de bois, qui a 5 pieds 8 pouces de longueur sur 8 pouces 7 lignes à 9 pouces 4 lignes d'équarrissage, je porte 8 pouces à l'endroit des toises; & considérant les 7 lignes de cette dimension comme valant des pieds, je marque 3 pieds 6 pouces; ensuite je multiplie cette dimension ainsi changée par 9 pouces 6 lignes, & le produit donne une toise 9 pouces 6 lignes 6 points, qui étant multipliés par 5 pieds 8 pouces, il vient une solive 5 pouces 1 point $\frac{2}{3}$ pour la valeur de la piece.

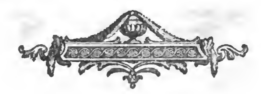
783. Pour rendre raison de ce que nous avons dit qu'il falloit regarder les lignes comme des pieds, après en avoir pris la moitié, considérez que nous avons dit qu'il falloit multiplier une des dimensions par 72, pour que la suite de la Regle donnât des solives : pour cela, si la dimension est 8 pouces 7 lignes, nous sçavons que mettant 8 pouces à l'endroit des toises, la multiplication par 72 se fait tout d'un coup ; mais à l'égard de ces lignes qui restent, remarquez que si on les mettoit au rang des pouces, c'est comme si on les multiplioit par 12 ; & que si du rang des pouces on les porte au rang des pieds,

c'est comme si on les multiplioit encore par 12 : ainsi quand on pose des lignes au rang des pieds, c'est proprement les multiplier par 144 ; mais comme, selon notre regle, elles ne doivent être multipliées que par 72, qui est la moitié de 144, il faut donc, si l'on porte les lignes au rang des pieds, n'en prendre que la moitié, pour n'avoir que la moitié de 144.

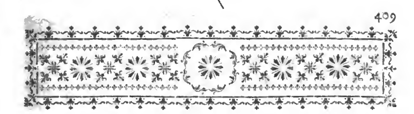
Pour trouver la quantité de solives & de ses parties contenues dans un pilot non équarri, dont le diametre seroit, par exemple, de 14 pouces, pris à la tête ou dans le milieu, selon qu'on le jugera plus à propos, & dont la longueur seroit de 27 pieds 6 pouces, il faut quarrer le diametre pour avoir 196 ; & comme le rapport au quarré du diametre d'un cercle est à la superficie du même cercle, à peu de chose près, comme 14 est à 11, l'on dira comme 14 est à 11 ; ainsi 196, quarré du diametre du pilot est à la superficie de son cercle, qu'on trouvera de 154 pouces quarrés, qu'il faut diviser par 72, pour avoir des bases de solives ; l'on trouvera 2 au quotient qu'il faut poser au rang des solives : comme il reste 10 pouces, qui ne suffisent pas pour faire un pied, on mettra zero au rang des pieds, & & les 10 pouces immédiatement après, pour avoir 2 solives 0 pieds 10 pouces, qu'il faut ensuite multiplier par la longueur du pilot, c'est-à-dire par 4 toises 3 pieds 6 pouces, comme au calcul ordinaire du toisé, & l'on trouvera 9 solives 4 pieds 9 pouces 10 lignes pour la valeur du pilot.

Si l'on avoit plusieurs pilots de même grosseur, il faudroit trouver, comme l'on vient de faire, la superficie de leurs cercles communs, la diviser de même par 72, afin d'avoir des bases de solives, & multiplier ce qui viendra par la somme de toutes les longueurs différentes.

Fin du onzieme Livre.



NOUVEAU



NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE DOUZIEME,

Où l'on applique la Géométrie à la mesure des Superficies & des Solides.

CHAPITRE PREMIER.

De la mesure des superficies.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

784. *MEsurer les figures triangulaires.* Pl. XVI.

Si l'on a un triangle rectangle ABC, dont la base BC soit *Figure 216.* de 8 pieds, & la hauteur AB de 5, il faut, pour en trouver la superficie, multiplier la moitié de la base par toute la perpendiculaire, ou la moitié de la perpendiculaire par toute la base, & l'on aura 20 pieds quarrés pour la valeur du triangle (art. 388).

785. Si le triangle n'étoit pas rectangle, comme DEF, il faudroit, en connoissant les trois côtés, chercher la valeur de la perpendiculaire EG (art. 413), & multiplier encore la moitié de la base par toute la perpendiculaire, ou toute la perpendiculaire par la moitié de la base.

Figure 217. 786. Mais comme il peut arriver que la perpendiculaire au lieu de tomber dans le triangle tombe en dehors, comme H L, en ce cas il en faut chercher la valeur (art. 411), & la multiplier par la moitié de la base I K.

787. Enfin si l'on avoit seulement les trois côtés d'un triangle, l'on pourra également avoir sa superficie, en suivant ce qui est enseigné dans l'art. 530, c'est-à-dire que supposant le côté D E de 10 pieds, le côté E F de 11, & le côté D F de 13, il faut les ajouter ensemble pour avoir 34 pieds, dont on prendra la moitié, qui est 17; ensuite la différence des mêmes côtés avec cette moitié, qui font 7, 6 & 4: après quoi l'on multipliera de suite les quatre termes, 17, 7, 6 & 4 l'un par l'autre, j'entends 17 par 7, qui donneront 119; ensuite ce produit par six pour avoir 714, & ce dernier par 4, qui donne 2856, dont il faut extraire la racine qu'on trouvera de 52 pieds 5 pouces & 3 lignes de pied quarré pour la superficie du triangle D E F.

PROPOSITION II.

Probleme.

Figure 218. 788. *Trouver la superficie des figures quadrilateres.*

Pour trouver la superficie du quarré A C, dont le côté seroit, par exemple, de 7 pieds, il faut multiplier 7 par lui-même, c'est-à-dire A B par B C, & le produit sera 49 pieds, qui est la valeur du quarré A C.

Figure 219. 789. Si au lieu d'un quarré l'on a un rectangle D F, dont la base D E est supposée de 5 pieds, & la hauteur E F de 12, l'on multipliera 5 par 12 pour avoir au produit 60 pieds, qui seront la valeur du rectangle.

790. Mais si au lieu d'un rectangle D F l'on avoit un parallélogramme G K, dont on voulut avoir la superficie, il faudroit prolonger la base G L, & abaisser la perpendiculaire K I, qui sera la hauteur du parallélogramme (art. 383); & supposant que cette perpendiculaire soit de 10 pieds, & la base G L de 4, l'on multipliera 10 par 4, & le produit sera 40 pieds pour la valeur du parallélogramme.

Figure 221. 791. Si la figure est trapezoïde, comme A B C D, & que le côté B A soit perpendiculaire sur les deux côtés paralleles B C & A D, il faut joindre ces deux côtés ensemble pour

avoir la base A E du triangle A B E, qui sera égal au trapezoïde. Ainsi supposant que le côté B C soit de 4 pieds, le côté A D de 10, la hauteur B A de 12, la base A E, ou autrement la somme des deux côtés sera de 14, qu'il faut multiplier par 6, moitié de la perpendiculaire, l'on aura 48 au produit pour la superficie du triangle A B E, qui est la même que celle du trapezoïde, parce que les triangles B C F & F D E sont égaux.

792. Si l'on veut encore d'une autre façon trouver la superficie du trapezoïde, il n'y a qu'à chercher une moyenne arithmétique (art. 232) G F entre B C & A D, c'est-à-dire entre 4 & 10, l'on trouvera qu'elle est 7; & si l'on multiplie cette moyenne par toute la hauteur B A, qui est 12, l'on aura 84 pour la superficie; ce qui est évident, puisque le rectangle A B H I est égal au trapezoïde A B C D, à cause que le triangle C H F est le même que F I D.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

793. *Mesurer la superficie des polygones réguliers & irréguliers.* *Figure 222.*

Si l'on veut sçavoir la superficie d'un polygone régulier, il faut du centre E abaisser une perpendiculaire E B sur un des côtés C D, & tirer les rayons E C & E D, qui donneront le triangle isoscele E C D. Or comme on connoîtra les angles de la base de ce triangle, puisque le polygone est régulier, & que d'ailleurs on connoît le côté C D, on aura le triangle rectangle E B D, duquel il sera facile de connoître le côté E B (art. 713): & supposant qu'on l'a trouvé de 6 pieds, on ajoutera ensemble tous les côtés du polygone, dont la somme sera, par exemple, 48, qu'il faudra multiplier par 3, moitié de la perpendiculaire, pour avoir 144 pieds, qui sera la valeur du polygone.

794. Si le polygone est irrégulier, comme A B C D E F, *Figure 223.* l'on tirera du point E les lignes E C, E B, E A, qui diviseront le polygone en quatre triangles, dont le premier aura pour hauteur la perpendiculaire F G, le second, la perpendiculaire A H; le troisieme, la perpendiculaire C I; & le quatrieme, la perpendiculaire D K. Cela posé, si l'on mesure sur le terrein avec la toise, ou sur le papier avec une échelle, la valeur des perpendiculaires, aussi-bien que celles des lignes sur

lesquelles ces perpendiculaires tombent, l'on n'aura qu'à faire autant de multiplications qu'il y a de triangles; & ajoutant tous les produits ensemble, l'on aura la valeur du polygone.

PROPOSITION IV.

Probleme.

Figure 224. 795. *Mesurer la superficie des cercles & de leurs parties.*

Pour mesurer la superficie d'un cercle AB, il faut connoître la valeur de son diametre & de sa circonférence, comme on l'a dit (art. 484), & multiplier la moitié de la circonférence par la moitié du diametre, & le produit donnera la valeur du cercle. Par exemple, pour trouver la superficie d'un cercle, dont le diametre est 14, je cherche sa circonférence, qui sera 44; & prenant la moitié de 44, qui est 22, & la moitié de 14, qui est 7, je multiplie ces deux nombres l'un par l'autre pour avoir 154, qui sera la superficie du cercle.

L'on peut aussi se servir du rapport de 14 à 11, qui exprime celui du quarré du diametre d'un cercle à la superficie du même cercle, selon l'art. 490. Ainsi supposant que le diametre soit de 15 pieds, je quarre ce diametre pour avoir 225; ensuite je dis: comme 14 est à 11, ainsi 225, quarré du diametre, est à la superficie du cercle que l'on trouvera de 176 $\frac{11}{14}$.

Figure 225. 796. Si l'on veut sçavoir la superficie d'un secteur de cercle, il faut connoître l'angle formé par les deux rayons, & la valeur du rayon. Ainsi supposant que l'angle du secteur ABC est de 60 degrés, & le rayon de 7 pieds, je commence par trouver la valeur du cercle d'où est provenu le secteur, laquelle se trouve de 154, & puis je fais une Regle de Trois, en disant: Si 360, valeur de toute la circonférence, m'a donné 154 pour la superficie qu'elle renferme, combien me donneront 60, valeur de la circonférence du secteur, pour la superficie qu'elle renferme, l'on trouvera 25 pieds 8 pouces.

Figure 226. 797. Enfin pour trouver la valeur d'un segment de cercle, tel que DGF, il faudra commencer par en faire un secteur, dont on cherchera la superficie, que je suppose encore être 25 pieds 8 pouces. Cela posé, on cherchera la superficie du triangle DEF, que l'on trouvera à peu près de 21 pieds; & soustrayant cette quantité de 25 pieds 8 pouces, le reste sera la valeur du segment qui sera environ de 4 pieds 8 pouces.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

798. *Mesurer la superficie d'une Ellipse.*

Nous avons vu (art. 240) que les élémens FH & EI d'un quart de cercle étoient en même raison avec les élémens FG & ED d'un quart d'ellipse; par conséquent il y aura donc même raison de la somme de tous les antécédens à la somme de tous les conséquens, que d'un antécédent à son conséquent (art. 633), c'est-à-dire que le quart de cercle EAI est au quart d'ellipse EAD, comme la ligne EI est à la ligne ED, ou bien comme la ligne AB est à la ligne CD: & si au lieu du quart de cercle, & du quart d'ellipse, l'on prend tout le cercle & toute l'ellipse; il y aura encore même raison du cercle à l'ellipse, que de la ligne AB à la ligne CD; ce qui fait voir que la superficie d'un cercle qui auroit pour diametre le grand axe d'une ellipse, est à la superficie de l'ellipse, comme le grand axe est au petit. Or supposant que le grand axe AB soit de 14 pieds, & le petit CD de 8, il faut pour trouver la superficie de l'ellipse, chercher d'abord celle du cercle de son grand axe, que l'on trouvera de 154, & puis dire: Si le grand axe de 14 m'a donné 8 pouces pour le petit, que me donneront 154, superficie du cercle pour celle de l'ellipse, que l'on trouvera de 88 pieds. *Figure* 227.

Les superficies des cercles étant dans la raison des quarrés de leurs diametres, l'on peut dire que celles des ellipses sont dans la raison composée de leurs axes, que par conséquent l'on peut prendre à la place de leurs diametres les rectangles compris sous les mêmes axes; & comme il n'y a point de quarré qui ne puisse être produit par les dimensions d'un rectangle qui lui seroit égal, l'on peut trouver la superficie de l'ellipse précédente, en multipliant ces deux axes 14 & 8 l'un par l'autre pour avoir 112, qui tiendra lieu du quarré de son diametre, ensuite dire, comme 14 est à 11, ainsi 112 est à la superficie de l'ellipse, que l'on trouvera encore de 88 pieds.

PROPOSITION VI.

Probleme.

Figure 228. 799. *Mesurer l'espace renfermé par une parabole.*

Si l'on a une parabole ABC, dont l'axe BD soit de 9 pieds, & la plus grande ordonnée DA de 12, toute la ligne AC sera de 24. Cela étant, je dis que pour trouver l'espace renfermé par la parabole ABC, il faut multiplier la ligne AC par les deux tiers de l'axe BD, c'est-à-dire 24 par 6, pour avoir 144 au produit, qui sera l'espace que l'on demande.

La raison de cette opération est que l'espace ABC est les deux tiers du rectangle AEFC ; pour le prouver nous ferons voir que l'espace AEBK est le tiers du rectangle AEBD.

Ayant divisé la ligne EB en un nombre de parties égales, & tiré par tous les points de division des lignes telles que GH & IK, paralleles à AE, l'on verra (art. 605) que par la propriété de la parabole, le quarré BG est au quarré BI, comme GH est à IK ; mais les parties de suite de la ligne EB étant en progression arithmétique, les quarrés des lignes BG & BI seront ceux des termes d'une progression arithmétique ; par conséquent les élémens GH & IK sont en même raison que les quarrés des termes d'une progression arithmétique : ainsi l'espace AEBK contient une quantité infinie d'élémens, qui sont tous dans la même raison que les quarrés des termes infinis d'une progression arithmétique : mais comme pour trouver la valeur de tous ces quarrés, il faut (art. 551) multiplier le plus grand quarré par le tiers de la grandeur qui exprime la quantité des termes ; il faut donc pour trouver la valeur de tous les élémens qui composent l'espace AEBK, multiplier le plus grand élément EA par le tiers de la ligne EB, qui en exprime la quantité : ce qui fait voir que cet espace est le tiers du rectangle AEBD, & que par conséquent l'espace AKBD de la parabole en est les deux tiers.

Remarque.

Il est absolument nécessaire pour ceux qui veulent s'attacher au Génie, de sçavoir bien mesurer les figures planes, parce qu'elles se rencontrent continuellement dans le toisé des fortifications & des bâtimens civils ; car les couvertures de

tuiles & d'ardoises, les planchers, les pavés, le blanchissage des murs recrepis, les vitres, le gazon avec lequel on revêtit les ouvrages de terrasse, se mesurent à la toise quarrée, & toutes les figures que toutes ces choses peuvent former, se réduisent toujours à des rectangles ou à des triangles.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

800. *Mesurer les surfaces des Prismes & des Cylindres.* *Figure 229.*

Pour mesurer la surface d'un prisme AE, il faut multiplier la somme des côtés du polygone, qui lui sert de base par la hauteur du prisme : ainsi si le prisme a pour base un exagone, dont chaque côté BC soit de 4 pieds, & la hauteur BE de 6, la somme des côtés sera 24, qui étant multiplié par 6, le produit sera 144 pieds pour la valeur de la surface.

801. Pour mesurer la surface d'un cylindre, tel que BC, *Figure 230.* dont le diametre AC est de 14 pieds, & la hauteur AB de 8, il faut commencer par chercher la circonférence du cercle qui lui sert de base, qu'on trouvera de 44 pieds. Après cela, il faut multiplier cette circonférence par 8, hauteur du cylindre, & l'on trouvera 352 pieds pour la surface du cylindre.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

802. *Mesurer les surfaces des Pyramides & des Cônes.* *Figure 231.*

Pour mesurer la surface d'une pyramide droite, qui a pour base un exagone, dont chaque côté, tel que AB, est supposé de 6 pieds, & la perpendiculaire tirée du sommet sur un de ses côtés de 10 pieds, il faut multiplier la somme de la moitié de tous ces côtés par toute la perpendiculaire (art. 545), c'est-à-dire 18 par 10 : l'on trouvera 180 pour la surface de la pyramide.

803. Pour trouver la surface d'un cône droit, dont le diametre AB du cercle de sa base est de 14 pieds, & le côté AD de 12, il faut multiplier la circonférence du cercle, que l'on trouvera de 44, par la moitié du côté AD (art. 547), c'est-à-dire par 6, & l'on verra que la surface du cône est de 264; *Figure 232.*

ou bien multiplier la moitié de la circonférence par tout le côté A D, & l'on aura encore la même chose.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

Figure 233. 804. *Mesurer les surfaces des Spheres, celles de leurs Segmens, & celles de leurs Zones.*

Pour mesurer la surface d'une sphere, dont le diametre HG est supposé de 14 pieds, il faut commencer par chercher la circonférence de ce diametre, que l'on trouvera de 44; & il faut la multiplier par le diametre, c'est-à-dire par 14, & le produit donnera la valeur de la surface de la sphere (art. 575) que l'on trouvera de 616.

805. Si au lieu de la surface de toute une sphere, on vouloit mesurer seulement celle d'un segment, tel que ABC, il faudroit chercher d'abord la circonférence du grand cercle de la sphere d'où le segment a été tiré; & de plus connoître exactement la perpendiculaire CD élevée sur le centre du cercle AB, & puis multiplier la circonférence du grand cercle par la valeur de cette perpendiculaire (582): ainsi supposant que la circonférence du cercle soit 44, & la perpendiculaire CD de 4, multipliant l'un par l'autre, on aura 176 pieds pour la valeur de la surface du segment.

806. Enfin pour mesurer la surface d'une zone, telle que EHFG, il faut connoître aussi la circonférence du grand cercle de la sphere d'où elle a été tirée, & la valeur de la perpendiculaire IK, tirée d'un centre à l'autre des deux cercles opposés, & multiplier cette perpendiculaire par la circonférence du grand cercle (art. 582), dont nous venons de parler. Ainsi supposant qu'elle soit encore de 44 pieds, & la perpendiculaire IK de 5, multipliant l'un par l'autre, l'on trouvera 220 pieds pour la valeur de la surface de la zone.

REMARQUE.

La plûpart de ceux qui étudient la Géométrie sçavent bien que cette science est fort utile, & qu'en général toutes les propositions qu'elle renferme ont leur usage; cependant comme ils n'en connoissent point l'application, faute de s'être trouvés dans le cas de s'en servir, ils en viennent toujours à demander

à quoi

à quoi tels & tels problêmes peuvent servir: c'est pourquoi ayant dessein de leur ôter cette inquiétude, je tâcherai, autant qu'il me sera possible, de leur faire voir l'application des moindres choses: & pour dire un mot des propositions précédentes, ils feront attention que les cloches étant toujours des pyramides ou des cônes, que les dômes étant ordinairement des figures sphériques, & les tours des châteaux étant couvertes par des toits faits en cône ou en pyramide, il faut, pour en toiser la couverture, sçavoir mesurer ces différentes surfaces.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

807. *Mesurer la solidité des Cubes, des Parallelepipedes, des Prismes & des cylindres.* *Figure 234.*

Pour mesurer la solidité d'un cube AD, dont le côté AB seroit, par exemple, de 6 pieds, il faut quarrer 6 pour avoir la superficie de la base, qui sera 36; & multipliant cette base par la hauteur du cube, c'est-à-dire par 6 pieds, l'on aura 216 pieds pour la valeur du cube.

808. L'on trouvera de même la valeur d'un parallelepipede, *Figure 235.* en multipliant la superficie de sa base par la hauteur. Ainsi voulant mesurer le parallelepipede EH, supposant que sa base ait 10 pieds de long sur 4 pieds de large, & que sa hauteur HF soit de 5 pieds, il faut multiplier 4 par 10 pour avoir 40, qui sera la superficie de la base, qui étant multipliée par la hauteur 5, donnera 200 pieds cubes pour le parallelepipede.

809. Pour mesurer la solidité d'un prisme CE, dont la base *Figure 229.* est un exagone, il faut d'abord connoître la superficie de l'exagone, que l'on trouvera en multipliant la somme de ses côtés par la moitié de la perpendiculaire AD: ainsi ce côté BC étant de 4 pieds, la perpendiculaire de $3\frac{1}{2}$, la somme des côtés sera 24, qui étant multipliée par $1\frac{3}{4}$, on aura 42 pieds quarrés pour la valeur de la base, qu'il faut ensuite multiplier par la hauteur BE, que je suppose de 6 pieds: la multiplication étant faite, l'on trouvera 252 pieds cubes pour la valeur du prisme.

810. Pour mesurer la solidité d'un cylindre CB, dont le *Figure 230.* diametre BD du cercle de la base est de 14 pieds, & la hauteur AB de 8 pieds, il faut commencer par avoir la valeur du cercle qui sert de base au cylindre: pour cela, il faut chercher la cir-

conférence, que l'on trouvera de 44, dont la moitié étant multipliée par le rayon du même cercle, donnera 154 pieds quarrés pour la valeur de la base du cylindre : il faut ensuite la multiplier par 8 pour avoir 1232 pieds cubes pour la solidité du cylindre.

Comme la solidité des cubes, des parallelepipedes, des prismes & des cylindres, est composée d'une infinité de plans semblables à celui qui sert de base à chacun de ces corps, & que leur hauteur exprime la quantité de plans dont ils sont composés ; il s'ensuit que pour trouver la solidité d'un corps tel que les précédens, il faut multiplier sa base par toute sa hauteur.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

Figure 231. 811. *Mesurer la solidité des Pyramides & des Cônes.*

Pour mesurer la solidité d'une pyramide qui a pour base un exagone, il faut commencer par connoître la superficie de la base. Ainsi supposant que le côté AB soit de 6 pieds, & la perpendiculaire CE de $6\frac{3}{4}$, l'on trouvera 121 pieds $\frac{1}{2}$ quarrés pour la superficie de la base, qu'il faut multiplier par le tiers de l'axe DC de la pyramide. Comme cet axe est supposé de 10 pieds, il faudra multiplier $121\frac{1}{2}$ par $3\frac{1}{3}$, & le produit sera 405 pieds cubes pour la solidité de la pyramide.

Figure 232. 812. Pour trouver la solidité d'un cône, l'on agira comme on vient de faire pour trouver celle de la pyramide : on commencera par connoître la superficie du cercle, qui sert de base au cône, il faudra la multiplier par le tiers de l'axe du cône. Ainsi voulant mesurer la solidité d'un cône ADB, dont le diametre de son cercle est de 14 pieds, & la valeur de son axe de $9\frac{1}{2}$, l'on trouvera que la superficie de la base est de 154 pieds quarrés, qui étant multipliés par $3\frac{1}{6}$, qui est le tiers de l'axe, l'on trouvera 456 pieds cubes pour la solidité du cône.

Si nous avons multiplié la base de la pyramide, aussi-bien que celle du cône, par le tiers de la hauteur de l'un & de l'autre, c'est que nous avons vu (art. 551) que la pyramide étoit le tiers du prisme de même base & de même hauteur, comme le cône étoit aussi le tiers du cylindre de même base & de même hauteur.

813. Si les parallelepipedes, les prismes, les cylindres, les pyramides, les cônes que l'on veut mesurer étoient inclinés, il faudroit tirer une perpendiculaire de leur sommet sur leurs bases prolongées; ensuite connoître la valeur de cette perpendiculaire, & la regarder comme celle de la hauteur du solide, qui sera incliné; & si cela arrive à l'égard d'un parallelepipéde, d'un prisme, ou d'un cylindre, on multipliera toute la perpendiculaire par la base du solide auquel elle correspond: & si cela arrive à l'égard des pyramides, des cônes, on multipliera la base de l'un ou l'autre de ces solides par le tiers de la perpendiculaire.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

814. *Mesurer la solidité des Pyramides & des cônes tronqués.* *Figure* 236.

Si l'on a une pyramide DB, dont les plans opposés DF & AB soient des quarrés, pour en sçavoir la solidité, nous supposerons que le côté DE est de 9 pieds, le côté AC de 4, & l'axe GH de 12. Cela posé, il faut chercher la valeur des plans AB & DF, qui seront de 16 & de 81 pieds, entre lesquels il faut chercher une moyenne proportionnelle, qui sera 36 pour le plan moyen, qu'il faut ajouter avec les deux autres, pour avoir 133, qui sera la somme des trois plans, qu'il faut multiplier par le tiers de l'axe, c'est-à-dire par 4 pour avoir 532 pieds pour la solidité de la pyramide tronquée (art. 561).

Si l'on avoit un cône tronqué, l'on en trouveroit de même la valeur, en cherchant un cercle moyen entre les deux opposés, & en multipliant la somme de la valeur des trois cercles par le tiers de l'axe, pour avoir un produit, qui sera ce que l'on demande.

815. Voici encore une autre maniere de trouver la valeur d'une pyramide ou d'un cône tronqué, qui est plus d'usage que la précédente: par exemple, pour connoître la solidité du cône tronqué ADEB, dont l'axe GC est de 15 pieds, le diametre DE de 7, & le diametre AB de 21: j'abaisse la perpendiculaire DH, & j'acheve le cône pour avoir l'axe entier CF, dont je cherche la valeur comme il suit. *Figure* 237.

Le rayon DG étant de 3 pieds $\frac{1}{2}$, & le rayon AC de 10 $\frac{1}{2}$, la ligne AH sera la différence de DG à AC: par conséquent

m'a donné 425 pieds pour la valeur du cylindre, que me donneront 50 degrés pour la valeur du secteur, l'on trouvera qu'il est de 59 pieds & quelque chose.

818. Pour mesurer un secteur GHKLMN d'un cône tronqué, il faut, comme ci-devant, connoître l'angle HKL du secteur, & la valeur du cône tronqué : ainsi supposant que l'angle est de 60 degrés, & que le cône tronqué est de 600 pieds, l'on dira encore : Si 360 m'ont donné 600 pour la valeur du cône tronqué, que me donneront 60 pour la valeur du secteur, que l'on trouvera de 100 pieds. *Figure 239.*

819. Mais si l'on avoit un cône tronqué ABCD, dans le milieu duquel il y auroit un vuide cylindrique GEFH, & qu'on voulût sçavoir la valeur du fragment LNPQOMSR formé par des parties de couronnes, il faudroit commencer par trouver la solidité de tout le cône tronqué ABCD, comme s'il n'y avoit point de vuide pour avoir la valeur du secteur LNKOMI, tant plein que vuide, de la façon qu'on vient de le pratiquer ; ensuite en retrancher le secteur du cylindre RPKQSI, & la différence sera la solidité du fragment LNPQOMSR que l'on demande. *Figure 240.*

820. Si au contraire on avoit un cylindre ABCD, dans le milieu duquel il y eût un vuide en forme de cône tronqué EFGH, & qu'on voulût sçavoir la valeur de la solidité du fragment QONPRLMS terminé par des plans qui soient dans les rayons IN & IL, il faudra chercher la valeur du secteur cylindrique KONILM, & celle du secteur KQPIRS du cône tronqué pour le retrancher de celle du secteur du cylindre, & la différence sera la valeur du fragment QONPRLMS que l'on demande. *Figure 241.*

Il faut, pour se rendre familier ce que l'on vient de voir, donner des dimensions aux lignes qui composent ces figures, en faire le calcul, & bien entendre les raisons de chaque opération : car, comme je l'ai déja dit, nous serons obligés d'avoir recours à lui pour donner la solution de quelques-uns des problêmes les plus difficiles du toisé de fortification.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

Pl. XVII. 821. *Mesurer la solidité d'une Sphere.*

Figure 242. Pour avoir la solidité d'une sphere, dont le diametre AB est de 14 pieds, il faut chercher la circonférence de ce diametre, qui sera 44, & la multiplier par le diametre même pour avoir la surface de la sphere (art. 576), qui sera de 616 pieds, qu'il faut multiplier par le tiers du rayon (art. 575), c'est-à-dire par le tiers de 7, pour avoir 1437 $\frac{1}{2}$ pieds cubes pour la solidité de la sphere.

L'on trouvera encore la solidité de la sphere d'une autre maniere, en multipliant la superficie de son grand cercle par les deux tiers du diametre (art. 568).

L'on peut encore trouver la solidité des spheres par une seule Regle de Trois, ayant seulement les cubes de leurs axes, avec la même facilité que l'on trouve la superficie des cercles à l'aide du quarré de leur diametre ; car il y a même raison du cube de l'axe d'une sphere à la solidité de la même sphere, que de son diametre à la sixieme partie de la circonférence du même diametre. Pour en être convaincus, nous nommerons a le diametre où l'axe de cette sphere, & b sa circonférence ; la superficie de son grand cercle sera par conséquent $\frac{ab}{4}$, qui étant multiplié par les deux tiers du diametre, c'est-à-dire par $\frac{2a}{3}$ donne $\frac{2aab}{12} = \frac{aab}{6}$ pour la solidité de la sphere : ainsi l'on aura $aaa : \frac{aab}{6} :: a : \frac{b}{6}$: & supposant une sphere de 21 pieds de diametre, dont la circonférence est de 66 pieds, en prenant la sixieme partie, qui est 11, on n'aura plus qu'à dire, comme 21 est à 11 : ainsi le cube de 14, qui est 2744 est à la solidité de la sphere que l'on trouvera encore de 1437 pieds & $\frac{1}{7}$.

Figure 243. 822. Pour mesurer un secteur de sphere, tel que ABCD, il faut connoître le rayon & la perpendiculaire DE, élevée sur le milieu de la corde AC. Or si nous supposons le rayon de 7 pieds, & la perpendiculaire de 3, il faut chercher, par le moyen du rayon, la circonférence du grand cercle de la sphere, d'où le secteur a été tiré, & on la trouvera de 44 pieds : il

faut ensuite multiplier cette circonférence par la perpendiculaire DE, c'est-à-dire 44 par 3; & le produit 132 sera la surface ADC du secteur (art. 805), qu'il faudra multiplier par le tiers du rayon BC, c'est-à-dire par $2\frac{1}{3}$, pour avoir 308 pieds cubes, qui est la solidité du secteur.

823. Si au lieu d'un secteur l'on avoit un segment de sphere *Figure* 244. DGF, il faudroit, pour en trouver la solidité, le réduire en secteur, & chercher la solidité de ce secteur, de laquelle il faudroit retrancher le cône DEF, & le restant seroit la valeur du segment.

824. Mais si la partie de la sphere que l'on veut mesurer *Figure* 245. étoit une zone comprise par le grand cercle de la sphere, & par un autre quelconque, qui lui seroit parallelement opposé, comme est la zone AFHE, on en trouveroit la solidité en prenant les deux tiers du cylindre qui auroit pour base le grand cercle AE, & pour hauteur la partie de l'axe GC; & de plus le tiers du cylindre qui auroit pour base le petit cercle FH, & pour hauteur la même ligne GC (art. 578). Or pour en faire l'opération, nous supposerons le rayon CE de 14 pieds, & la perpendiculaire CG de 8; & comme nous avons le triangle rectangle CHK, dont l'hypoténuse CH est de 14 pieds, & le côté HK de 8, l'on trouvera par la racine quarrée le côté CK de 11 pieds: ainsi l'on aura le rayon du cercle FH; & par conséquent l'on trouvera la solidité du cylindre IH, qui est de 3036 pieds cubes, & la solidité du grand cylindre AD se trouvera de 4928 pieds cubes. Or si l'on prend les deux tiers du plus grand cylindre, l'on aura $3285\frac{1}{3}$, qui étant ajouté avec 1012, qui est le tiers du petit cylindre, nous donnera $4297\frac{1}{3}$ pieds cubes pour la solidité de la zone.

REMARQUE.

825. La génération de la plûpart des solides ayant été formée par la circonvolution d'un plan sur son axe, l'on peut avoir autant de solides différens, que l'on peut avoir de plans générateurs différens: mais pour ne parler que de ceux qui sont formés par le plan des courbes des sections coniques, l'on sçaura que si une demi-parabole ACB fait une circonvolution autour de son axe AB, elle décrira un corps HIK, que l'on nomme *parabolique*, qui est composé d'une infinité *Figure* 246. & 247.

de cercles qui auront tous pour rayons les ordonnées, telles que DE & FG, que l'on regarde ici comme les élémens du plan ABC de la parabole.

Figure 250. & 251. 826. Si l'on a une demi-ellipse HLI qui fasse une circonvolution autour de son axe HI, toutes les ordonnées, comme OP & RS, que l'on peut regarder comme les élémens du plan de l'ellipse, décriront une infinité de cercles, qui tous ensemble formeront le corps ABCD, que l'on nomme *sphéroïde*, parce qu'ayant pour plan générateur une ellipse, qui est proprement un cercle alongé, le sphéroïde est regardé comme une sphere alongée.

Figure 252. 827. Enfin si l'on fait faire à une demi-hyperbole ABC une circonvolution sur son axe BC, elle décrira un solide, que l'on nomme *hyperboloïde*; & si la demi-hyperbole est accompagnée d'une asymptote EF, & des lignes DB & DG paralleles à AC & BC, le triangle EFC décrira un cône, & le rectangle GDBC un cylindre.

Comme la plûpart de ces solides ont lieu dans bien des occasions, nous en ferons voir l'applicarion, après que noûs aurons donné dans les propositions suivantes la maniere de les mesurer.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

828. *Mesurer la solidité d'un Paraboloïde.*

Figure 246. & 247. Pour avoir la solidité d'un paraboloïde, dont le rayon LK du cercle de la base seroit de 7 pieds, l'axe IL de 10, il faut chercher la valeur du cercle de la base, qui sera de 154 pieds, qu'il faut multiplier par la moitié de l'axe IL, c'est-à-dire par 5 pour avoir 770 au produit, qui sera ce que l'on demande.

Pour sçavoir la raison de cette opération, considérez que l'axe AB de la parabole est composé d'une infinité de parties, comme AE & AG, qui sont en progression arithmétique, & que les quarrés des ordonnées ED & GF étant dans la même raison que les parties AE & EG (art. 605); ces quarrés seront aussi en progression arithmétique. Or comme les cercles sont dans la même raison que les quarrés de leurs rayons (art. 455), il s'ensuit que les cercles qui composent le paraboloïde HIK sont en progression arithmétique, puisqu'ils sont comme

comme les quarrés des ordonnées de la parabole : mais comme pour trouver la valeur des termes infinis d'une progression arithmétique (art. 389), il faut multiplier le plus grand terme de la progression par la moitié de la grandeur qui exprime la quantité de ces termes, il faut donc, pour trouver la valeur de tous les cercles qui composent le paraboloïde, multiplier le plus grand cercle HK par la moitié de l'axe IL.

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

829. *Mesurer la solidité d'un Sphéroïde.* *Figure 250. & 251.*

Pour sçavoir la solidité d'un sphéroïde, dont le grand axe BD est de 18 pieds, & le petit axe AC de 14, il faut chercher la superficie du cercle du petit axe, qui sera de 616 pieds, qu'il faut multiplier par les deux tiers du grand axe BD, c'est-à-dire par 12, pour avoir le produit 7392, qui sera la solidité que l'on demande.

L'on connoîtra la raison de cette opération, si l'on considere que les ordonnées OP & RS de l'ellipse étant dans la même raison que celles du cercle OQ & RT, les quarrés des ordonnées de l'ellipse seront dans la même raison que ceux des ordonnées du cercle (art. 633) : & si à la place des quarrés des ordonnées du cercle, l'on prend les superficies des cercles, dont ces lignes seroient les rayons, l'on verra que tous les cercles des ordonnées de l'ellipse, qui composent ici un sphéroïde, sont dans la même raison que tous les cercles qui composent la sphere. Mais comme l'on trouve la valeur de tous les cercles qui composent la sphere, en multipliant le cercle qui auroit pour rayon la plus grande ordonnée MN par les deux tiers de l'axe HI (art. 569), on trouvera donc aussi la valeur de tous les cercles qui composent le sphéroïde, en multipliant le cercle qui auroit pour rayon la plus grande ordonnée NL de l'ellipse par les deux tiers de l'axe HI.

830. Mais si le plan de l'ellipse, au lieu de faire une circonvolution à l'entour de son grand axe AB, en faisoit une sur son petit axe CD, l'on auroit encore un sphéroïde ACBD, dont on trouvera la solidité, comme ci-devant, en multipliant la superficie du cercle du grand axe AB par les deux tiers du petit axe CD : car si l'on a un cercle ECFD, qui *Figure 248. & 249.*

ait pour diametre le petit axe CD, & que l'on mene les ordonnées GH & KL, l'on aura par la propriété de l'ellipse (art. $CG \times GD : CK \times KD :: \overline{GH}^2 : \overline{KL}^2$; & si à la place des rectangles $CG \times GD$ & $CK \times KD$, l'on prend les quarrés GI^2 & KM^2, qui leur sont égaux par la propriété du cercle, l'on aura $\overline{GI}^2 : \overline{KM}^2 :: \overline{GH}^2 : \overline{KL}^2$. Or si à la place des quarrés de toutes les ordonnées du demi-cercle CFD, l'on prend les cercles dont ces ordonnées sont les rayons, & qu'on fasse la même chose pour la demi-ellipse CBD, l'on verra que tous les cercles de la sphere sont dans la même raison que tous les cercles du sphéroïde, & que la quantité des uns & des autres étant exprimée par la ligne CD, si l'on multiplie le cercle EF par les deux tiers de la ligne CD, pour avoir la valeur de tous les cercles qui composent la sphere, il faudra multiplier le cercle de AB par les deux tiers de la ligne CD, pour avoir la valeur de tous les cercles qui composent le sphéroïde.

831. L'on peut dire aussi que si l'on n'avoit que la moitié d'un sphéroïde ACB, il faudroit de même, pour en trouver la solidité, multiplier le cercle AB par les deux tiers de la ligne CN.

Quoique l'hyperboloïde n'ait guere lieu dans la Géométrie pratique, cela n'empêche pas que je ne dise un mot sur la maniere de mesurer ce solide, pour satisfaire la curiosité de ceux qui n'aiment pas qu'on leur supprime rien.

PROPOSITION XVII.

PROBLEME.

Figure 253. 832. *Mesurer la solidité d'un Hyperboloïde.*

Pour avoir la solidité d'un hyperboloïde DEF, il faut accompagner la courbe DEF de ses asymptotes BA & BC, & de la ligne GH, qui sera égale à un de ses axes. Cela posé, il faut chercher la solidité d'un cône tronqué AGHC (art. 815), & en retrancher le cylindre IGHK pour avoir la différence, qui sera la solidité de l'hyperboloïde.

Pour entendre la raison de l'opération que nous indiquons ici, il faut se rappeller que nous avons fait voir dans l'hyperbole (art. 679), que si l'on menoit une ligne telle que AC, parallele à GH, le rectangle compris sous les parties AD &

DC, seroit égal au quarré de la ligne GE. Or comme le rectangle compris sous AD & DC, est égal au quarré de la perpendiculaire DM (art. 441), à cause du demi-cercle ADC, il s'ensuit que la ligne DM est égale à la ligne GE. Cela posé, l'on sçait que le cercle, qui auroit pour rayon la ligne DM, est égal à la couronne formée par les deux circonférences (art. 565) ANCO & DPFQ. Cela étant, cette couronne sera égale au cercle, qui aura pour rayon la ligne GE, & qui sera un des cercles du cylindre GHIK; & comme il arrivera la même chose pour toutes les lignes telles que AC, qu'on tirera parallele à GH par tel point que l'on voudra de la ligne GA; il s'ensuit que toutes les couronnes seront égales entr'elles, puisque chacune sera égale à des cercles du cylindre. Or comme il y a autant de couronnes que de cercles, les uns & les autres étant exprimés par la ligne EL, il s'ensuit que l'espace qui est renfermé entre l'hyperboloïde DPFQE & le cône tronqué ANCOGF (qui n'est autre chose que la somme de toutes les couronnes), est égal au cylindre IGHK; & par conséquent le cône tronqué est plus grand que l'hyperboloïde de tout le même cylindre IGHK.

Application de la Géométrie au Toisé des Voûtes.

PROPOSITION XVIII.

PROBLEME.

833. *Mesurer la solidité de la Maçonnerie de toutes sortes de voûtes.* Pl. XVIII. *Figure* 256, 257 & 258.

Il n'y a guere que trois sortes de voûtes parmi les ouvrages de fortification. Les premieres sont celles des souterreins, les secondes, celles des magasins à poudre, & les troisiemes, celles des tours auxquelles il y a des plates-formes: les unes & les autres sont ou à plein ceintre, comme dans la figure 256, ou surbaissées, comme dans la figure 257, ou gothique, que l'on nomme aussi *voûte en tiers point*, ou *voûte en arc de cloître*, comme dans la figure 258, & soit qu'elles servent aux magasins ou aux souterreins, elles sont toujours disposées en dehors en dos d'âne, comme un toit, parce qu'on y applique dessus une chape de ciment pour les garantir des eaux de pluies.

834. Si l'on a donc à toiser la maçonnerie d'un souterrein

Figure 256. & 259. ou d'un magasin, dont la figure 250 soit le plan, l'on commence par toiser les pignons PRST & MKOL, sans aucune difficulté, parce que ce sont des parallelepipedes; ensuite on toise aussi les pieds-droits ADFG, depuis la retraite des fondemens jusqu'à la naissance AC de la voûte; & pour la voûte, l'on toise la superficie du triangle ABC, que l'on multiplie par la longueur dans œuvre de la voûte; ce qui s'appelle *toiser tant plein que vuide :* & comme il faut du produit en déduire le vuide DKE, si la voûte est en plein ceintre, l'on mesure la superficie du demi-cercle (art. 484) DKE, que l'on multiplie par la même longueur qui a servi à mesurer le triangle ABC; & soustrayant ce produit-ci du précédent, la différence est la valeur de la voûte.

Figure 257. 835. Si la voûte est surbaissée, comme FEG, dont la figure est une demi-ellipse, il faut mesurer le triangle ABC comme ci-devant, & le multiplier par la longueur dans œuvre de la voûte: après quoi l'on cherchera la superficie de la demi-ellipse FEG (art. 798), pour la multiplier aussi par la même longueur; & soustrayant ce produit-ci du précédent, on aura la valeur de la voûte.

Figure 258. 836. Enfin si la voûte que l'on veut mesurer est en tiers point, comme ILM, on cherchera la superficie du triangle ILM, à laquelle on joindra celle des segmens (art. 797) des cercles, dont les lignes LI & LM sont les cordes; & ayant multiplié cette quantité par la longueur de la voûte dans œuvre, on soustraira le produit de celui du triangle HKN, multiplié par la même longueur, & l'on aura la solidité que l'on demande.

837. Pour les voûtes au dessus desquelles il y a des plates-formes, comme, par exemple, celles qui couvrent les salles de l'Observatoire Royal de Paris, le toisé en est un peu plus difficile; & je ne sçache pas même que personne ait recherché la maniere de le faire géométriquement: comme ces sortes d'endroits ont pour base un quarré ou un polygone régulier, le vuide & le plein de la voûte sont ordinairement un prisme, qui est facile à mesurer: & comme il n'y a que le vuide qu'il faut déduire, qui peut faire quelque difficulté, nous considérerons ici les différentes figures qu'il peut avoir, afin de les réduire à des corps réguliers.

Supposant donc que les lieux dont il s'agit, ayent pour base

un quarré AB, ou un polygone régulier GH, voici comment on peut considérer la nature de leurs voûtes.

Si la base est un quarré, les diagonales AB & CD serviront de diametre à des demi-cercles AEB & CFD, qui partagent la voûte en quatre, & qui forment des arrêtes dans les angles. Or si l'on considere une infinité de quarrés qui remplissent le vuide de la voûte, tous ces quarrés auront leurs angles dans les quarts de cercles FC, FA, FB, FD, & leurs côtés seront des lignes comme GH & IK, tirées d'un quart de cercle à l'autre parallélement aux côtés AD ou DB, & la moitié de toutes les diagonales, comme EA & LM seront les ordonnées d'un quart de cercle AFE. Or comme la ligne EF ou EA qui marque la hauteur de la voûte, exprime la somme de tous ces quarrés, il s'ensuit que les ordonnées EA & LM servant de demi-diagonales à ces quarrés, l'on trouvera la valeur de tous ces quarrés, comme on trouve celles des ordonnées d'un quart de cercle; mais nous avons vu (art. 821), que la valeur des quarrés des ordonnées d'un quart de cercle se connoissoit en multipliant la plus grande ordonnée EA par les deux tiers de la ligne EF: il faudra donc, pour trouver la solidité du corps AFB, multiplier le quarré AB, qui lui sert de base, par les deux tiers de la ligne EF, qui en exprime la hauteur. *Figure 260. & 261.*

838. Si la voûte étoit sur des pieds-droits, qui composassent ensemble un prisme, & que ce prisme fût de six côtés, le corps qui formeroit le vuide de la voûte auroit une figure comme GHIK, formée aussi par demi-cercles: & comme ce corps seroit composé d'une quantité infinie de polygones semblables, de même que celui que nous venons de voir est composé de quarrés, si l'on considere le quart de cercle IKG, l'on verra que toutes les ordonnées, comme OP & QR de ce quart de cercle, servent de rayons aux polygones, dont le solide est composé: mais ces polygones étant tous semblables, & dans la raison des quarrés de leurs rayons (art. 492), l'on en trouvera la valeur, comme on trouve celle des quarrés de leurs rayons, c'est-à-dire, en multipliant la superficie du plus grand polygone par les deux tiers de la ligne qui en exprime la quantité. Ainsi pour trouver la valeur du solide GIH, il faut multiplier la base GH par les deux tiers de la perpendiculaire IK. *Figure 261.*

839. Mais si au lieu de demi-cercles, c'étoit des demi-ellipses

ABC & DBE, qui partageassent la voûte, on trouveroit de même la valeur du vuide, en multipliant la base AC par les deux tiers de l'axe BF: car si le plan AC est un quarré, tous ceux qui composeront le solide seront aussi des quarrés : donc les demi-diagonales seront les ordonnées KL & MN du quart d'ellipse HGI ou FBC: & comme l'on trouve la valeur de tous les quarrés des ordonnées d'un quart d'ellipse, comme on trouve celles des ordonnées d'un quart de cercle (art. 798), c'est-à-dire en multipliant le quarré de la plus grande ordonnée HI par les deux tiers de la ligne GH, il s'ensuit que l'on trouvera toujours la solidité d'une voûte quelconque, soit que ses arrêtes se trouvent être des ellipses, soit qu'elles soient seulement des quart de cercles. Cela vient de ce que l'on doit toujours déterminer la solidité d'un corps, dont les élémens croissent dans la raison des quarrés des ordonnées d'une ellipse ou d'un quart de cercle, en multipliant le plus grand élément qui sert de base par les deux tiers de la hauteur, quelle que soit d'ailleurs la figure du polygone qui sert de base réguliere ou irréguliere.

840. Il est encore une autre espece de voûte, que l'on nomme *voûte en bourlet*, parce qu'en effet le vuide de cette voûte ressemble assez à un bourlet; & pour en donner une idée, considérez les figures 264 & 265, dont la premiere est le plan d'une Tour, où l'on voit dans le milieu un pilier AB, sur lequel repose une voûte, qui répond aussi aux murs de la Tour; de sorte que de quelque sens qu'on puisse prendre le profil de cette Tour, il sera toujours semblable à la figure 265. Or comme la voûte regne autour du pilier ABE, il faut pour la toiser, commencer par mesurer la masse HICD, tant pleine que vuide, qui est un cylindre qui a pour base un cercle, dont CD est le diametre, & HC la hauteur.

Présentement pour trouver le vuide qu'il faut déduire de ce cylindre, il faut chercher la superficie du demi-cercle CMA, & la multiplier par la circonférence du cercle, qui sera moyenne arithmétique entre les circonférences de la Tour & du pilier, c'est-à-dire entre les circonférences qui auront pour rayons AF & FC; & retranchant ce produit-ci du précédent, on aura la valeur de la voûte.

Comme le bourlet est composé d'autant de demi-cercles que l'espace qui est entre les deux circonférences CODQ &

ANBP contient de lignes, comme AC & NO, qui servent de diametre aux demi-cercles, il s'ensuit que la ligne qui exprimera la somme de tous les élémens qui composent la couronne, c'est-à-dire la somme de toutes les lignes AC & NO, marquera aussi la somme de tous les demi-cercles qui composent le bourlet. Or comme cette ligne n'est autre chose qu'une circonférence GH moyenne arithmétique entre les deux CODQ & ANBP, qui renferment la couronne, il s'ensuit qu'il faut multiplier le demi-cercle, qui auroit pour diametre CA par la circonférence GH, pour avoir la valeur du bourlet.

A l'égard du revêtement de la Tour, l'on voit que pour en trouver la solidité, il faut ôter de la valeur du cône tronqué, dont RSTX seroit la coupe, le cylindre qui auroit pour diametre du cercle de sa base la ligne HI, & pour hauteur la ligne HZ, afin d'avoir la différence, qui sera ce qu'on demande.

841. On peut être souvent dans le cas de toiser la superficie des voûtes dont nous venons d'examiner la solidité: c'est pourquoi il est à propos de sçavoir la maniere dont il faudroit s'y prendre si l'on avoit de pareilles surfaces courbes à mesurer. La méthode que je vais expliquer ici ne peut s'appliquer qu'aux voûtes telles que ABC, dont la base est un polygone régulier, & dont la hauteur BF est égale au rayon GF, mené du centre F du polygone régulier qui sert de base, perpendiculairement au côté AE. Si l'on pouvoit trouver le moyen de toiser par une méthode générale & facile la surface d'un ellipsoïde, la méthode que nous allons proposer s'appliqueroit avec la même facilité aux voûtes surbaissées & surmontées. En général on dit qu'une voûte quelconque est en plein cintre, lorsque la hauteur BF ou la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la base est égale à la ligne menée du centre F de la base où tombe la perpendiculaire BF, au milieu de chaque côté du polygone régulier, comme est ici la ligne FG. Si cette ligne BF est plus grande ou plus petite que GF, la voûte est appellée *surmontée* ou *surbaissée*. Le principe que nous allons expliquer a ceci d'avantageux, que quoiqu'on ne puisse l'appliquer qu'aux voûtes en plein cintres, on trouve encore par son moyen la surface d'une voûte fort commune, à laquelle on a donné le nom de voûte d'arrête. La figure 254, planche 17, représente une voûte d'arrête. Nous ferons voir aussi la maniere de toiser la solidité de cette voûte, en ne faisant usage que des principes précédens.

Figure 262.

Définition.

842. Supposant toujours la voûte en plein ceintre, en arc de cloître, comme celle qui est représentée par la figure 262, nous appellerons chaque portion de la surface courbe de la voûte, telle que ABE, *un pan de voûte :* ainsi dans la même figure, la voûte proposée est une voûte à quatre *pans.* En général, une voûte en arc de cloître & en plein ceintre, aura toujours autant de pans que le polygone régulier qui lui sert de base a de côtés.

PROPOSITION XIX.

Théoreme.

Figure 262. 843. *La superficie courbe* ABE *d'un pan de voûte quelconque est double du triangle qui lui sert de base.*

Soit représenté par $2a$ le côté du polygone régulier qui sert de base à notre voûte, & par b la perpendiculaire GF abaissée du centre F du polygone sur son côté AE, laquelle (art. 841) doit être égale à la hauteur BF de la voûte, puisqu'on la suppose en plein ceintre ; la surface du triangle AFE qui sert de base à la portion ABFE de la voûte sera ab : & pour avoir le solide de cette portion de voûte, il faudra, suivant l'art. 837, multiplier le plus grand élément ou le triangle AFE par les deux tiers de BF ; ce qui donnera pour la solidité du corps ABFE $\frac{2ab^2}{3}$.

Présentement je fais attention que l'on pourroit considérer la solidité de ce corps d'une autre maniere, en le concevant comme étant composé d'une infinité de petits cônes, tels que FG, Fg, Fh, qui ont tous leur sommet au point F, & dont les bases sont répandues uniformément sur la surface ou le pan de voûte ABE. Il est aisé de voir que de tous ces cônes il n'y a que ceux qui sont disposés sur le quart de cercle qui puissent être droits, & que tous les autres sont nécessairement obliques & différemment inclinés, quoiqu'ils aient tous la même hauteur FG. Ainsi pour avoir la solidité de la portion de voûte ABFE considérée de cette maniere, il faudra multiplier la somme des bases de tous ces petits cônes, qui n'est autre chose que la surface du pan de voûte ABE, par le tiers du rayon FG : donc

donc en désignant cette surface par S, on aura le solide du corps ABFE $= S \times \frac{a}{3}$. D'ailleurs, nous venons de voir que le même solide est exprimé par $\frac{2}{3}a^2b$, en le considérant composé d'élémens triangulaires, tels que ILK qui croissent comme les quarrés des ordonnées LH au quart de cercle BHG : on aura donc $S \times \frac{a}{3} = \frac{2}{3}a^2b$, & en divisant par $\frac{1}{3}a$, $S = 2ab$; d'où il suit évidemment que le pan de voûte ABE est double du triangle correspondant AFE qui lui sert de base.

Nota. Il faut remarquer que selon la figure où la base ADCE est un quarré, la surface du triangle est aa, parce que la perpendiculaire FG se trouve, par la propriété du quarré, égale à la moitié AG du côté AE. Comme cela n'est qu'accidentel, & que notre démonstration doit s'entendre d'un polygone quelconque, il étoit à propos de ne point supposer la perpendiculaire GF = AG, pour que la proposition fût démontrée dans toute sa généralité.

COROLLAIRE I.

844. Il suit delà que la surface d'une voûte en arc de cloître en plein cintre est toujours double de la surface du polygone régulier qui lui sert de base : ainsi supposant que la ligne DK *Figure 261.*
perpendiculaire au côté GN de l'exagone, soit égale à la ligne IK, menée du sommet I de la voûte perpendiculairement à la base, au centre K de cette même base, la surface de cette voûte sera double de celle de l'exagone MNGLOH qui lui sert de base, puisque chaque pan NIM, NIG sera double du triangle correspondant NKM, NKG.

COROLLAIRE II.

845. Il suit de cette proposition, que la surface d'une demi-sphere est double du cercle qui lui sert de base ; ensorte que la proposition que nous avons démontré sur la superficie de la sphere devient un corollaire très-simple de celle-ci ; car puisque notre démonstration est applicable à tous les polygones réguliers, elle est aussi applicable au cercle. En effet, on peut concevoir la surface de la sphere comme composée d'une infinité de petits triangles curvilignes qui ont leur sommet au pôle de cette demi-sphere, & qui vont se terminer à la circonférence, lesquels sont tous, par la proposition pré-

ſente, doubles des petits triangles correſpondans dans le cercle qui lui ſert de baſe.

SCHOLIE.

846. On peut faire uſage de la propoſition précédente pour trouver la ſuperficie des voûtes d'arrêtes, telle que celle qui eſt repréſentée par la figure 254 (planche 17). Mais avant que de chercher la ſuperficie de ces ſortes de voûtes, il eſt à propos de rechercher de quelle maniere elles peuvent être formées; c'eſt ce que nous allons examiner dans les articles ſuivans, après quoi il nous ſera facile de déterminer leur ſurface, & leur ſolidité par la même occaſion.

Pl. XVII. *Figure* 255. 847. AEDCFB eſt un demi-cylindre droit, dont la baſe eſt un parallélogramme rectangle ADCB. Le côté AD eſt diviſé en deux également en K, & de ce point on a tiré aux angles B, C les lignes droites KB, KC. Par ces lignes & la ligne EK perpendiculaire au plan de la baſe renfermée dans le plan du demi-cercle AED, il faut concevoir deux plans coupans KEIB, KEHC qui ſeront néceſſairement perpendiculaires au plan de la baſe. Il eſt viſible que ces plans retranchent du demi-cylindre ou berceau deux corps égaux AKEB, DKEC qui ſont dans le cas de ceux que nous venons d'examiner dans tout ce qui précéde, dont on pourra trouver la ſolidité, en multipliant chaque triangle qui lui ſert de baſe par les deux tiers du rayon AK, & dont on aura la ſurface en doublant les mêmes triangles égaux AKB, DKC. Le corps EKBFC terminé en coin du côté de la ligne EK, eſt évidemment égal à ce qui reſte du cylindre, après en avoir ôté les deux corps AKEB, EKDC: donc puiſque l'on peut toiſer ces deux corps, ainſi que le demi-cylindre, on aura auſſi la ſolidité du corps EKBFC. De même la ſurface courbe de ce même corps eſt égale à celle du demi-cylindre, après en avoir ôté celles des corps AKEB, DKEC: donc puiſque la ſuperficie courbe de ces deux corps peut être déterminée, on peut auſſi trouver celle du corps EKBFC.

848. Cela poſé, une voûte d'arrête telle que celle qui eſt repréſentée par la figure 254, n'eſt autre choſe que différens corps RGELD, RGFIE, tous égaux entr'eux, & formés de la même maniere que le corps EKBFC de la figure 255, leſquels ſe touchent tous dans les ſurfaces planes qui forment

leurs côtés qui seront toujours des quart d'ellipse, & sont tous terminés à une même ligne perpendiculaire au plan de la voûte. Il est visible que tous ces corps doivent être parfaitement égaux, que leurs cercles FIE, ELD doivent aussi être égaux, ainsi que les triangles qui leur servent de base. On voit par-là que la superficie & la solidité se réduit à trouver la surface & la solidité du corps EKBFC de la figure 255.

849. Soit le rayon AK ou $EK = a$; la ligne AB qui mesure la longueur du cylindre soit égale à b: pour trouver la surface de ce corps, je chercherai d'abord celle du cylindre. Je commence par déterminer la demi-circonférence BFC par la proportion suivante, $7 : 22 :: a : \frac{22}{7} a$; puisque le rapport du rayon à la demi-circonférence est le même que celui du diametre à la circonférence. Multipliant cette demi-circonférence par b, j'aurai $\frac{22}{7} ab$ pour la surface du demi-cylindre: ôtant de cette superficie celles des corps AKEB, DKEC, lesquelles sont égales ensemble au rectangle AB, on aura pour la superficie du corps EKBFC, $\frac{22}{7} ab - 2ab = \frac{22}{7} ab - \frac{14}{7} ab = \frac{8}{7} ab$; d'où il suit que cette surface est égale à $ab + \frac{1}{7} ab$, c'est-à-dire égale à la base, plus $\frac{1}{7}$ de la même base ABCD: donc pour avoir la surface d'une voûte d'arrête en plein cintre, comme celle de la figure 254, & dont la base est un polygone régulier, il faut à cette même base ajouter un septieme.

850. Pour la solidité du même corps, je cherche la surface du demi-cercle BFC, en multipliant la demi-circonférence $\frac{22}{7} a$ par la moitié du rayon; ce qui me donne $\frac{11}{7} a^2$: si je multiplie ce produit par b, j'aurai la solidité du demi-cylindre qui sera $\frac{11}{7} a^2 b$. Présentement je cherche la solidité des deux corps égaux AKEB, EKDC, qui est $\frac{2}{3} a^2 b$: donc la solidité du corps EKBFC sera $\frac{11}{7} a^2 b - \frac{2}{3} a^2 b$, ou en réduisant au même dénominateur $\overline{\frac{33}{21} - \frac{14}{21}} \times a^2 b = \frac{19}{21} a^2 b$; d'où il suit que ce solide est au demi-cylindre AEDCFB :: 19 : 33 : donc ce même corps sera les $\frac{19}{33}$ du même demi-cylindre. Pour appliquer ce que nous venons de dire au toisé du solide d'une voûte d'arrête, dont la base est un polygone régulier, il faudra chercher la solidité du demi-cylindre, qui auroit pour base un rectangle formé sur le côté ED du polygone, & la perpendiculaire GS abaissée du centre du polygone sur le côté DE, & ensuite prendre les $\frac{19}{33}$ de ce solide autant de fois que le polygone de la base aura de côtés.

851. Il faut bien remarquer que quoiqu'on ne puisse pas trouver par notre méthode la superficie d'une voûte d'arrête surbaissée ou surmontée, cependant on détermineroit avec la derniere facilité le solide de ces sortes de voûtes dans ces deux cas. Je laisse aux Commençans le plaisir d'en trouver eux-mêmes la démonstration.

Comme ces sortes de voûtes sont ordinairement remplies de maçonnerie du côté des toits des Eglises ou autres endroits où elles se trouvent ; on toisera la solidité du prisme droit qui auroit même base & même hauteur, & du tout on déduira la solidité des voûtes, selon la méthode que nous venons d'expliquer.

Il est aisé de voir qu'il ne nous a pas été possible de parler de la superficie de ces sortes de voûtes dans l'article de la mesure des surfaces, parce que la connoissance de ces mêmes surfaces ne peut se déduire que de la solidité de ces voûtes, au moins dans la méthode que j'ai suivie ici.

Application de la Géométrie à la maniere de toiser le revêtement d'une Fortification.

852. Quand on trace une fortification, il y a une ligne qui regne tout autour des ouvrages, que l'on nomme *magistrale*, qui sert à donner les longueurs que doivent avoir les parties de la fortification ; & cette ligne est celle qui est représentée par le cordon du revêtement d'un ouvrage : par exemple, si l'on dit qu'une face de bastion a 50 toises, cela doit s'entendre depuis une extrêmité du cordon de cette face jusqu'à l'autre ; ou, ce qui est la même chose, depuis une extrêmité jusqu'à l'autre de l'entablement de la muraille de la face.

Figure 266. & 267. Présentement pour mesurer le revêtement du bastion représenté dans la figure 266, considérez-en le profil, dont les dimensions ont été prises selon le profil général de M. de Vauban, pour le revêtement ordinaire d'un rempart, qui auroit 30 pieds, depuis la retraite AG des fondemens jusqu'à la hauteur CH du cordon : & comme la partie DEFG n'a point de talud, nous n'en parlerons point ici, parce qu'elle est facile à mesurer ; nous considérerons seulement la muraille, depuis la retraite jusqu'au cordon ; & faisant aussi abstraction des contre-forts, il faut, à cause des pyramides tronquées qui

se rencontrent aux angles des points A & D, abaisser les perpendiculaires AB & DE, & mesurer la superficie du trapeze ABCG du profil par la longueur AD de la face, prise le long des contre-forts, & le produit sera regardé comme le revêtement de la face : venant ensuite dans l'angle flanquant I, l'on tirera une perpendiculaire GH, de sorte qu'elle corresponde dans l'angle K du pied de la muraille; & ayant aussi abaissé la perpendiculaire CA, l'on multipliera le profil précédent par la longueur HA ou GC du flanc, & l'on fera de même pour toiser la courtine & les autres parties où l'on aura retranché les pyramides des angles.

Pour connoître la valeur de ces pyramides tronquées, je considere que celle qui est à l'angle de l'épaule & à l'angle saillant, ressemblent assez à la figure 270. Ainsi connoissant les deux plans VT & QR, je mesure cette pyramide tronquée comme à l'ordinaire, & supposant qu'elle soit celle de l'angle flanqué, je me garde bien de la prendre aussi pour celle de l'angle de l'épaule, parce qu'elles sont différentes en solidité; c'est pourquoi je mesure cette derniere, comme je viens de faire la précédente. *Figure 220.*

Quant à ce qui nous reste à mesurer dans l'angle flanquant I, je considere la figure 269, comme étant cette partie-là détachée, qui ressembleroit à un prisme, si le vuide BCEHG étoit rempli : supposant donc qu'il le soit, je cherche la valeur du prisme AFG, de laquelle je soustrais celle de la pyramide KMI, que je suppose être égale au vuide BEG, & la différence donne la partie que je cherche. *Figure 268. & 269.*

853. Ce seroit peu de chose que de toiser le revêtement d'une fortification, s'il étoit toujours composé de lignes droites, comme dans cette figure; mais il y a bien d'autres difficultés, quand il faut toiser le revêtement des parties des bastions à orillons, comme celle du bastion représenté dans la figure 271. Cependant comme les articles 854, 855 ont été rapportés exprès pour en faciliter l'intelligence, nous allons faire ensorte d'en rendre les opérations aisées. *Figure 271.*

La figure 275 représente le flanc d'un bastion à orillon, dont la largeur AB marque l'épaisseur du revêtement au cordon, qui est toujours de 5 pieds, & la largeur BC marque le talud I du revêtement, qui est ici de 6 pieds; de sorte que toute la largeur AC marque l'épaisseur du revêtement sur la retraite, *Pl. XX. Figure 275.*

qui sera de 11 pieds, & la ligne FKIGDE la magistrale. Pour sçavoir comment il faut s'y prendre pour toiser l'orillon GSD, nous allons voir premiérement de quelle façon il a été tracé, afin de connoître l'angle GHD, & le rayon HD, dont nous aurons besoin.

L'on sçait que pour tracer l'orillon, selon la méthode de M. de Vauban, l'on divise le flanc FD en trois parties égales, & que la troisieme partie GD devient la corde d'une portion de cercle qui forme l'orillon, & que pour décrire cette portion de cercle, l'on éleve sur le milieu de la partie GD une perpendiculaire IH, & une autre DH sur l'extrêmité DE de la face du bastion, & que ces deux perpendiculaires venant se rencontrer au point H, donnent le centre de l'orillon, ou autrement de l'arc GVD, dont le rayon est la perpendiculaire DH.

Figure 273. & 274.

On n'a représenté que la moitié du cône tronqué, afin de ménager l'espace de la planche.

Cela posé, si avec les rayons HB, HG, HQ l'on décrit trois cercles, & que l'on considere la figure 273, l'on verra que ces trois cercles composent un cône tronqué, dans le milieu duquel est un cylindre, & le plan BY étant le profil de l'orillon, la ligne GQ dans l'une & l'autre figure marquera le talud du revêtement; la ligne GB, son épaisseur à l'endroit du cordon, & la ligne HG, le demi-diametre de l'orillon, qui est la même chose que HD. Or comme le revêtement de l'orillon est un secteur de cône tronqué, après en avoir ôté le cylindre, qui est dans le milieu, & que la grandeur de ce secteur est déterminée par l'angle GHD, voici comment on pourra connoître la valeur des lignes dont nous avons besoin pour mesurer ce secteur.

On a vu (art. 741) que l'angle de l'épaule FDE étoit de 117 degrés 39 minutes: par conséquent si l'on en soustrait l'angle droit HDB, il restera 27 degrés 39 minutes pour l'angle IHD du triangle rectangle HLD. Ainsi l'angle LDH sera de 62 degrés 21 minutes: & comme on a trouvé aussi (art. 541) que le flanc FD étoit de 27 toises 2 pieds, la ligne LD en étant la sixieme partie, sera de 4 toises 3 pieds 4 pouces. Or comme du triangle LHD l'on connoît les trois angles & le côté LD, il sera facile de connoître le côté DH, que l'on trouvera de 5 toises 9 pouces. Cela étant, on connoîtra toutes les lignes de la figure; car le demi-diametre HG étant de 5 toises 9 pouces, & la ligne GB de 5 pieds, le rayon HB du

cylindre sera de 5 toises 1 pied 9 pouces, & le talud GQ étant de 6 pieds, le demi-diametre HQ de la base du cône tronqué sera de 6 toises 9 pouces, & l'axe HZ exprimant la hauteur du revêtement, sera de 5 toises : ainsi l'on connoît tout ce qu'il faut pour mesurer le cône tronqué & le cylindre qui est dans le milieu.

Ayant donc mesuré le cône tronqué & le cylindre, on retranchera la valeur du cylindre de celle du cône tronqué, pour avoir le fragment qui en fait la différence : & comme le revêtement de l'orillon est un secteur de ce fragment, l'on en cherchera la valeur, en suivant ce qu'on a vu dans l'art. 820, c'est-à-dire, que connoissant l'angle GHD, qui est de 124 degrés 42 minutes, l'on dira : Si 360 degrés m'ont donné tant pour la valeur du cône tronqué, après en avoir ôté le cylindre, que me donneront 124 degrés 42 minutes pour le secteur, ou autrement pour la valeur du revêtement de l'orillon, qui se trouvera, en faisant le calcul des parties que l'on vient d'indiquer.

854. Avant que de chercher à toiser le flanc concave KI, il faut être prévenu que pour le tracer on a prolongé la ligne de défense SF de la longueur FK de 5 toises pour faire la brisure, & que par l'angle flanqué S, & le point G l'on a tiré la ligne SI, pour avoir la partie GI aussi de 5 toises; & ensuite on a tiré la ligne KI, sur laquelle on fait un triangle équilatéral KPI, pour avoir le point P, qui a servi de centre pour décrire avec le rayon PK l'arc KI, avec le rayon PN l'arc NO, & avec le rayon PL l'arc RM. *Figure* 272. & 275.

Présentement la premiere difficulté est d'avoir la valeur du rayon PK, que l'on trouvera pourtant en considérant qu'on connoît l'angle SFG de 80 degrés 47 minutes par l'art. 741 qui nous a donné aussi la ligne EF de 82 toises, à laquelle ajoutant la ligne SE, c'est-à-dire la face du bastion, qui est de 50 toises, on aura toute la ligne SEF de 132 toises: & comme la ligne FG est les deux tiers du flanc ED, que nous avons trouvé de 27 toises 2 pieds, elle sera donc de 18 toises 1 pied 4 pouces. Or comme du triangle SFG on connoît les côtés FS & FG avec l'angle compris, on trouvera par leur moyen que l'angle FSG est de 8 degrés, & que le côté est de 126 toises 5 pieds; & si au côté SF on ajoute la ligne FK de 5 toises, & au côté SG la ligne GI aussi de 5 toises, l'on aura

un autre triangle KSI, dont on connoîtra le côté SK de 137 toises, le côté SI de 131 toises 5 pieds, & l'angle KSI de 8 degrés, avec lesquels on trouvera la ligne KI de 18 toises 4 pieds quelque chose; & comme cette ligne est égale au rayon PK, il sera donc aussi de 18 toises 4 pieds.

Figure 272, 273 & 274. Si l'on considere bien le revêtement du flanc concave KI, on verra qu'il n'est autre chose qu'un secteur du cylindre, dans le milieu duquel il y auroit un vuide en forme de cône tronqué, comme dans l'art. 820; & pour le mieux comprendre, imaginons que XV est la moitié d'un cylindre, dont le rayon PN du cercle est le même que celui de l'arc NO du flanc, & que le rayon PK étant de 18 toises 4 pieds, si on y ajoute la ligne KN, qui marque l'épaisseur de la muraille au cordon, & qui est par conséquent de 5 pieds, on aura la ligne PN de 17 toises 3 pieds: si donc de la ligne PK on retranche la ligne KL, qui marque le talud de la muraille, qui est de 6 pieds, l'on aura la ligne PL de 17 toises 4 pieds; & si la ligne NV est égale à la hauteur du revêtement, c'est-à-dire de 5 toises, le trapeze KLVN sera le profil du revêtement: ainsi comme l'on connoît le rayon PN du cylindre, le demi-diametre PK du plus grand cercle du cône tronqué, & le demi-diametre PL du plus petit cercle du même cône, & de plus l'axe P*p* de 5 toises; on a tout ce qu'il faut pour mesurer la solidité du cylindre XV & celle du cône tronqué. Ayant donc trouvé ces solidités, on soustraira celle du cône tronqué de celle du cylindre, pour avoir la différence, qui étant une fois trouvée, l'on dira: Si 360 m'ont donné tant pour la différence du cylindre au cône tronqué, que me donneront 60 degrés, valeur de l'angle NOP pour la solidité du secteur de la partie du cylindre, après en avoir ôté le cône tronqué, & ce qu'on trouvera sera au juste la valeur du revêtement du flanc concave. Quant à la brisure FK, & au revers GI de l'orillon, ce sont des parties trop aisées à toiser, pour avoir besoin d'explication.

Figure 278. 855. La maniere de toiser l'arrondissement d'une contrescarpe, est encore une opération qui a aussi ses difficultés: mais comme cette partie est la même que celle du flanc concave, si on a bien entendu ce que j'ai dit ci-devant, je ne crois pas qu'on se trouve embarrassé. Cependant comme je ne veux rien laisser à deviner, considérez que pour toiser la maçonnerie de la contrescarpe de la figure 278, on s'y prendra comme on a fait

fait pour le bastion de la figure 266, c'est-à-dire que faisant abstraction des contre-forts, on multipliera la superficie de la maçonnerie par la longueur de la contrescarpe rectiligne, & qu'on mesurera aussi les pyramides tronquées, qui se trouveront dans les angles rentrans; & pour l'arrondissement, on s'y prendra comme il suit.

856. Supposant que l'arc ACB marque le pied de la muraille dans le fossé, l'arc DFG le sommet, & l'arc HIK avec le précédent l'épaisseur au sommet, & l'intervalle CF le talud, on commencera par chercher la valeur de la corde AB, que nous supposerons de 20 toises, & celle de la fleche LC, qui sera, par exemple, de 4, afin de connoître le diametre de l'arc ACB, qu'on trouvera, aussi-bien que celui de tout autre arc, en cherchant une troisieme proportionnelle à la fleche LC, & à la moitié de la corde LA, c'est-à-dire à 4 & à 10: cette troisieme proportionnelle, qui est ici de 25 toises, sera la valeur du diametre qu'on demande. *Figure* 278.

857. La raison de ceci s'entendra aisément, en considérant que l'arc ACB de la figure 276 est le même que le précédent; & on remarquera qu'ayant achevé le cercle, la demi-corde LB est moyenne proportionnelle entre la fleche CL & la partie LM du diametre; & qu'ayant trouvé la ligne LM troisieme proportionnelle à CL & LB, on n'a qu'à l'ajouter à la fleche CL, pour avoir le diametre CM. *Figure* 276.

Comme nous avons besoin de connoître aussi la quantité de degrés que contient l'arc ACB, si on tire les rayons NB & NA du centre, l'on aura le triangle ABN, dont on connoît le côté AB de 20 toises, & les côtés NB & NA chacun de 14 toises 3 pieds: il sera donc facile de connoître l'angle ANB, que l'on trouvera de 90 degrés 44 minutes.

Présentement si l'on considere le profil de la contrescarpe dans la figure 281, on verra que ressemblant à celui du flanc concave, l'arrondissement du fossé est un secteur de cylindre, duquel on a ôté un cône tronqué, dont l'axe commun seroit la ligne OP. Or si la hauteur FR ou OP est de 18 pieds, & l'épaisseur FI de 3, le talud CR de 4, le rayon PC étant de 14 toises 3 pieds, le rayon OF sera de 15 toises 1 pied, & le rayon OI sera de 15 toises 4 pieds: & comme on connoît toutes les lignes du cylindre, qui auroient pour plan générateur le rectangle PI, & celles du cône tronqué, qui auroient

pour plan générateur le trapézoïde POFD, si on cherche la solidité de l'un & de l'autre, & qu'on ôte celle du cône tronqué de celle du cylindre, on aura la différence qui nous donnera la solidité que nous cherchons, en disant : Si 360 degrés m'ont donné cette différence, que me donneront 90 degrés 44 minutes pour la valeur de l'arrondissement.

Je n'ai rien dit jusqu'ici sur la maniere de toiser les contreforts, parce qu'ils ne sont autre chose que des parallélepipedes, dont la solidité se trouve en multipliant la base par la hauteur.

PROPOSITION XX.

PROBLEME.

Figure 277. 858. *Maniere de mesurer la solidité de l'onglet d'un batardeau.*

Quand les fossés d'une fortification sont inondés, on y fait ordinairement aux endroits les plus convenables des batardeaux de maçonnerie, pour retenir les eaux ou pour les lâcher, selon le besoin qu'on en a. Pour connoître ce batardeau, considérez la figure 277, qui fait voir que cet ouvrage n'est autre chose qu'un corps de maçonnerie, dont le profil ABCDE marque que le dessus BCD est en dos d'âne pour l'écoulement des eaux de pluie, & pour empêcher qu'un homme ne puisse passer dessus : cependant comme les soldats pourroient, en descendant du rempart avec une corde, passer le fossé en s'achevalant sur cette chappe, on fait, pour y mettre empêchement, une tourelle dans le milieu, qui s'oppose absolument au passage. Pour toiser ce batardeau, on commence par mesurer la superficie du profil ABCDE, qu'on multiplie par toute la largeur du fossé en cet endroit ; ensuite on cherche la solidité du cylindre FIKG, aussi-bien que celle de sa couverture, qui est quelquefois un cône ILK, ou une demi-sphere. Jusques-là tout est facile ; mais ce qui embarrasse presque tous les Ingénieurs, c'est de toiser les deux fragmens, comme FHG, de la tourelle, qui sont à droite & à gauche, comme on peut les voir encore mieux en X & Z de la figure 282, qui est un profil de la tourelle & du batardeau.

Figure 282. Ce problême me fut proposé par plusieurs Ingénieurs, qui désiroient d'en avoir la solution. Je la cherchai, & la trouvai de plusieurs manieres ; je pris tant de plaisir à y travailler, que je cherchai même plusieurs choses fort curieuses à son occa-

ſion ; entr'autres de ſçavoir quelle eſt la quadrature de la ſurface de l'onglet, c'eſt-à-dire trouver un rectangle égal à ſa ſurface : & comme je crois qu'on ſera bien aiſe de ſçavoir ce qu'on peut dire de plus intéreſſant là-deſſus, on n'a qu'à examiner ce qui ſuit.

Comme l'axe du cylindre qui compoſe la tourelle répond ſur l'arrête de la cape du batardeau, cette arrête partage la cape du cylindre en deux également ; de ſorte que chaque demi-cercle devient une des faces N Q M de l'onglet. Or ſi l'on conſidere ce ſolide comme compoſé d'une quantité infinie de triangles rectangles, tels que P O Q, qui ont tous pour baſe les ordonnées Q O, R S, T V, des quarts de cercles O Q N & O P M, on verra que tous ces triangles étant ſemblables, ils ſont dans la même raiſon que les quarrés de leurs baſes ; & ne prenant que les triangles qui compoſent la moitié Q N O P de l'onglet, il s'enſuit qu'on en trouvera la valeur, comme on trouve celle des quarrés de leurs baſes, ou autrement comme on trouve celle des quarrés des ordonnées d'un quart de cercle (art. 569) ; mais nous ſçavons que pour trouver la valeur de tous ces quarrés, il faut multiplier celui de la plus grande ordonnée O Q par les deux tiers de la ligne O N, qui en exprime la quantité : il faudra donc, pour trouver la valeur de tous les triangles, multiplier le plus grand triangle P O Q par les deux tiers de la ligne O N : mais comme ceci ne donne que la moitié de la ſolidité de l'onglet, il faudra donc, pour l'avoir toute entiere, multiplier le triangle P O Q par les deux tiers du diametre M N. *Figure 279.*

Suppoſant que cet onglet-ci ſoit le même que celui qui eſt en X, le triangle O P Q ſera le même que A B C : par conſéquent ſi la ligne C A eſt de 5 pieds, & le diametre A D de 9, la ligne B C ſera de 4 & demi, & la ſuperficie du triangle A B C ſera de 11 pieds 3 pouces, qui étant multipliés par les deux tiers du diametre A D, c'eſt-à-dire par 6, donnera 67 pieds & demi cubes pour la ſolidité de l'onglet X. *Figure 279 & 282.*

Si on imagine l'onglet coupé par une quantité de plans, qui paſſant par le centre B du demi-cercle, aillent tomber ſur la circonférence A F D, c'eſt-à-dire perpendiculairement ſur la ſurface de l'onglet, ces plans partageront l'onglet en une infinité de petites pyramides, qui auront toutes pour hauteur commune le rayon du demi-cercle, & leurs baſes dans la ſur-

face de l'onglet. Mais comme toutes ces pyramides, prises ensemble, sont égales à une seule qui auroit pour base la somme de toutes les bases, c'est-à-dire la surface de l'onglet, & pour hauteur son rayon, il s'ensuit qu'on trouvera encore la solidité de l'onglet, en multipliant sa surface par le tiers du rayon.

859. Présentement je dis que la surface de l'onglet X est égale à un rectangle, qui auroit pour base le diametre BD ou MN de l'onglet, & pour hauteur, la hauteur même de l'onglet, c'est-à-dire la ligne BA.

Si l'on nomme la ligne BA, a; le rayon CB ou CD, b; le diametre BD sera $2b$. Cela posé, il faut faire voir que BD $\times$ BA ($2ba$) est égal à la surface de l'onglet.

Considérez que la superficie du triangle ABC est $\frac{ab}{2}$, & que si on multiplie cette quantité par les deux tiers du diametre BD, c'est-à-dire par $\frac{4b}{3}$, l'on aura $\frac{4abb}{6}$ pour la solidité de l'onglet : mais comme ce produit peut être regardé comme le produit de la surface de l'onglet par le tiers du rayon, il s'ensuit que divisant $\frac{4abb}{6}$ par $\frac{b}{3}$, le quotient sera nécessairement la surface de l'onglet. Si l'on fait la division, on trouvera que ce quotient est $2ab$ = BD $\times$ BA ; ce qui fait voir que la surface de l'onglet est égale au rectangle que nous avons dit.

Ceci rentre dans la proposition que nous avons donnée sur la superficie des voûtes en plein cintre, & sur leur solidité; l'onglet que nous venons de mesurer pouvant être regardé comme un double pan de voûte, dont chacun auroit la même hauteur, & pour base le triangle BFI.

Principe général pour mesurer les surfaces & les solides.

860. Rien ne fait mieux connoître la beauté de la Géométrie, que la fécondité de ses principes qui semblent, à l'envi, ouvrir de nouveaux chemins pour parvenir à la même chose; témoin les belles découvertes qu'on a faites de notre tems, parmi lesquelles en voici une qui est trop intéressante pour la refuser à ceux dont le principal objet, en étudiant la Géométrie, est de sçavoir mesurer les corps; mais comme sa connoissance dépend de certaines choses dont nous n'avons point

parlé jusqu'ici, nous allons faire ensorte de ne rien laisser à deviner.

DEFINITION.

861. L'on nomme *centre de gravité d'une ligne droite*, un point par lequel cette ligne étant suspendue, toutes ses parties sont en équilibre : car quoiqu'une ligne soit regardée comme n'ayant aucune pesanteur, cela n'empêche pas que la différence de ses parties ne soit considérée comme un obstacle à l'équilibre. Ainsi la ligne AB étant divisée en deux également au point C, ce point est pris pour celui d'équilibre, c'est-à-dire pour l'endroit par lequel cette ligne étant suspendue, les parties égales CA & CB seront en équilibre, parce que n'étant pas plus longues l'une que l'autre, il n'y a point de raison pour que l'extrêmité A soit plus sollicitée à se mouvoir que l'extrêmité D : & quand cela est ainsi à l'égard d'un plan, ce point est appellé le *centre de gravité du plan* : car quoique le plan, aussi-bien que la ligne, soit considéré sans pesanteur, cela n'empêche pas qu'on ne regarde encore ses patties comme pouvant être un obstacle à leur équilibre.

862. Par exemple, si l'on a un rectangle AB, & qu'on tire les diagonales AB & CD, le point E où elles se coupent en sera le centre de gravité, parce que si ce plan étoit posé sur un pivot fort aigu qui répondît à l'endroit E, il n'y auroit point de raison pour que le plan inclinât plus du côté DB que du côté AC, ni du côté AD, plutôt que du côté CB. Pl. XXI. *Figure* 283.

Comme les surfaces circulaires sont formées par la circonvolution uniforme d'une ligne droite, & que les solides circulaires sont formés par la circonvolution d'un plan, c'est la valeur de ces surfaces & de ces solides qu'on se propose de trouver ici, moyennant la connoissance du centre de gravité de la ligne génératrice, & celui du plan générateur : car si le point C est le centre de gravité de la ligne AB, & qu'on éleve à cet endroit la perpendiculaire CD, nous ferons voir que (la ligne AB ayant fait une circonvolution autour de la ligne EF, qui sera appellée *axe*, & qui est aussi perpendiculaire sur DC), la surface que décrira la ligne AB, sera égale à un rectangle, qui auroit pour base la ligne AB, & pour hauteur une ligne égale à la circonférence, qui auroit pour rayon la ligne DC, qui exprime la distance du centre de gravité C à *Figure* 285 & 283.

l'axe ; & que si du centre de gravité E l'on abaisse une perpendiculaire E F sur le côté C B, & qu'on fasse faire une circonvolution au rectangle A B sur le côté C B (que nous nommerons aussi *axe*), le corps que décrira le plan, sera égal à un parallélepipede qui auroit pour base ce plan même, & pour hauteur une ligne égale à la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon la ligne E F; ce que nous rendrons général pour mesurer toutes les surfaces dont on pourra connoître les centres de gravité de leurs lignes génératrices, & pour mesurer tous les solides dont on pourra connoître le centre de gravité de leur plan générateur.

PROPOSITION XXI.

Probleme.

Figure 285 & 286. 863. *Connoissant le centre de gravité d'une ligne droite* A B, *trouver la valeur de la surface qu'elle décrira, après avoir fait une circonvolution autour de l'axe* E F.

Je dis qu'il faut multiplier la ligne A B par la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon D C, & qu'on aura la surface que l'on demande: car comme cette ligne décrira un cylindre G B, & que pour trouver la surface de ce cylindre, il faut multiplier le cercle du rayon F B de la base par la hauteur A B du cylindre, il s'ensuit que la ligne D C étant égale à F B, les circonférences de ces lignes seront aussi égales, & que par conséquent le produit de la ligne A B par la circonférence du rayon D C, sera égal à la surface qu'on demande.

Figure 287 & 258. 864. Mais si la ligne A B, au lieu d'être parallele à l'axe E F étoit oblique, comme est, par exemple, la ligne G H: je dis qu'ayant fait une circonvolution à l'entour de l'axe E F, la surface qu'elle décrira sera encore égale au rectangle compris sous la même ligne G H, & sous la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon la ligne D C, tirée du centre de gravité C perpendiculaire sur l'axe E F.

Comme cette ligne aura décrit la surface I H d'un cône tronqué, & que la ligne D C est moyenne arithmétique entre E G & F H, la circonférence qui auroit pour rayon D C sera moyenne arithmétique entre les circonférences des rayons E G & F H: mais comme ces circonférences servent de côtés paralleles au trapézoïde qui auroit pour hauteur la

ligne GH, & que ce trapeze est égal à la surface du cône tronqué, il s'ensuit que le rectangle compris sous GH, & la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon DC, est égal à la surface décrite par la ligne GH.

865. Enfin si la ligne génératrice venoit rencontrer, comme EK, l'axe EF, je dis encore que si elle fait une circonvolution à l'entour de l'axe EF, la surface qu'elle décrira sera égale au rectangle compris sous la même ligne EK, & sous la circonférence du cercle qui auroit pour rayon DC. *Figure 289 & 290.*

Si l'on fait attention que la ligne génératrice aura décrit la surface du cône LEK, on verra que cette surface étant égale au rectangle compris sous le côté EK, & sous la moitié de la circonférence du cercle LK (art. 547), la ligne DC étant moitié du rayon FK, la circonférence dont elle sera le rayon sera aussi moitié de LK, & que par conséquent le rectangle compris sous la ligne génératrice EK, & sous la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon DC, sera égale à la surface qu'elle aura décrite.

PROPOSITION XXII.

PROBLEME.

866. *Si l'on a une demi-circonférence* EBF, *& que le point* C *soit le centre de gravité, je dis que cette demi-circonférence ayant fait une circonvolution sur l'axe* EF, *la surface qu'elle décrira, qui sera celle d'une sphere, sera égale au rectangle compris sous une ligne égale à la demi-circonférence* EBF, *& sous celle qui seroit égale à la circonférence dont la ligne* CD *seroit le rayon.* *Figure 294.*

Comme il faut connoître le centre de gravité C par rapport aux autres parties de la figure, on sçaura que la ligne CD, qui en détermine la position par rapport au centre du demi-cercle, doit être quatrieme proportionnelle à la demi-circonférence EBF, au diametre EF, & au demi-diametre DF. Ainsi ayant nommé la demi-circonférence a; le diametre EF, b; le demi-diametre DF sera $\frac{b}{2}$; & par conséquent on aura $a : b :: \frac{b}{2} : \frac{bb}{2a}$, qui fait voir que $\frac{bb}{2a}$ est égal à la ligne DC : mais comme nous avons besoin de la circonférence de la ligne DC, on la trouvera, en disant : Comme le

rayon DF ($\frac{b}{2}$) eſt à ſa circonférence ($2a$), ainſi le rayon DC ($\frac{bb}{2a}$) eſt à ſa circonférence : c'eſt pourquoi multipliant le ſecond terme par le troiſieme, & diviſant le produit par le premier (art. 206), on trouvera le quatrieme, qui ſera $2b$.

Comme $2b$ eſt la circonférence du rayon DC, ſi on la multiplie par la demi-circonférence EBF (a), l'on aura $2ab$ pour la ſurface que la demi-circonférence aura décrite ; ce qui eſt évident : car comme cette ſurface eſt ici celle d'une ſphere, & que la ſurface d'une ſphere eſt égale au produit du diametre du grand cercle par la circonférence du même cercle (art. 574), toute la circonférence étant ici $2a$, & le diametre b, la ſurface ſera toujours $2ab$.

Remarque.

Je viens d'en dire aſſez pour faire voir que dès qu'on aura le centre de gravité d'une ligne droite ou courbe, on trouvera toujours la ſurface dont elle aura été la génératrice, & que rien au monde ne ſeroit plus beau que ce principe, ſi on avoit autant de facilité à trouver le centre de gravité de ces lignes, qu'on en a à trouver la valeur des ſurfaces qu'elles décrivent. Ainſi ayant ſatisfait à mon premier deſſein, je vais remplir le ſecond, en montrant comment on peut auſſi, par les centres de gravité des plans générateurs, trouver la ſolidité des corps qu'ils auront décrits.

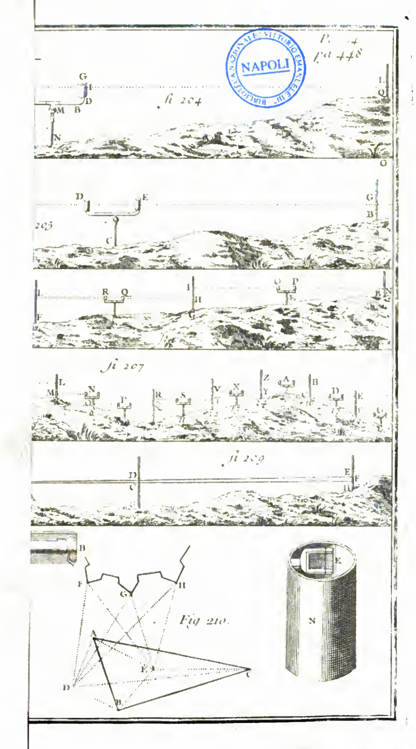
PROPOSITION XXIII.

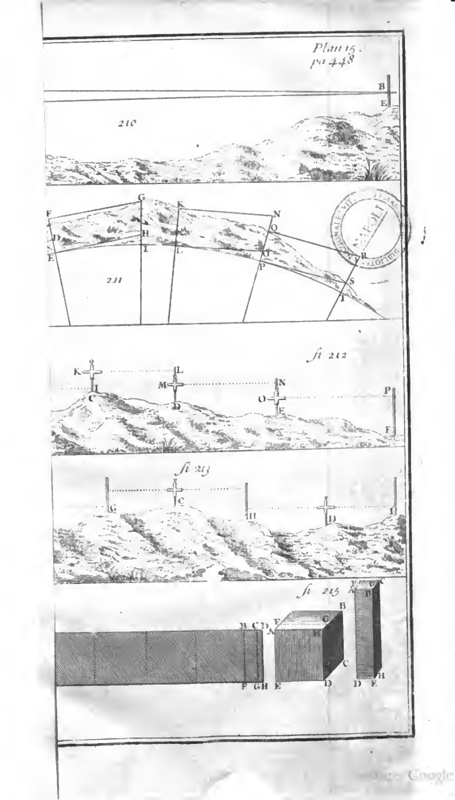
Probleme.

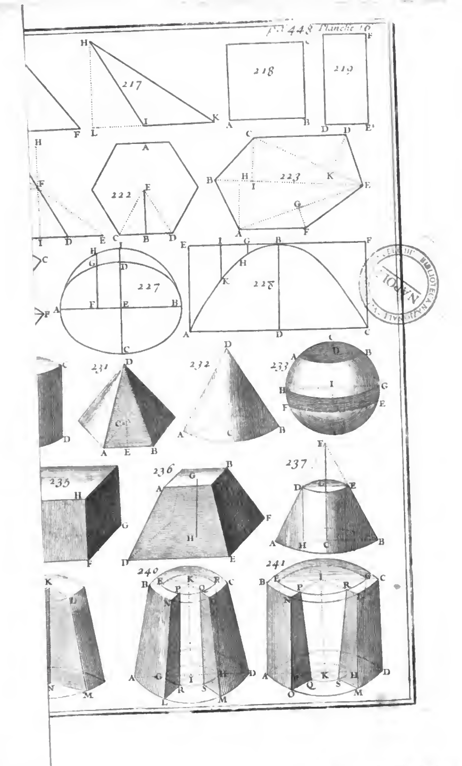
Figure 284. 867. *Si l'on a un rectangle* AF, *qui faſſe une circonvolution autour de l'axe* EF, *je dis que la ſolidité du corps qu'il décrira ſera égale au produit du plan* AF *par la circonférence, qui auroit pour rayon la ligne* CD, *tirée du centre de gravité* C, *perpendiculaire ſur l'axe* EF.

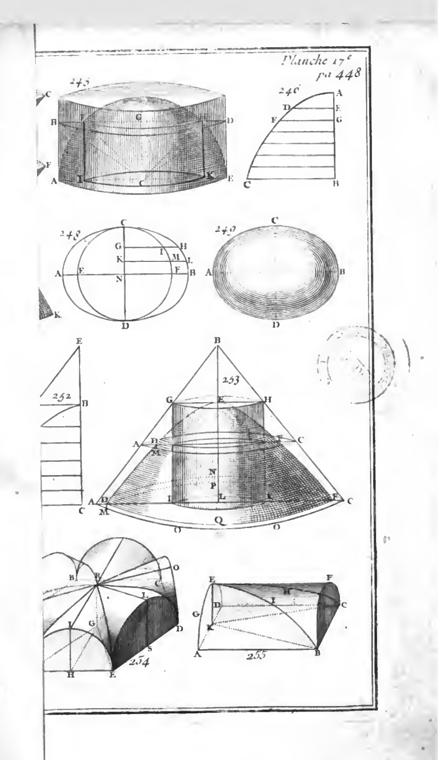
Comme ce ſolide ſera un cylindre, nous ſuppoſerons que c'eſt le cylindre AG : ainſi nommant l'axe EF, a ; la ligne AE, b ; la ligne CD ſera $\frac{b}{2}$, puiſqu'elle eſt la moitié de AE ; & ſi l'on nomme la circonférence du rayon EA, c ; celle du rayon CD ſera $\frac{c}{2}$.

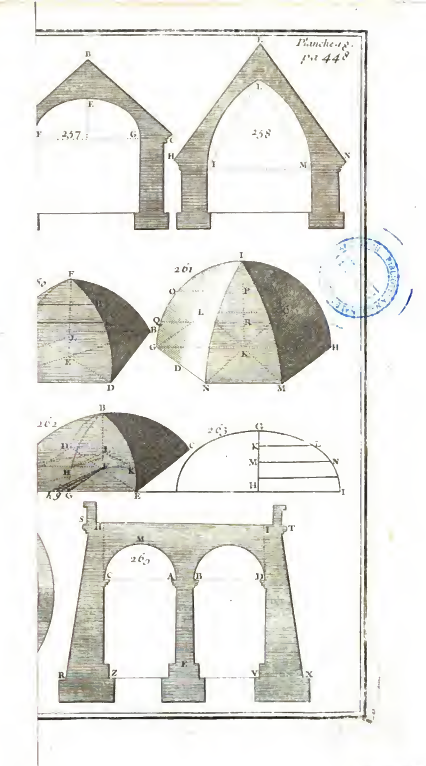
Cela

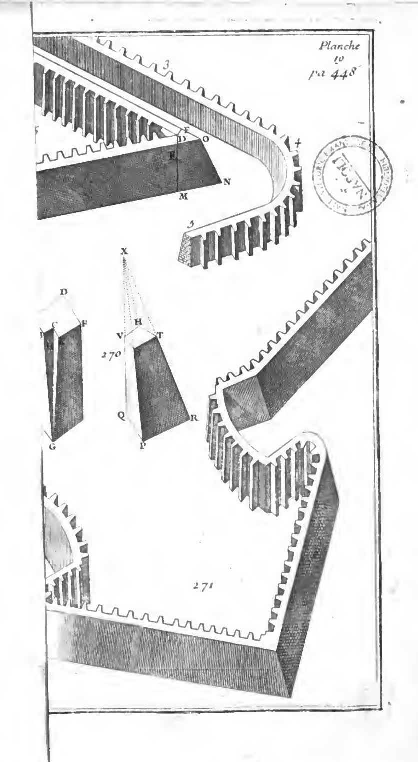

fa 448
fi 204
205
fi 207
fi 209
Fig 210.

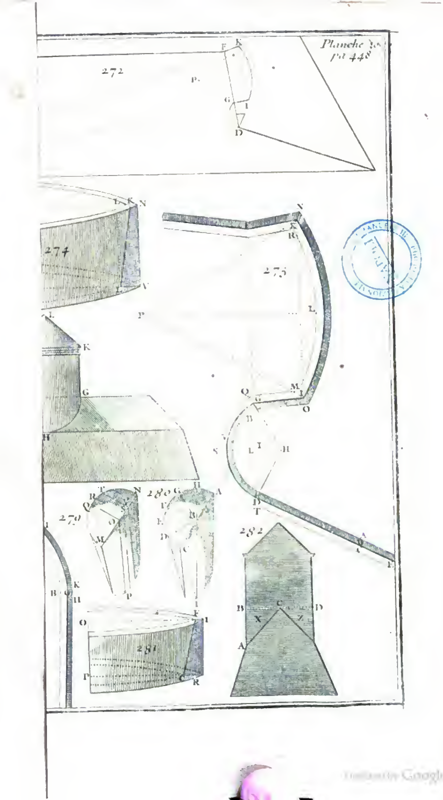

Plan 15.
pa 448
210
211
fi 212
fi 213
fi 215


217
218
219
222
223
227
228
231
232
233
235
236
237
240
241


245
246
248
249
252
253
254
255


Planche 18.
pa 448
257
258
261
262
263
265
Digitized by Google


Planche
10
pa 448
3
4
5
F
D
O
E
N
M
X
D
C
F
H
K
G
H
V
T
270
Q
R
P
271


Planche 30
pa. 448
272
274
275
279
280
281
282

Cela posé, AE × EF (ab) sera la valeur du plan générateur, qui étant multiplié par la circonférence du rayon CD ($\frac{c}{2}$), doit être $\frac{abc}{2}$ pour la valeur du solide, formé par la circonvolution du plan AF; ce qui est évident : car comme ce solide, ou autrement le cylindre AG, est égal au produit du cercle de sa base par l'axe EF (art. 812), on voit que la superficie de ce cercle étant $\frac{bc}{2}$, si on la multiplie par l'axe EF, on aura encore $\frac{abc}{2}$.

PROPOSITION XXIV.

Probleme.

868. *Si l'on a un triangle isoscele* EBF, *dont le centre de gravité soit le point* C, *je dis que si ce triangle fait une circonvolution autour de l'axe* EF, *le solide qu'il décrira sera égal au produit du plan générateur par la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon la ligne* CD, *tirée du centre de gravité perpendiculaire sur l'axe.* Figure 291 & 292.

Remarquez que le solide IKGH qu'aura décrit le triangle EBF, est composé de deux cônes KGH & KIH, & qu'il s'agit de faire voir que le produit du plan EBF, par la circonférence du rayon CD, est égal à ces deux cônes: mais pour cela, il faut être prévenu que le centre de gravité du triangle isoscele est un point tel que C, pris dans la perpendiculaire BD à une distance CD de la base, qui est le tiers de la perpendiculaire. Ainsi nommant la ligne EF, a; la ligne BD, b; & c la circonférence dont elle seroit le rayon, CD étant le tiers de BD, la circonférence dont elle seroit le rayon sera $\frac{c}{3}$.

Cela posé, le triangle EBF sera $\frac{ab}{2}$, qui étant multiplié par $\frac{c}{3}$, l'on aura $\frac{abc}{6}$ pour la valeur du solide KGHI; ce qui est évident : car si l'on cherche par la voie ordinaire la solidité du cône KGH, dont le plan générateur est le triangle EBD, la ligne BD étant le rayon du cercle de la base, sa valeur sera $\frac{bc}{2}$, qui étant multipliée par le tiers de la ligne ED (art. 556),

ou par la fixieme partie de EF $(\frac{a}{6})$, donnera $\frac{abc}{12}$ pour la valeur du cône ; & par conféquent $\frac{2abc}{12}$, ou bien $\frac{abc}{6}$ pour la valeur des deux cônes, c'eft-à-dire du folide KGHI, qui fe trouve la même que la précédente.

869. Mais fi le triangle EBF faifoit une circonvolution autour de l'axe LM, il décrira un folide d'une autre figure, dont le rapport avec le précédent fera comme la ligne BC eft à la ligne CD : car pour trouver la valeur de ce folide, il faudra multiplier le plan EBF par la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon BC : & comme l'un & l'autre folide aura pour bafe le même plan EBF, ils feront dans la même raifon que leurs hauteurs, c'eft-à-dire dans la raifon des circonférences des rayons BC & CD, qui font dans la même raifon que ces rayons.

L'on peut remarquer encore qu'ayant un triangle rectangle EBD, qui faffe une circonvolution autour du côté ED, il décrira un cône dont on trouvera la valeur, en multipliant le triangle BED par la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon la ligne CD égale au tiers de la bafe BD : car multipliant BD (b) par la moitié de ED $(\frac{a}{4})$, l'on aura $\frac{ab}{4}$ pour la fuperficie du triangle, qui étant multiplié par $\frac{c}{d}$, donnera $\frac{abc}{12}$.

Figure 295. Et fi le triangle EBD faifoit une circonvolution autour de l'axe HB, il décriroit l'entonnoir FGBDE, qui feroit double du cône : car comme le cône & l'entonnoir ont le même plan générateur, ils feront dans la raifon des circonférences décrites par le centre de gravité C : & comme le rayon BC eft double de CD, l'entonnoir fera double du cône ; ce qui fait voir qu'un cône eft le tiers d'un cylindre de même bafe & de même hauteur.

Figure 293. 870. Enfin fi l'on avoit un triangle BAD, dont le point C fût le centre de gravité du triangle double de celui-ci, que l'on prolongeât la ligne AD indéfiniment jufqu'aux points E & F, & que l'on fît faire une circonvolution au triangle BAD autour de l'axe GF, le folide qu'il décriroit feroit égal au produit du plan BAD par la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon la ligne CF, qui eft la diftance du centre de gra-

vité C à l'axe FG; & si le triangle, au lieu de faire une circonvolution autour de l'axe GF, en faisoit une autre autour de l'axe HE, le solide qu'il décriroit seroit égal au produit du plan ABD par la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon la ligne CE, tirée du centre de gravité à l'axe, & ces deux solides seroient dans la raison des rayons CF & CE.

Je laisse au lecteur le plaisir d'en chercher la démonstration; & je me contenterai de dire seulement que le solide, formé par la circonvolution du triangle ABD autour de l'axe GF, est semblable à celui dont nous avons parlé dans l'article 820, c'est-à-dire qu'il fait la différence d'un cylindre, duquel on auroit ôté un cône tronqué; & que le solide, formé par la circonvolution du triangle ABD autour de l'axe HE, est aussi semblable à celui de l'art. 819, c'est-à-dire qu'il fait la différence d'un cône tronqué, duquel on auroit ôté un cylindre: & comme la maniere de trouver la valeur de ces solides de la façon que je viens de dire, est plus aisée que celle des articles 819, 820, l'on pourra s'en servir pour toiser la maçonnerie, comprise par le talud de l'orillon, du flanc concave, & de l'arrondissement de la contrescarpe.

PROPOSITION XXV.

PROBLEME.

871. *Si on a un demi-cercle* EBF, *dont le centre de gravité soit le point* I, *& que de ce point l'on abaisse la perpendiculaire* ID, *je dis que le solide formé par la circonvolution du demi-cercle* EBF *autour de l'axe* EF, *qui sera une sphere, sera égal au produit du plan* EBF *par la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon la ligne* ID. *Figure 294.*

Il faut être prévenu que la ligne ID, qui marque la distance du centre de gravité I au centre D du demi-cercle, est une quatrieme proportionnelle à la moitié de la circonférence EBF au rayon DE, & aux deux tiers du même rayon. Ainsi nommant la demi-circonférence EBF, a; le rayon DE, b; la moitié de la circonférence EBF sera $\frac{a}{2}$; & les deux tiers du rayon DE seront $\frac{2b}{3}$: on trouvera la ligne DI, en di-

ſant : Comme $\frac{a}{2}$ eſt à b, ainſi $\frac{2b}{3}$ eſt à DI, qui ſera $\frac{4bb}{3a}$: & comme nous avons beſoin de la circonférence du rayon DI, on dira : Si le rayon DE (b) donne $2a$ pour ſa circonférence, que donnera le rayon DI $\left(\frac{4bb}{3a}\right)$ pour ſa circonférence, qui ſera $\frac{8abb}{3a}$, ou bien $\frac{8bb}{3}$? Or ſi l'on multiplie cette circonférence par la valeur du demi-cercle EBF $\left(\frac{ab}{2}\right)$, l'on aura $\frac{8abb}{6}$, ou bien $\frac{4abb}{3}$ pour la valeur du ſolide ; ce qui eſt aiſé à prouver : car comme une ſphere eſt égale au produit de quatre fois ſon grand cercle par le tiers du rayon (art. 568 & 570), la ſuperficie du demi-cercle étant $\frac{ab}{2}$, celle de tout le cercle ſera ab, qui étant multipliée par 4, donnera $4ab$ pour la valeur des quatre cercles ; & ſi l'on multiplie cette quantité par le tiers du rayon, c'eſt-à-dire par $\frac{b}{3}$, l'on aura $\frac{4abb}{3}$ pour la valeur de la ſphere, qui eſt la même que celle que nous venons de trouver.

Mais ſi le demi-cercle EBF faiſoit une circonvolution autour de la tangente GA, parallele au diametre EF, il décriroit un ſolide, dont on trouvera la valeur, en multipliant le demi-cercle par la circonférence, qui auroit pour rayon la ligne IB, qui eſt la diſtance du centre de gravité I à l'axe GA, & ſi le demi-cercle fait encore une circonvolution autour de l'axe AH perpendiculaire à EF, il décrira une eſpece de bourlet, dont on trouvera la valeur, en multipliant le demi-cercle par la circonférence du rayon IK, ou du rayon DF, qui eſt la même choſe ; & pour lors le ſolide décrit par le demi-cercle autour de l'axe EF, ſera au ſolide décrit autour de l'axe GA, comme le rayon ID eſt au rayon IB, & le ſolide formé par la circonvolution du demi-cercle autour de l'axe EF, ſera à celui qui aura été formé par une circonvolution du même demi-cercle autour de l'axe AH, comme le rayon ID eſt au rayon IK ou DF.

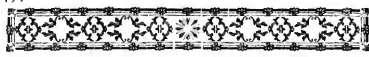
Remarque.

Je n'ai point donné la maniere de trouver les centres de

gravité, parce que c'eût été m'écarter de mon sujet, n'ayant eu en vue que d'exercer l'esprit des Commençans, & leur faire sentir le prix de ce principe général, par le moyen duquel on peut, indépendamment de ce que nous avons enseigné dans le huitieme Livre de la premiere Partie, résoudre une quantité de problêmes, dès qu'on a les centres de gravité des figures génératrices, que l'on ne peut trouver d'une façon générale, qu'avec le secours du calcul intégral : cependant on peut voir ce qu'en a dit M. Ozanam dans son Traité de Méchanique, où il trouve des centres de gravité de plusieurs figures par la Géométrie ordinaire.

Fin du douzieme Livre.





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE TREIZIEME,

Où l'on applique la Géométrie à la division des Champs; & à l'usage du Compas de proportion.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

Figure 196. 872. *Diviser un triangle en autant de parties égales qu'on voudra, par des lignes tirées de l'angle opposé à la base.*

Pour diviser un triangle ABC en trois parties égales par des lignes tirées de l'angle opposé à la base, il faut diviser la base AC en trois parties égales aux points D & E, tirer les lignes BD & BE, & le triangle sera divisé en trois triangles égaux, puisque ces triangles ont des bases égales, & qu'ils ont la même hauteur.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

Figure 197. 873. *Diviser un triangle en deux parties égales par une ligne tirée d'un point donné sur un des côtés du triangle.*

L'on demande qu'on divise le triangle ABC en deux parties égales par une ligne tirée du point D, parce que l'on suppose que ce triangle est un champ, sur le bord duquel est un

lieu avantageux au point D, qui doit être commun à chacun de ceux qui auront part au champ.

Pour résoudre ce problême, il faut diviser la base AC en deux parties égales au point E, & tirer de ce point les lignes EB & ED; puis du point B tirer la ligne BF parallele à DE; enfin tirer la ligne ED, qui divisera le triangle en deux parties égales BDFA & DFC.

Pour prouver cette opération, considérez que le triangle ABE est la moitié de tout le triangle ABC; & qu'à cause des paralleles BF & DE, le triangle BFD est égal au triangle BEF; d'où il s'ensuit que le triangle OFE, que l'on a retranché du triangle BEA, est égal au triangle ODB, que l'on a retranché du triangle EBC: ce qui fait voir que le trapeze BDFA est égal au triangle FDC.

PROPOSITION III.

Probleme.

874. *Diviser un triangle en trois parties égales par des lignes tirées d'un point pris sur un de ses côtés.* *Figure 198.*

Pour diviser le triangle ABC en trois parties égales par des lignes tirées du point D, il faut partager le côté AC en trois parties égales aux points E & F; ensuite tirer la ligne DB, à laquelle il faut mener des points E & F les paralleles EH & FG: & si l'on tire du point D les lignes DG & DH, on aura le triangle divisé en trois parties égales AHD, DHBG, & DGC.

Pour le prouver, il ne faut que tirer les lignes BE & BF, qui diviseront le triangle en trois autres triangles égaux. Or comme le triangle ABE est égal au triangle AHD, à cause des paralleles HE & BD: on verra par la même raison que le triangle DGC est égal au triangle BFC, & que par conséquent ils sont chacun le tiers de toute la figure.

PROPOSITION IV.

Probleme.

875. *Diviser un triangle en trois parties égales par des lignes tirées dans les trois angles.*

Pl. XXII. On demande un point dans le triangle ABC, duquel ayant
Figure 299. tiré des lignes dans les angles, elles divisent le triangle en trois parties égales.

Pour résoudre le problême, il faut faire la ligne AF égale au tiers de la base AC, du point F tirer la ligne FE parallele au côté AB, & diviser la parallele FE en deux également au point D, ce point sera celui qu'on cherche : car ayant tiré dans les angles du triangle les lignes DB, DA & DC, elles diviseront le triangle en trois parties égales.

Pour le prouver, je tire la ligne BF, qui me donne le triangle BAF, qui est le tiers de toute la figure : & comme ce triangle est égal au triangle ADB, à cause des paralleles, il s'ensuit que ce dernier triangle est aussi le tiers de la figure : & comme les triangles ADC & BDC sont égaux entr'eux, comme il est facile de le voir, il s'ensuit que le problême est résolu.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

Figure 300. 876. *Diviser un triangle en deux parties égales par des lignes tirées d'un point donné à volonté dans la superficie du triangle.*

Pour diviser en deux également le triangle ABC par des lignes tirées du point donné F, il faut diviser la base AC en deux également au point D, & tirer la ligne DF, à laquelle il faut mener une parallele BE ; après quoi l'on n'aura qu'à tirer les lignes EF & FB pour avoir la figure ABFE égale à la figure BFEC.

Pour le prouver, tirez la ligne BD, & considérez qu'à cause des paralleles le triangle BFE est égal au triangle BDE, & que par conséquent ce qu'on a retranché d'une part est égal à ce que l'on a ajouté de l'autre dans les deux triangles ABD & DBC.

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

Figure 301. 877. *Diviser un triangle en deux parties égales par une ligne parallele à la base.*

Pour diviser le triangle ABC par une ligne DE parallele à la

la base, il faut partager en deux également l'un des autres côtés, par exemple, le côté BC; puis chercher une moyenne proportionnelle entre tout le côté BC, & sa moitié BF: & supposant que la ligne BE soit égale à la moyenne, que l'on aura trouvée, on n'aura qu'à mener du point E la parallele ED à la base AC, pour avoir résolu le problême.

Pour le prouver, faites attention que les lignes BC, BE, BF étant proportionnelles, il y aura même raison du quarré fait sur la ligne BC au quarré fait sur la ligne BE, que de la premiere ligne BC à la derniere BF (art. 497). Or comme les triangles sont dans la même raison que les quarrés de leurs côtés homologues, le triangle BAC sera double du triangle BDE, puisque le quarré du côté BC est double du quarré du côté BE, à cause que la ligne BC est double de la ligne BF.

Si l'on vouloit diviser un triangle en trois parties égales par des lignes tirées paralleles à la base, il faudroit chercher d'abord une moyenne proportionnelle entre l'un des côtés du triangle, & les deux tiers du même côté; & ayant déterminé la longueur de cette moyenne sur le côté qu'on aura divisé, l'on tirera une parallele de l'extrêmité de cette ligne à la base: on aura un triangle intérieur, qui sera les deux tiers de celui qu'on veut partager en trois: & si l'on divise le rectangle qui contient les deux tiers du grand, en deux également, comme on vient de le faire dans la proposition précédente, tout le triangle se trouvera divisé en trois parties égales.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

878. *Diviser un Trapézoïde en deux parties égales par une ligne parallele à la base.* Figure 302.

Pour diviser le trapézoïde ABCD par une ligne parallele à la base, il faut prolonger les deux côtés AB & DC pour qu'ils se rencontrent au point G, puis élever sur l'extrêmité G la perpendiculaire GH égale à la ligne GB; tirer la ligne HA, & décrire sur cette ligne un demi-cercle, dont il faudra diviser la circonférence en deux également au point I; & ayant tiré la ligne IH, on fera GE égal à IH: & si par le point E l'on mene la parallele EF à la base AD, je dis qu'elle divisera le trapézoïde en deux parties égales.

Pour le prouver, je considere que la ligne HA est le côté du quarré, qui vaut la somme des quarrés BG & GA; & que la ligne IH est le côté d'un quarré qui vaut la moitié du quarré HA : par conséquent le quarré IH ou GE est moyenne arithmétique entre les quarrés GA & GB. Et comme les triangles semblables sont dans la même raison que les quarrés de leurs côtés homologues, il s'ensuit que les quarrés des côtés GB, GE, GA étant en progression arithmétique, les triangles GBC, GEF, GAD sont en proportion arithmétique, par conséquent se surpassent également; & comme les grandeurs dont ils sont surpassés, ne sont autre chose que le trapézoïde EC, & AF, je conclus que ces trapézoïdes sont égaux, & que par conséquent le problême est résolu.

PROPOSITION VIII.

Probleme.

Figure 303. 879. *Diviser un trapeze en deux également par une ligne parallele à l'un de ses côtés.*

Pour diviser le trapeze ABCD par une ligne parallele au côté AB, il faut prolonger les côtés BC & AD, tant qu'ils se rencontrent au point G; puis réduire le trapeze en triangle pour avoir le point F: après quoi on divisera la base AF du triangle ABF en deux également au point H; on cherchera une moyenne proportionnelle entre AG & HG, qui sera, par exemple, IG; & si du point I l'on mene la ligne IK parallele à AB, elle divisera le trapeze en deux parties égales ABKI & IKCD.

Pour le prouver, remarquez que les triangles ABG & IKG sont semblables, & qu'étant dans la même raison que les quarrés de leurs côtés homologues, ils seront comme les lignes AG & HG (art. 497). Or comme les triangles ABG & HBG ont la même hauteur, ils seront dans la même raison que leurs bases, & auront par conséquent même raison que les lignes AG & HG; d'où il s'ensuit que le triangle IKG est égal au triangle HBG. Cela posé, si l'on retranche de part & d'autre la figure HOKG qui est commune à ces deux triangles, il restera le triangle OIH égal au triangle OBK: mais comme le triangle BAH est égal à la moitié du trapeze, il s'ensuit que la figure AIKB est aussi égale à la moitié du tra-

peze, & que par conséquent la ligne IK le partage en deux également.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

880. *Diviser un trapézoïde en trois parties égales.* *Figure* 304.

Cette proposition est peu considérable, mais elle est mise ici pour servir d'introduction aux suivantes. Ainsi considérant le trapézoïde AC, qu'on propose à diviser en trois parties égales, on verra qu'il ne faut que diviser les côtés BC & AD en trois parties égales, & tirer les lignes GE & HF, qui donneront les figures égales AG, EH, FC, puisqu'elles sont composées chacune de deux triangles égaux.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

881. *Diviser un trapeze en deux parties égales.* *Figure* 305.

Pour diviser le trapeze ABCD en deux parties égales, il faut du point B tirer la ligne BH parallele à AD, & diviser les lignes BH & AD en deux parties égales aux points G & F; ensuite tirer les lignes GC & GF, qui donneront la figure CBAFG égale à la figure CGFD, qui sont chacune moitié du trapeze : car par l'opération le trapézoïde AG est égal au trapezoïde GD, & le triangle BCG est égal au triangle GCH.

Mais pour que les deux parties du trapeze fussent plus régulieres, il seroit à propos que les lignes de division CG & GF ne fissent qu'une ligne droite. Or si l'on tire à la ligne FC la parallele GE, on n'aura qu'à tirer de E en F pour avoir le trapeze divisé en deux parties égales par la seule ligne EF, comme on le peut voir par les triangles FGC & FEC, qui sont renfermés entre les mêmes paralleles.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

882. *Diviser un trapeze en deux parties égales par une ligne tirée d'un de ses angles.* *Figure* 306.

L'on demande qu'on divise le trapeze ABCD en deux parties égales par une ligne tirée de l'angle B.

Pour résoudre ce problême, tirez les diagonales AC & BD, & divisez la premiere AC en deux parties égales au point E, & de ce point menez la ligne EF parallele à BD; & si vous tirez une ligne de l'angle B au point F, elle divisera le trapeze en deux parties égales.

Pour le démontrer, considérez qu'ayant tiré les lignes EB & ED, elles donnent les triangles AED & ECD égaux entr'eux, aussi-bien que les triangles ABE & EBC. Cela étant, le trapeze se trouve divisé en deux parties égales par les lignes EB & ED : & comme les triangles qui sont renfermés entre les mêmes paralleles nous donnent EBO égal à OFD, il s'ensuit que la seule ligne BF divise le trapeze en deux également.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

Figure 307. 883. *Diviser un trapézoïde en deux parties égales par une ligne tirée d'un point pris sur l'un de ses côtés.*

Pour diviser en deux également le trapézoïde ABCD par une ligne tirée du point H, il faut commencer par réduire le trapézoïde en triangle, en tirant à la diagonale BD la parallele CF, afin d'avoir le point F pour tirer la ligne FB, qui donnera le triangle ABF égal au trapézoïde. Cela posé, il faut diviser la base AF du triangle en deux également au point E, & tirer la ligne BE, pour avoir le triangle ABE, qui sera la moitié du trapézoïde. Présentement il faut tirer la ligne BH, & lui mener du point E la parallele EG; & si on tire la ligne HG, elle divisera le trapézoïde en deux également.

Pour le démontrer, faites attention qu'à cause des paralleles, les triangles OHE & OBG sont égaux, & que par conséquent la figure ABGH est égale à la moitié du trapézoïde, puisqu'elle est égale au triangle ABE.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

Figure 308. 884. *Diviser un pentagone en trois parties égales par des lignes tirées d'un de ses angles.*

Pour diviser en trois parties égales le pentagone ABCDE par les lignes tirées de l'angle C, il faut commencer par ré-

duire le pentagone en triangle; & cela, en tirant aux lignes CA & CE les paralleles BF & DG, & en menant des lignes du point C au point F, & du même point C au point G, qui donneront le triangle FCG égal au pentagone, comme on le peut connoître facilement. Après cela, si l'on divise la base FG en trois parties égales aux points H & I, on n'aura plus qu'à tirer les lignes CH & CI pour avoir le triangle HCI, qui sera le tiers du triangle FCG, par conséquent du pentagone, & il se trouvera que les parties HABC & ICDE seront égales entr'elles, & seront par conséquent chacune le tiers du pentagone.

Application de la Géométrie à l'usage du Compas de proportion.

De tous les instrumens de Mathématique, il n'y en a point dont l'usage soit si universel que celui qu'on nomme *compas de proportion*; car il facilite la pratique de toute la théorie de la Géométrie: par exemple, la ligne des parties égales sert à diviser une ligne, selon une raison donnée, & à trouver des troisiemes & quatriemes proportionnelles: la ligne des cordes tient lieu de rapporteur, puisque par son moyen l'on peut connoître la valeur des angles, & en déterminer de quelque quantité de degrés qu'on voudra: la ligne des polygones sert à diviser un cercle en une quantité de parties égales, pour y inscrire des polygones: par le moyen de la ligne des plans, l'on trouve les côtés des figures semblables qu'on veut augmenter ou diminuer selon les raisons données: enfin la ligne des solides, qui peut passer pour la plus considérable du compas de proportion, sert à trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, à diminuer & augmenter les solides semblables, selon les raisons que l'on voudra. Ce sont toutes ces propriétés que nous allons enseigner ici, en commençant par les lignes de parties égales.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

885. *Diviser une ligne droite en tant de parties égales qu'on voudra.* *Figure* 309.

L'on trouvera marqué d'un côté sur chaque jambe du compas

de proportion une ligne que l'on verra nommée *parties égales*, parce qu'elles servent effectivement à diviser les lignes droites en parties égales : & pour faire voir comment on s'en sert, nous supposerons qu'on veut diviser la ligne HI en neuf parties, pour faire, par exemple, l'échelle d'un plan : pour cela, il faut avec le compas ordinaire, prendre la longueur de la ligne HI, & ouvrir le compas de proportion, de maniere que les pointes du compas ordinaire puissent être posées dans les points de la ligne des parties égales, où l'on verra marqué 90, qui sera, par exemple, les points D & E. Présentement laissant le compas de proportion ouvert, il faut, avec le compas ordinaire, prendre l'intervalle des points où l'on verra le nombre 10, qui sera, par exemple, l'intervalle FG. Or si vous portez présentement le compas ainsi ouvert sur la ligne HI, vous trouverez que son ouverture sera la neuvieme partie de cette même ligne,

Pour le démontrer, considérez que les triangles AFG & ADE sont semblables, & que par conséquent il y aura même raison de AF à AD, que de FG à DE. Or comme AF est la neuvieme partie de AD, FG sera la neuvieme partie de DE.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

Figure 310. 886. *Trouver une troisieme proportionnelle à deux lignes données.*

Pour trouver une troisieme proportionnelle à deux lignes données F & G, il faut prendre la premiere F avec le compas ordinaire, & la porter sur la ligne des parties égales, comme si elle occupoit, par exemple, la distance depuis A jusqu'en D ; ensuite prendre la seconde G, & la porter depuis A jusqu'en B. Il faut après cela ouvrir le compas de proportion d'une grandeur telle que la distance DE (des deux nombres égaux qui correspondent aux points D & E) soit égale à la ligne G. Présentement si l'on prend la distance BC, c'est-à-dire l'intervalle du chiffre, qui est au point B à celui qui lui correspond au point C, l'on aura la troisieme proportionnelle que l'on cherche, qui sera, par exemple, H.

Pour le prouver, considérez que les triangles ABC & EAD sont semblables, & que la ligne AB étant égale à la ligne DE, l'on aura AD : DE :: AB : BC ; par conséquent ∺ F. G. H.

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

887. *Trouver une quatrieme proportionnelle à trois lignes données.* Figure 311.

Pour trouver une quatrieme proportionnelle aux trois lignes données A, B, C, il faut prendre la ligne A, & la porter avec le compas ordinaire sur la ligne des parties égales, ensorte qu'elle occupe l'intervalle EF; puis porter la seconde B depuis le point F jusqu'au point correspondant G: enfin il faut prendre la troisieme C, ensorte qu'elle occupe l'espace EH, & l'intervalle du point H à celui qui lui correspond en I, sera la quatrieme proportionnelle, comme est, par exemple, la ligne D.

Pour le prouver, remarquez que les triangles EFG & EHI sont semblables, & par conséquent l'on aura EF : FG :: EH : HI, ou bien A : B :: C : D.

USAGE DE LA LIGNE DES POLYGONES.

PROPOSITION XVII.

PROBLEME.

888. *Inscrire un polygone dans un cercle.* Figure 312 & 313.

Par le moyen de la ligne des polygones, qui est tracée sur le compas de proportion, on peut inscrire des polygones dans un cercle depuis celui de trois côtés jusqu'à celui de douze, qui sont ceux qu'on met le plus en usage. Pour faire voir comment on s'en sert, nous supposerons qu'on veuille inscrire un octogone dans le cercle H: pour cela il faut prendre avec le compas ordinaire la grandeur du rayon HI de ce cercle, & ouvrir le compas de proportion de maniere que les points du compas ordinaire, ouvert, comme nous venons de dire, puissent être posés dans les points B & C de 6 en 6, marqués sur la ligne des polygones. Après cela l'on prendra du point F au point G, où correspondent les nombres 8, & cet intervalle sera le côté de l'octogone, qu'on portera huit fois sur la circonférence du cercle H, pour avoir les points qui serviront à décrire l'octogone.

Si au lieu de l'octogone l'on vouloit prendre dans le même cercle un décagone, il ne faudra que prendre l'intervalle de

10 en 10, ainsi des autres polygones, après avoir pris avant la distance de B en C, en posant sur ces distances le rayon du cercle, que vous voulez réduire en polygone.

PROPOSITION XVIII.

PROBLEME.

889. *Décrire un polygone régulier sur une ligne donnée.*

Nous servant de la même figure, l'on pourra, à l'aide du compas de proportion, décrire tel polygone qu'on voudra. Or si l'on veut faire sur la ligne KL un octogone, il faudra prendre cette ligne avec le compas ordinaire, & la porter sur le compas de proportion; de façon que les points du compas ordinaire tombent dans les points 8 & 8. Après cela si l'on prend l'intervalle de B en C, c'est-à-dire de 6 en 6, & que des extrêmités K & L l'on fasse une section H avec le compas ainsi ouvert, on n'aura qu'à décrire du point H un cercle, dont le rayon soit HK ou HL, & l'on pourra trouver tous les points qui serviront à décrire l'octogone, en portant huit fois la ligne KL sur la circonférence du cercle.

USAGE DE LA LIGNE DES CORDES.

PROPOSITION XIX.

PROBLEME.

Figure 312 & 314.

890. *Prendre sur la circonférence d'un cercle un angle d'autant de degrés qu'on voudra.*

Si l'on vouloit prendre sur la circonférence du cercle H un arc de 70 degrés, il faudra avec le compas ordinaire, porter sur la ligne des cordes aux endroits marqués 60 la grandeur ou le rayon HI: ainsi supposant que l'angle ABC est formé par les lignes des cordes du compas de proportion, de maniere que l'on ait ouvert la grandeur DE égale au rayon HI, l'on prendra l'intervalle de F en G, que je suppose être de 70 en 70, & la ligne FG sera la corde de 70 degrés, qu'on n'aura qu'à porter sur la circonférence du cercle, pour avoir l'arc MI qu'on demande.

PROPOSITION XX.

PROPOSITION XX.

PROBLEME.

891. *Un angle étant donné sur le papier, en trouver la valeur par le moyen de la ligne des cordes.*

Pour connoître la valeur d'un angle ABC, il faut, du point B, comme centre, décrire l'arc AC d'une ouverture de compas indéterminée; ensuite prendre le rayon BC, & ouvrir le compas de proportion, de maniere que l'intervalle de 60 en 60, marqué sur la ligne des cordes, soit égal au rayon. Présentement si on prend avec le compas la corde AC, & qu'on la porte sur la ligne des cordes, de façon qu'il convienne dans deux points également éloignés du centre, les nombres qui correspondront à ces points, donneront la valeur de l'angle: ainsi supposant que ce soit de 50 en 50, l'on connoîtra que l'angle ABC est de 50 degrés.

PROPOSITION XXI.

PROBLEME.

892. *Connoissant la quantité de degrés d'un arc de cercle, trouver son rayon.* *Figure 314 & 315.*

Si l'on a un arc de cercle BA de 50 degrés, & qu'on veuille connoître le rayon du cercle de cet arc, il faudra prendre avec le compas la corde BA, & la porter sur la ligne des cordes pour ouvrir le compas de proportion de 50 en 50 : par exemple, si les points D & E correspondent au nombre 50, il faut faire l'intervalle DE égal à la corde BA; & si après cela l'on prend l'intervalle FG de 60 en 60, elle sera le rayon que l'on demande, c'est-à-dire que la ligne FG sera égale au demi-diametre CB.

PROPOSITION XXII.

PROBLEME.

893. *Ouvrir le compas de proportion de maniere que les lignes des cordes fassent tel angle que l'on voudra, supposant que les lignes AB & CB soient celles des cordes; on demande de faire avec elles un angle de 70 degrés.* *Figure 314.*

Il faut prendre avec le compas ordinaire l'intervalle qu'il y a du centre B au point F ou G, que je suppose être de 70 degrés ; puis porter les pointes du compas ainsi ouvert dans les points de 60 en 60 : par exemple, si les points D & E sont ceux de 60 en 60, il faut faire la distance DE égale à l'intervalle BF, & les lignes des cordes formeront l'angle ABC de 70 degrés.

PROPOSITION XXIII.

PROBLEME.

Figure 314. 894. *Le compas de proportion étant ouvert d'une grandeur quelconque, connoître la valeur de l'angle formé par les lignes des cordes.*

Si l'on veut sçavoir la valeur de l'angle ABC, formé par les lignes des cordes, l'on n'aura qu'à prendre avec le compas ordinaire l'intervalle de 60 en 60, puis la porter sur l'une des cordes, en commençant du centre, l'on trouvera la quantité de degrés que contient l'angle : ainsi les points D & E étant supposés ceux de 60, l'on prendra la ligne DE pour la porter sur BF ; & si l'on voit que le point F correspond à un nombre, par exemple, de 70, l'on verra par-là que l'angle ABC est de 70 degrés.

REMARQUE.

Comme l'on applique quelquefois des pinnules aux extrêmités des cordes du compas de proportion, pour prendre des angles sur le terrein, on peut en former de telle ouverture que l'on voudra, puisque par ces deux propositions l'on peut faire un angle quelconque avec les lignes des cordes, & qu'on peut d'ailleurs connoître la valeur des angles qu'elles peuvent former.

USAGE DE LA LIGNE DES PLANS.

PROPOSITION XXIV.

PROBLEME.

Figure 316 & 321. 895. *Faire un quarré qui soit à un autre selon une raison donnée.*

Si l'on veut faire un quarré qui ait même raison à un autre que 5 à 2, il faut prendre le côté AB du quarré donné, &

ouvrir le compas de proportion de maniere que l'intervalle HI des points 2 & 2 de la ligne des plans soit égal au côté AB, c'est-à-dire que cette ligne soit égale à HI; & si l'on prend l'intervalle KL, que je suppose de 5 en 5, la ligne KL sera le côté du quarré que l'on demande: ainsi faisant CD égal à KL, il y aura même raison du quarré AB au quatré de CD, que de 5 à 2.

PROPOSITION XXV.

PROBLEME.

896. *Connoître le rapport d'un quarré à un autre.* *Figure 316 & 321.*

Se servant de la même figure, si l'on veut sçavoir le rapport du quarré AB au quarré CD, l'on n'aura qu'à prendre le côté AB du plus petit quarré, & ouvrir le compas de proportion, de maniere que le compas ordinaire se trouve dans deux points également éloignés du centre sur les lignes des plans, comme est, par exemple, HI: ensuite il faut prendre le côté CD de l'autre quarré, & chercher avec le compas un intervalle tel que KL, qui lui convienne sur la ligne des plans; & le rapport qu'il y aura entre les deux nombres qui se trouveront aux points H & K, sera le même que celui du quarré AB au quarré CD.

PROPOSITION XXVI.

PROBLEME.

897. *Ouvrir le compas de proportion de maniere que les lignes des plans forment un angle droit.* *Figure 317.*

Pour faire un angle droit tel que BAC avec les deux lignes des plans, il faut avec le compas ordinaire prendre l'intervalle du centre à un nombre quelconque D, qui sera, par exemple, 20, puis ouvrir le compas de proportion, de maniere que l'intervalle des points (qui correspondront à la moitié de ce nombre) soit égal à la longueur AD: ainsi prenant les nombres 10 & 10, qui seront moitié de 20, l'on n'aura qu'à faire l'intervalle FG égal à la distance AD, & les lignes des plans AB & AC formeront un angle droit.

PROPOSITION XXVII.

PROBLEME.

Figure 318 & 321. 898. *Faire un quarré égal à deux autres donnés.*

Pour faire un quarré qui soit égal aux deux autres AB & CD, il faut ouvrir le compas de proportion, de maniere que les lignes des plans forment un angle droit, comme est l'angle EFG; puis prendre sur la ligne FE la longueur FI égale au côté AB, & bien retenir le nombre où l'extrêmité I viendra aboutir : ensuite il faut prendre de même la longueur FH égale au côté CD de l'autre quarré; & la distance de H en I, qui sera, par exemple, celle de 18 en 5, sera le côté du quarré égal aux deux quarrés proposés.

REMARQUE.

Comme toutes les figures semblables sont dans la même raison que les quarrés de leurs côtés homologues, l'on pourra faire les mêmes opérations pour les triangles, les polygones & les cercles que l'on a faits dans les propositions précédentes pour les quarrés.

USAGE DE LA LIGNE DES SOLIDES.

PROPOSITION XXVIII.

PROBLEME.

Figure 319 & 322. 899. *Faire un cube qui soit à un autre selon une raison donnée.*

Si l'on veut avoir un cube qui soit au cube AB, comme 3 est à 7, il faut commencer par prendre avec le compas ordinaire le côté AB, & le porter sur la ligne des solides, de maniere qu'il corresponde aux points 7 & 7 : ainsi supposant que l'intervalle des points K & L soit celui du nombre 7, l'on n'aura plus qu'à prendre l'intervalle IH de 3 en 3 pour avoir le côté du cube que l'on demande. Ainsi faisant CD égal à HI, il y aura même raison du cube AB au cube CD, que de 7 à 3.

PROPOSITION XXIX.

PROBLEME.

900. *Trouver le rapport qui est entre deux cubes.*

Pour trouver le rapport qui est entre deux cubes quelconques CD & AB, il faut prendre le côté CD du plus petit cube, & ouvrir le compas de proportion, ensorte que l'intervalle HI, pris vers le centre, soit égal à ce côté. Après cela, l'on prendra le côté AB pour le porter en un endroit, comme KL, dont l'intervalle lui soit égal, & le rapport que l'on trouvera entre les nombres qui seront marqués aux points I & K, sera le même que celui du cube CD au cube AB. *Figure* 319 & 322.

REMARQUE.

Comme tous les solides semblables sont dans la même raison que les cubes de leurs côtés homologues, il s'ensuit que l'on pourra faire à l'égard des cylindres, des cônes, des pyramides, & des spheres, les mêmes opérations que l'on vient de faire pour les cubes, comme dans les propositions précédentes.

APPLICATION DE LA GEOMETRIE A L'ARTILLERIE.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME.

901. *Faire l'analyse de l'alliage du métail dont on fait les pieces de canon.*

Pour connoître l'utilité de ce problême, il faut être prévenu que le métail dont on fait les pieces d'Artillerie de fonte, est composé de *rosette*, que l'on appelle communément *cuivre rouge*, & d'*étain* fin d'Angleterre; & comme il doit y avoir une proportion entre la rosette & l'étain qui composent le métail, les Fondeurs les plus expérimentés suivent celle de 100 à 12, c'est-à-dire que sur 100 livres de rosette ils mettent 12 livres d'étain.

Or comme il arrive tous les jours que dans les Fonderies on fond des pieces qui sont hors d'état de servir pour en faire de nouvelles, & que les Fondeurs sont embarrassés pour sçavoir si le métail est conforme à l'alliage qu'ils suivent, pour qu'il ne soit ni trop aigre ni trop doux; voici comment on pourra connoître au juste la quantité de rosette & d'étain qui compose le métail des pieces.

C'est une chose démontrée par l'expérience, & dont la raison physique est facile à appercevoir, que les métaux perdent

de leur pesanteur lorsqu'ils sont dans l'eau: par exemple, si l'on attache à une balance romaine un morceau de plomb pesant 48 livres, l'on verra que le corps étant mis dans l'eau, de sorte qu'il en soit environné de toutes parts, au lieu de peser 48 livres, n'en pesera que 44, parce que le plomb perd dans l'eau la douzieme partie de son poids, ainsi des autres métaux qui perdent plus ou moins, selon qu'ils sont plus ou moins pesans. Mais comme nous avons besoin de connoître ici ce que perdent l'étain & la rosette, l'on sçaura que l'étain perd la septieme partie de son poids, & que la rosette n'en perd que la neuvieme partie.

Cela posé, pour connoître la quantité de rosette & d'étain qui se trouve dans une piece de 24 livres de balle, qui pese environ 5200 livres, il faut avoir un morceau de la piece, qui sera, par exemple, un de ses tronçons, & le peser bien exactement; & supposant qu'il pese 163 livres, on le pesera ensuite dans l'eau, pour voir combien il perd de sa pesanteur, & nous supposerons qu'il en perd 19 livres.

Présentement il faut considérer le métail comme étant tout de rosette, afin de voir, selon cette supposition, combien il perd de sa pesanteur, & l'on trouvera qu'il perd $\frac{164}{9}$; & considérant aussi le métail comme étant tout étain, l'on cherchera combien il perd de sa pesanteur, & l'on trouvera qu'il perd $\frac{163}{7}$: ainsi si l'on nomme a la pesanteur du métail, b sa perte, c la perte du poids du métail, s'il étoit tout de rosette, d la perte du même poids, s'il étoit tout étain, l'on aura $a = 163$, $b = 19$, $c = \frac{163}{9}$, $d = \frac{163}{7}$; & nommant x la quantité de rosette qui est dans le métail, & y la quantité d'étain, voici comment on trouvera la valeur de ces deux inconnues.

Il faut commencer par faire deux proportions, en disant: Comme a, poids du métail considéré comme rosette est à c, perte de ce poids de rosette, ainsi x, qui est la quantité de rosette inconnue, est à la perte du poids de la même rosette inconnue; ce qui donne $a : c :: x : \frac{cx}{a}$; & faisant la même chose pour l'étain, l'on dira: Comme a, poids du métail considéré comme étain est à d, perte de ce poids d'étain, ainsi y, valeur de la quantité inconnue, est à la perte de cette quantité d'étain, qui donnera encore cette proportion $a : d :: y : \frac{dy}{a}$.

Mais comme l'on a trouvé $\frac{cx}{a}$ pour la perte du poids de la rosette qui est dans le métail, & $\frac{dy}{a}$ pour la perte du poids d'étain, qui est aussi dans le métail, & que ces deux quantités font ensemble la perte du poids du métail : l'on aura donc cette équation $\frac{cx}{a} + \frac{dy}{a} = b$; & comme x & y représentent la rosette & l'étain qui composent le métail, l'on pourra encore former cette équation $x + y = a$; & dégageant une de ces deux inconnues, qui sera, par exemple x, l'on aura $x = a - y$; & substituant la valeur de x dans l'équation $\frac{cx}{a} + \frac{dy}{a} = b$, il viendra $\frac{ac - yc + dy}{a} = b$, ou bien $c + \frac{dy - yc}{a} = b$. Or si l'on fait passer c du premier membre dans le second, & que l'on multiplie les deux membres par a, il viendra $dy - yc = ab - ac$, qui étant divisé par $d - c$, donne $y = \frac{ab - ac}{d - c}$, où y est égal à des quantités connues : par conséquent si l'on met dans l'équation $x = a - y$ la valeur de y, l'on aura $x = a - \frac{ab + ac}{d - c} = \frac{ad + ab}{d - c}$, qui donne aussi la valeur de x.

Or pour connoître y en nombres, je considere qu'il est égal à $ab - ac$ divisé par $d - c$: & comme $b - c$ est multiplié par a, je soustrais de 19 de b $\frac{163}{9}$ valeur de c, & le reste est $\frac{8}{9}$, que je multiplie par 163, qui est la valeur de a pour avoir $\frac{1304}{9}$, que je divise par $\frac{163}{7} - \frac{163}{9}$ valeur de $d - c$, qui est $\frac{416}{63}$; la division étant faite, l'on trouvera 28 pour la valeur de y : & cherchant de même la valeur de x, l'on trouvera qu'elle est de 135 ; ce qui fait voir qu'il y a 135 livres de rosette, & 28 livres d'étain dans le morceau de métail.

Pour sçavoir présentement la quantité d'étain qu'il y a dans la piece de canon, il faut dire : Si dans 163 livres de métail il y a 28 livres d'étain, combien y en aura-t-il dans 5200 livres, poids de la piece ? l'on trouvera qu'il y en a environ 894 livres, & par conséquent il y a 4306 livres de rosette.

Mais comme la raison de 4306 livres à 894 n'est pas égale à celle de 100 à 12, parce que nous avons supposé qu'il y avoit dans le métail beaucoup plus d'étain qu'il n'en falloit, il sera facile de sçavoir combien il faut ajouter de rosette pour que l'alliage soit bien fait, en disant : Si pour 12 livres d'étain il faut 100 livres de rosette, combien en faudra-t-il pour 894

livres. On trouvera qu'il en faut 7450 livres; & comme il y en a déja 4306 livres, il faudra en ajouter 3144 livres.

Si l'on a plusieurs pieces à refondre en même-tems, l'on cherchera par la regle précédente ce qui manque à chacune de rosette ou d'étain, afin que l'alliage soit dans la raison de 100 à 12.

PROPOSITION XXXI.

PROBLEME.

902. *Trouver le calibre des boulets & des pieces de canon.*

Pour trouver le calibre des boulets de telle pesanteur que l'on voudra, il faut sçavoir d'abord le diametre d'un boulet de même métail d'un poids déterminé, comme, par exemple, celui d'une livre de fer coulé, qui est d'un pouce 10 lignes 8 points, & considérer le diametre comme étant divisé en un grand nombre de petites parties égales, comme en 500 (pour que dans le calcul on puisse négliger les restes), ensuite cuber la valeur du diametre en petites parties, pour avoir 125000000 pour son cube, que nous regarderons ici comme le boulet même, parce que les boulets étant des spheres, ils sont dans la même raison que les cubes de leurs diametres: c'est pourquoi si l'on veut avoir le diametre d'un boulet de 24, l'on n'aura qu'à multiplier le cube d'un boulet d'une livre, c'est-à-dire 125000000 par 24 pour avoir 3000000000, qui sera le cube du diametre du boulet de 24, puisqu'il est 24 fois plus grand que l'autre. Ainsi en extrayant la racine cube de 3000000000, l'on aura 1442 petites parties, que l'on pourra changer en pouces, lignes & points, en disant: Si 500 petites parties donnent un pouce 10 lignes 8 points pour le diametre du boulet d'une livre, combien donneront 1442 petites parties pour le diametre du boulet de 24. On trouvera, après la regle faite, que le diametre est de 5 pouces 5 lignes, & un peu plus de 4 points.

Si l'on veut avoir le diametre de tout autre boulet, par exemple, celui de 16, l'on fera comme on a fait pour celui de 24, avec cette différence, qu'au lieu de multiplier 125000000 par 24, il faudra le multiplier par 16, afin d'avoir le cube du diametre du boulet qu'on cherche: & l'on pourra sur ce principe calculer une table pour tous les autres boulets.

Mais

Mais comme l'on a besoin de connoître particuliérement les diametres des boulets pour faire les coquilles dans lesquelles on coule le fer qui doit les former, & que la plûpart pourroient se trouver embarrassés, s'ils ne connoissoient pas le diametre du boulet d'une livre, ou s'ils soupçonnoient qu'il ne fût pas assez juste pour servir de base à une regle générale, en ce cas l'on pourra faire couler un boulet de tel diametre que l'on voudra, comme de 3 pouces, sans s'embarrasser de sa pesanteur qu'après qu'il sera fondu, parce que pour lors on le pesera bien exactement; & supposant qu'on a trouvé qu'il pese 5 livres & demie, l'on réduira son diametre en petites parties pour le cuber, & ensuite l'on dira: Si 5 livres & demie donnent tant de petites parties pour le cube du diametre de son boulet, combien une livre donnera-t'elle de petites parties pour le cube de son diametre: & lorsqu'on aura trouvé ce que l'on cherche, on en extraira la racine cube, qui donnera en petites parties la valeur du diametre du boulet d'une livre, qu'il sera facile de réduire en pouces, lignes, &c. sçachant que le diametre du premier boulet est de 3 pouces.

Pour trouver le diametre des pieces, l'on sçaura qu'il ne differe que de peu de chose de celui de leurs boulets; & comme cette différence, qui est ce qu'on appelle *vent* du boulet, n'est pas la même pour toutes les pieces, il suffira de sçavoir le diametre de la piece d'une livre, pour trouver celui de tous les autres: & comme le diametre est d'un pouce 11 lignes 6 points, parce que le boulet de cette piece a environ une ligne de vent, on supposera, comme on a fait pour son boulet, que le diametre de la piece est divisé en 500 parties; & voulant trouver celui de la piece de 24, l'on cubera 500 pour multiplier le produit par 24, dont on extraira la racine cube, qui est encore 1442, dont on pourra connoître la valeur en pouces, lignes, &c. en disant: Si 500 donnent un pouce 11 lignes 6 points pour le diametre de sa piece d'une livre, combien donneront 1442 pour le diametre de la piece de 24: on trouvera que ce diametre est de 5 pouces 7 lignes 9 points.

PROPOSITION XXXII.

PROBLEME.

903. *Trouver le diametre des cylindres servant à mesurer la poudre.*

L'on ne se sert presque jamais de balances dans les magasins & dans les Arcenaux pour mesurer la poudre que l'on distribue aux troupes, soit pour des détachemens ou pour tout autre sujet, parce qu'il faudroit trop de tems pour en faire la distribution : on se sert, au lieu de balances, de certaines mesures de fer blanc ou de cuivre, de figure cylindrique, qui contiennent plus ou moins de livres de poudre, ou de parties de livres. Or comme souvent l'on est obligé de faire faire de ces mesures, & qu'on ne peut, sans le secours de la Géométrie, sçavoir les dimensions qu'il faut leur donner pour contenir une quantité de poudre quelconque, voici une regle générale qui pourra servir pour trouver le diametre de toutes les mesures que l'on voudra : mais comme il faut que ces mesures soient semblables pour que la regle puisse convenir à toutes également, nous supposerons que ces mesures étant cylindriques, la hauteur du cylindre est égale au diametre du cercle qui lui sert de base.

Cela posé, étant prévenu qu'une mesure cylindrique, dont le diametre est de 3 pouces, contient 4 livres de poudre, l'on trouvera le diametre d'une mesure pour autant de livres que l'on voudra : par exemple, pour 10 livres, en disant : Si 4 livres de poudre donne 125 pouces pour le cube du diametre de sa mesure, combien donneront 10 livres de poudre ? l'on trouvera 312 pouces & demi cubes, dont il faudra extraire la racine qui sera de 6 pouces 8 lignes 9 points, qui est la grandeur qu'il faut donner au diametre de la mesure de 10 livres, qui doit avoir aussi la même hauteur : il en sera de même pour telle autre mesure que l'on voudra.

Mais si l'on ignore le diametre d'une mesure pour une certaine quantité de poudre, & si l'on n'a aucun terme de la proportion connue, dans ce cas il faut faire faire une mesure à laquelle on donnera le diametre que l'on voudra, & on la remplira de poudre, afin de sçavoir ce qu'elle contient ; & sçachant ce qu'elle contient, & la valeur du diametre, l'on se servira de la regle précédente pour trouver le diametre de toutes les autres mesures, faisant attention que ces mesures ne peuvent avoir lieu que pour la poudre dont les grains sont approchans de même grosseur que sont ceux de la poudre à canon : car si les grains étoient plus fins, les mesures contiendroient moins de poudre en pesanteur.

L'on voit que cette regle est établie sur ce que les cylindres

femblables font dans la même raifon que les cubes de leurs diametres. Or comme les mefures dont il s'agit ici font fuppofées avoir une hauteur égale à leur diametre, elles feront donc femblables, & par conféquent leurs folidités, qui ne font autre chofe que la quantité de poudre qu'elles contiennent, feront dans la raifon des cubes des diametres.

Mais fi l'on vouloit avoir des mefures, dont la hauteur fût plus grande ou plus petite que le diametre de la bafe (que nous nommerons *mefure irréguliere*), il faudroit chercher le diametre de la mefure pour la quantité de poudre que l'on veut que cette mefure contienne, comme fi cette mefure devoit être réguliere, c'eft-à-dire que le diametre fût égal à la hauteur; enfuite cuber le diametre, & divifer le produit par la hauteur de la mefure irréguliere, & le quotient fera la valeur du quarré du diametre de cette mefure. Après cela, fi l'on extrait la racine quarrée de cette quantité, l'on aura le diametre du cercle qui doit fervir de bafe à la mefure que l'on cherche.

Comme les cercles font dans la raifon des quarrés de leurs diametres, l'on pourra prendre à la place des cercles les quarrés de leurs diametres. Or comme les cylindres font égaux, lorfque leurs hauteurs & leurs bafes, ou les quarrés des diametres de leurs bafes font réciproques, nommant a le diametre de la bafe du cylindre régulier, a fera auffi fa hauteur; & nommant b la hauteur du cylindre irrégulier, & x le diametre de fa bafe, il faut, pour que le cylindre régulier foit égal à l'irrégulier, que $b:a::aa:xx$, d'où l'on tire $bxx=aaa$, ou bien $xx=\frac{aaa}{b}$, ou encore $x=\sqrt{\frac{aaa}{b}}=a\sqrt{\frac{b}{a}}$, qui fait voir la raifon de la regle précédente.

Ce que nous venons de dire à l'égard des mefures pour la poudre, fe peut appliquer à toutes autres mefures cylindriques pour telles chofes que ce foit.

PROPOSITION XXXIII.

PROBLEME.

904. *Trouver quelle longueur doivent avoir les pieces de canon par rapport à leurs calibres.*

Les extrêmités dans lefquelles on eft tombé pour régler la

longueur des pieces de canon, en faisant celles de même calibre, tantôt fort longues, tantôt fort courtes, m'ont fait penser qu'il devoit y avoir une longueur pour les pieces cylindriques de chaque calibre, qui étoit telle, qu'avec la charge ordinaire le boulet reçût la plus grande vîtesse que l'impulsion de la poudre est capable de lui donner ; & si pour la connoître l'on est obligé de considérer les effets de la poudre dans le canon, voici, à mon avis, ce que l'on peut dire de plus plausible sur ce sujet.

Pl. XXIII. *Figure* 323. Comme l'on ne peut douter que plus il y a de poudre enflammée dans un canon, & plus le boulet reçoit de mouvement, nous supposerons que l'on a mis pour la charge de la piece DG la quantité de poudre DE. Cela posé, aussi-tôt que le feu de l'amorce se fera introduit au point A de la lumiere, les premiers grains de poudre enflammés raréfieront l'air qu'ils contiennent, & celui dont ils sont environnés, & écarteront à la ronde tout ce qui leur fera obstacle, & successivement la poudre continuant à s'enflammer, elle occupera un bien plus grand volume qu'auparavant ; & agissant avec beaucoup de violence à droite & à gauche du point A, & particuliérement du côté où elle trouvera moins de résistance, qui est celui du boulet qu'elle chassera du côté de la bouche, avec une grande quantité de poudre, qui n'aura pas encore eu le tems de s'enflammer, & la vîtesse du boulet augmentant dans la même raison du volume de la poudre enflammée, il se trouvera dans un instant chassé en G pour sortir de la piece. Or si dans le tems que le boulet a parcouru l'espace EG, la poudre qui l'accompagnoit n'a pu être enflammée entiérement, il en sortira une quantité F avec le boulet, qui s'écartera comme du petit plomb, au lieu que si la piece avoit été plus longue que je ne la suppose ici, le boulet ayant à parcourir un plus grand espace, la poudre qui a été chassée avec lui auroit eu le tems de s'enflammer, & par conséquent auroit été capable d'un plus grand effort : ainsi l'on peut conclure que la proportion qu'il doit y avoir entre DE & DG, c'est-à-dire entre la charge & la longueur de la piece, doit être telle que la poudre acheve de s'enflammer entiérement à l'instant que le boulet sort de la piece ; d'où il suit qu'un canon qui est chargé plus qu'il ne faut, ne chasse pas pour cela son boulet plus loin, & même au contraire, puisque plus il y aura de parties entre la poudre

agissante & le boulet, moins il recevra de mouvement: & cela est si vrai, que si au lieu d'un bouchon de fourrage ordinaire entre la poudre & le boulet, l'on en mettoit cinq ou six, l'on s'appercevroit visiblement que la portée ne seroit pas si longue que s'il n'y en avoit qu'un, comme j'en ai fait l'expérience: car le boulet ne recevant de mouvement que par l'impulsion que la poudre a imprimée au premier bouchon, celui-ci ne peut le communiquer aux autres, pour aller jusqu'au boulet, sans l'altérer; ce qui fait qu'il s'en faut de beaucoup que le boulet n'ait autant de vîtesse que s'il avoit reçu son impulsion immédiatement de la poudre même. Ainsi le trop de poudre fera le même effet que s'il y avoit trop de bourre.

Mais si au lieu d'une piece trop courte nous en supposons une trop longue, comme LO, il n'y a point de doute, quoiqu'elle soit de même calibre que la précédente, & chargée avec la même quantité de poudre, qu'elle ne porte pas si loin que si elle étoit d'une juste longueur: car supposant que la poudre LM faisant son effet, ait poussé le boulet jusqu'au point N, qui est l'endroit où elle auroit achevé de s'enflammer entiérement, il est certain que si le boulet a encore à parcourir l'espace NO, il sortira avec moins de violence de l'endroit O, que s'il étoit parti d'abord de l'endroit N: car dans le tems que le reste de la poudre acheve de s'enflammer vers N, la flamme de celle qui a commencé vers la culasse se dilate, & l'air raréfié s'amortissant de ce côté-là, il n'y a plus que celui qui est vers N, qui fait impression sur le boulet; de sorte que si la piece étoit assez longue pour que l'impulsion de la poudre fût entiérement amortie à l'instant que le boulet est prêt à sortir de la piece, il pourroit arriver que l'air que le boulet auroit chassé avec beaucoup de violence, cherchant à rentrer dans la piece, le repousseroit vers la culasse; ce qui arriveroit sans doute, si à l'instant que le feu a pris à la poudre, l'on pouvoit boucher la lumiere avec assez de promptitude, pour empêcher que l'air que le boulet chasse ne soit remplacé par celui qui s'introduiroit par-là.

Puisque les pieces d'une trop grande longueur font moins d'effet que les autres, il ne faut donc plus s'étonner si la coulevrine de Nancy (contre l'opinion commune) a moins de portée que les pieces de même calibre, comme M. Dumez

l'a observé dans les épreuves qu'il a faites à Dunkerque.

Ce raisonnement fait voir que la charge doit dépendre de la longueur de la piece, & la longueur de la piece de la force de la charge : mais comme pour de grosses charges il faudroit de longues pieces, dont le service & le transport souffriroient bien des difficultés, joint à la grande consommation de poudre que l'on seroit obligé de faire ; comme il semble que la méthode de charger (comme on le pratique ordinairement) les pieces à la moitié du poids du boulet est la meilleure, il faut, en comptant là-dessus, chercher quelle doit être la longueur d'une piece par rapport à un calibre quelconque, parce qu'après cela l'on peut établir des regles pour connoître la longueur de tous les calibres imaginables. Je crois que le plus sûr moyen pour parvenir à cette connoissance, est de faire un canon fort long, dont le calibre seroit, par exemple, de 8 livres, & le charger à la moitié du poids de son boulet, puis le tirer de but en blanc, pour voir sa portée : & comme l'on suppose que la piece est plus longue qu'elle ne doit être, on la sciera pour la diminuer d'un calibre, & on tirera un autre coup pour voir de combien elle aura porté plus loin que le premier ; & continuant toujours à raccourcir la piece, en la diminuant de quelques pouces, sur la fin l'on arrivera à un point où la piece, pour être un peu trop courte, portera moins loin qu'auparavant ; & considérant la longueur moyenne entre celle du dernier coup & le pénultieme, l'on aura au juste la longueur de la piece par rapport à sa charge, pour que la poudre soit capable du plus grand effet qu'il est possible avec la même quantité de poudre.

Cependant comme ce que je propose ici pourroit peut-être n'avoir pas ses partisans, quoique le sujet soit assez de conséquence pour prendre toutes ces mesures, voici encore ce que l'on pourroit faire.

Comme l'expérience fait voir tous les jours que les petites pieces portent plus loin à proportion que les grosses, puisque, selon les épreuves qu'en a faites M. Dumez, il a trouvé que nos pieces de France chargées aux deux tiers de la pesanteur du boulet, & pointées à 45 degrés, portoient,

Premiérement, { la piece de 24 à 2250 toises.
de 16 à 2020
de 12 à 1870
de 8 à 1660
& la piece de 4 à 1520 ;

Ce qui me fait croire que la longueur des petites pieces est mieux proportionnée par rapport à leurs calibres, que celle des grosses : ainsi supposant qu'une piece de canon de 4, qui a ordinairement 6 pieds de longueur dans l'ame, soit bien proportionnée, voici comment on pourra trouver la longueur des pieces de tel calibre que l'on voudra.

Considérant A C comme étant la longueur de l'ame d'une piece de 4; A B l'espace qu'occupe la poudre dans le canon; & H K la longueur de la piece de 24, que je cherche, & H I l'espace qu'occupe sa charge; je fais attention que la poudre agissant dans la piece de 4 & dans la piece de 24, dans la raison de la quantité qu'il s'en trouve dans l'une & dans l'autre (en faisant abstraction des forces unies), il faut, afin que le boulet de l'une & de l'autre piece parte dans le moment que la poudre est entiérement allumée, qu'il y ait même raison du cylindre A B au cylindre A C, que du cylindre H I au cylindre H K: & comme je puis prendre à la place des cylindres A B & H I la quantité de poudre qu'ils contiennent, & à la place des cylindres A C & H K le cube de leurs axes, puisqu'ils doivent être semblables, l'on pourra (pour trouver la longueur H K) dire: Si deux livres de poudre, qui est la charge de la piece de 4, donne 216 pour le cube de son axe, combien donneront 12 livres de poudre, qui est la charge de la piece de 24, pour le cube de l'axe de la même piece? l'on trouvera 1296 pieds cubes, dont la racine cube est 11 pieds, moins très-peu de chose: ainsi l'on voit que l'ame de la piece de 24, pour être proportionnée à sa charge par rapport à celle de 4, doit avoir 11 pieds de longueur; & comme l'ame de ces mêmes pieces n'a ordinairement qu'environ 9 pieds: selon ce principe, elles sont trop courtes de 2 pieds. Pl. XXIII. *Figure* 323.

L'on pourra trouver de même la longueur de toutes les autres pieces, lorsqu'elles auront leurs chambres cylindriques: car si elles étoient autrement, il faudroit prendre d'autres mesures.

Les pieces dont on se sert ordinairement n'étant point d'une longueur proportionnée à celle de la piece de 4, & comme il n'y a point d'apparence qu'on les fonde toutes exprès pour les y faire convenir, il faut, puisque la charge d'une piece dépend de sa longueur, comme la longueur dépend de la charge, faire voir comment on peut trouver la charge de toutes les pieces, en connoissant le calibre & la longueur. Comme les ames des pieces qui ne sont point semblables, sont dans la raison composée des quarrés des diametres des pieces & des axes des mêmes pieces, si l'on multiplie le quarré du diametre de chaque piece par l'axe, l'on pourra trouver la charge qui convient aux pieces, puisque ces charges doivent être dans la raison des produits des quarrés des diametres des pieces, par les axes des mêmes pieces. Ainsi voulant sçavoir la charge d'une piece de 24 ordinaire, dont l'ame a 9 pieds de longueur; j'ai recours à la piece de 4, pour en prendre le diametre, qui est 3 pouces, que je quarre pour en multiplier le quarré par la longueur de l'axe, qui est 6 pieds, dont le produit est 54; ensuite je quarre le diametre de la piece de 24, qui donne 29 pouces 9 lignes 6 points, que je multiplie par l'axe, qui est 9, & le produit est 268. Après cela, je fais une Regle de Trois, en disant: Si 54, produit du quarré du diametre de la piece de 4 par son axe, donne deux livres pour sa charge, combien donneront 268, produit du quarré du diametre de la piece de 24 par son axe, pour la charge de la même piece? l'on trouvera 10 livres moins quelque petite chose, qui fait voir que les pieces de 24, dont l'ame à 9 pieds de longueur, doivent être chargées à 10 livres de poudre, quand la piece de 4 sera chargée à la moitié de son boulet.

De la même façon, si l'on veut sçavoir quelle doit être la charge de la coulevrine de Nancy, par rapport à la piece de 4, chargée à la moitié de son boulet, il faut être prévenu que cette piece est de 18 livres de balle, que son diametre est de 5 pouces 1 ligne 6 points, & que la longueur de son axe est de 20 pieds: ainsi faisant la regle, on trouvera qu'elle doit être chargée à 20 livres de poudre.

Mais comme son métail ne résisteroit peut-être pas à une charge aussi forte que celle-ci, il n'y a qu'à voir la longueur qui lui convient pour la charge de la moitié de son boulet, c'est-à-dire pour 9 livres de poudre, en disant: Si 2 livres de poudre,

poudre, qui est la charge de la piece de 4, donnent 216 pour le cube de son axe, que donneront 9 livres de poudre, qui est la charge d'une piece de 18, pour le cube de son axe, que l'on trouvera de 972, dont la racine cube est environ 9 pieds 11 pouces, qui est la longueur que devroit avoir l'ame de la coulevrine, pour être bien proportionnée? Ainsi l'on connoîtra que cette piece est environ de 10 pieds plus longue qu'elle ne devroit être.

905. Depuis 1723 que j'ai écrit ce discours, j'ai fait des épreuves pour sçavoir quelle étoit la charge des pieces de différens calibre en usage en France pour chasser le boulet à la plus grande distance, ou pour battre en breche avec le plus de violence qu'il est possible, afin que, partant de ce point, on pût la diminuer selon les occasions, & jamais l'augmenter. J'ai fait mes premieres épreuves à l'École de la Fere, dans le mois d'Octobre 1739, en présence de Messieurs les Officiers d'Artillerie, en chargeant chaque piece de 8, de 12, de 16, & de 24, avec des charges qui alloient en augmentant par gradation d'une demi-livre de poudre, en commençant par une charge égale à la huitieme partie de la pesanteur du boulet, & finissoient par celle des deux tiers de la même pesanteur. L'on tiroit de suite quatre coups avec la même charge, dont on prenoit ensuite la portée moyenne. J'entends que le premier coup pour la piece de 16 a été chargée de deux livres de poudre, que la seconde charge a été de deux livres & demie, la troisieme de trois livres, la quatrieme de trois livres & demie, ainsi de suite jusqu'à dix livres & demie, qui est à peu près les deux tiers de 16, pesanteur du boulet. On en a usé de même pour les pieces des autres calibres toutes pointées sous l'angle de 4 degrés formé par la direction de l'ame avec l'horizon.

Ayant mesuré bien exactement toutes les portées de ces pieces pour chaque charge différente, j'ai reconnu que celle qui produiroit le plus grand effet, c'est-à-dire qui chassoit le boulet à la plus grande distance, étoit à peu près égale au tiers de la pesanteur du même boulet, & que tout ce que l'on employoit de poudre au-delà étoit en pure perte, parce qu'elle ne s'enflammoit qu'après que le boulet étoit sorti de la piece; il est vrai que plus l'on met de poudre dans un canon, plus la détonnation est forte, ce qui arrive également quand l'on tire sans boulet: par conséquent ces expériences ont fait voir que

pour le plus grand effet il falloit charger la piece de 8 de trois livres de poudre, celle de 12 de quatre, celle de 16 de cinq & demie, & celle de 24 de huit à neuf livres.

Ces épreuves ayant été contestées avec beaucoup de chaleur de la part de ceux qui ne les avoient point vues, la Cour ordonna qu'elles fussent répétées à Metz, en présence de M. le Maréchal de Belle-Isle, qui étoit chargé de la part du Roi de veiller à leur exactitude, pour être en état d'en rendre compte à Sa Majesté: elles eurent le même succès qu'à la Fere, ayant aussi reconnu qu'il falloit environ le tiers de la pesanteur du boulet pour la charge la plus forte; mais on s'en est tenu à neuf livres pour celle du plus grand effet des pieces de 24.

Dans le mois d'Août de la même année, l'on a encore répété ces épreuves à Strasbourg, mais avec des circonstances propres à les rendre plus exactes. L'on s'est servi d'une piece de 24 bien conditionnée, que l'on a pointée sous l'angle de 45 degrés, & maintenue inébranlable, on ne s'est servi que de boulets bien calibrés & bien ébarbés. L'on verra dans le Traité du Jet des Bombes, que le canon tiré sous l'angle de 45 degrés se trouve dirigé de la maniere la plus convenable pour faire des épreuves destinées à juger de l'effet des différentes charges, parce que les portées des boulets qui partent sous une direction au dessus ou au dessous de 45 degrés, sont plus courtes avec une même charge que ne sont celles des boulets qui suivent la direction de l'ame pointée sous cet angle; d'où il suit que les plus grandes portées ne doivent être attribuées qu'à la force de la poudre, & non pas aux accidens qui ne peuvent que les raccourcir.

L'on a employé un nombre de charges en progression arithmétique, tirées de suite en augmentant d'une livre pour chacune, en commençant par huit livres, & finissant par vingt-quatre. L'on a reconnu que la charge de neuf livres de poudre avoit chassé le boulet à 2500 toises, & que toutes les autres charges plus fortes, jusqu'à celle de vingt-quatre, n'avoit jamais chassé le boulet plus loin, au grand étonnement de ceux qui en avoient douté. Le lendemain de cette premiere séance, l'on a répété les mêmes épreuves avec les mêmes charges; mais au lieu de commencer par huit livres de poudre, & finir par vingt-quatre, l'on a tiré le premier coup à vingt-quatre livres, & le dernier à huit, en suivant la même

progression des nombres naturels dans un ordre renversé, & jamais les fortes charges ne l'ont emporté sur celle de neuf livres.

Comme je n'ai point eu de part à ces dernieres épreuves, elles ne peuvent être suspectées, ainsi elles constatent de la maniere la plus évidente, que la plus forte charge du canon doit être à peu près le tiers de la pesanteur du boulet.

L'on trouvera dans l'Histoire de l'Académie Royale des Sciences de l'année 1757, un Mémoire que j'y ai lu sur la charge du plus grand effet du canon, & qui répand un plus grand jour sur cette matiere que je n'ai fait jusqu'ici : on pourra y avoir recours, si on le juge à propos.

906. Il y a encore une difficulté touchant les armes à feu, qui est de sçavoir à quel endroit doit être posée la lumiere, pour que la poudre fasse un plus grand effet, & je ne crois pas que l'on se soit déterminé là-dessus : les uns disent qu'il faut la placer dans le milieu de la longueur de la chambre, parce que la poudre s'enflamme à la ronde, & en bien plus grande quantité : les autres sont d'une opinion contraire, & veulent qu'elle soit placée à l'extrêmité de la chambre contre la culasse, disant pour leur raison que la piece n'a pas tant de recul. Ces deux raisonnemens sont également vrais ; cependant comme les ressorts de la poudre, aussi-bien que tous les autres ressorts, n'agissent avec plus ou moins de violence, qu'autant que les corps qui leur résistent cedent plus ou moins vîte, il s'ensuit que quand une arme à feu n'a presque point de recul, c'est une marque que la poudre a trouvé si peu de résistance pour chasser la balle, qu'elle n'a eu besoin que de son premier effort, au lieu que si elle trouve beaucoup de résistance vers la culasse & du côté de la balle, tous ses efforts se débanderont en même tems, quoique le recul soit plus grand, la balle ira bien plus loin que si le canon n'avoit point eu de recul : ainsi la lumiere étant placée dans le milieu de la chambre, les ressorts agiront en bien plus grande quantité dans le même tems, que si elle étoit contre la culasse, où ces mêmes ressorts ne peuvent agir que successivement, puisque la poudre s'enflamme ainsi ; & si le boulet vient à partir dès que la poudre commence à s'enflammer, il arrivera encore qu'une grande partie sera chassée hors de la piece sans faire aucun effet : ainsi il me semble que la lumiere placée dans le milieu de la

chambre, convient beaucoup mieux que partout ailleurs : car comme le canon ne recule qu'avec peine, à cause de la pesanteur de la machine & du frottement de l'affût contre la plateforme, il se fait une réaction d'une grande partie de poudre qui agit contre la culasse, qui vient augmenter l'impulsion de celle qui chasse le boulet.

Je crois qu'il ne sera pas ici mal-à-propos de désabuser ceux qui croient que le boulet, en sortant de la piece, s'éleve au dessus de la même piece, & qui pensent qu'après avoir décrit une courbe, il reprend une direction horizontale, pour en décrire après cela une autre : la plûpart sont si opiniâtres à soutenir cette erreur, qu'on a beau leur dire que la pesanteur du boulet, bien loin de permettre qu'il puisse s'élever au dessus de l'axe de la piece, l'emporte au dessous, dès l'instant même qu'il sort, & lui fait décrire une courbe, qui à la vérité est d'abord fort approchante de la ligne droite, mais qui devient sensible à mesure qu'il s'éloigne de la piece ; & une preuve à laquelle ils ont tous recours pour soutenir leur opinion, c'est, disent-ils, que quand on tire après une piece de gibier à la chasse, il faut tirer un peu au dessous de l'animal, pour gagner la distance dont la balle s'est élevée au dessus du canon : mais comme cette raison ne vaut absolument rien, en voici l'unique cause.

Si l'on attache un canon de fusil sur une petite planche, & qu'aux deux côtés de cette planche on y mette deux tourillons, ensorte que le canon soit en équilibre sur ces tourillons, comme le bras d'une balance, on verra que l'ayant chargé à balle, si l'on tire au dessus de l'horizon, la partie de la poudre qui agira contre la culasse, & qui cause ordinairement le recul, fera baisser la culasse, & par conséquent lever le bout du canon : & comme cela se fera avant même que la balle soit sortie du canon, il arrivera qu'elle ira au dessus de l'objet vers lequel on avoit pointé, parce qu'en sortant elle ira selon la direction de l'ame, & non pas selon celle du rayon visuel, qui ne sera plus la même à cause du dérangement de la culasse. Or si l'on fait attention que le fusil entre les mains du chasseur fait le même effet que je viens de dire, l'on verra que quand on veut pointer juste, il faut pointer au dessous de l'objet.

Cependant ce qui fait qu'il semble que le boulet à une certaine distance s'éleve au dessus de la piece, c'est que la surface extérieure de la piece n'étant point parallele avec l'ame, le

boulet emporté avec beaucoup de violence, approche fort pendant un tems de la direction de l'ame : & comme cette direction se coupe avec celle de la surface de la piece, de ces deux lignes prolongées, celle de l'ame passe au dessus de la surface : & si le boulet suit encore à peu près la direction de l'ame au-delà de la section des deux lignes, il arrive en effet que le boulet est au dessus de la surface de la piece, mais non pas au dessus de la direction de l'ame prolongée ; & il y a même apparence que des Fondeurs ont eu égard à l'obliquité de la surface de la piece par rapport à l'ame, afin de rectifier la ligne courbe pour tirer de but en blanc.

PROPOSITION XXXIV.

PROBLEME.

907. *Trouver la maniere de connoître le nombre de boulets qui sont en pile.*

Les boulets de canon & les bombes qui sont dans les Arcenaux, sont ordinairement rangés en pile ; ces piles sont de trois sortes : il y en a qui ont pour base un quarré, que l'on nomme *piles quarrées*, comme dans la figure 324, d'autres un triangle, que l'on nomme *piles triangulaires*, comme dans la figure 325, & d'autres un parallélogramme, comme dans la figure 326, que l'on nomme *piles oblongues*. Or comme la maniere de compter ces boulets dépend d'un calcul qui est différent, selon la figure de la pile, en voici la méthode. *Figure 324, 325 & 327.*

Avant toutes choses, il faut considérer que les faces de la pile quarrée & de la pile triangulaire sont toujours des triangles, dont les trois côtés sont égaux, & que ces triangles étant formés par des boulets, ils composent une progression arithmétique, qui commence par l'unité, c'est-à-dire par le boulet qui est au sommet de la pile, & que le plus grand terme de la progression est la base du triangle. Et comme nous serons obligés de connoître la quantité de boulets contenue dans une face, que nous nommerons dans la suite *triangle arithmétique*, voici comment on les pourra compter d'une maniere fort aisée.

Pour sçavoir combien il y a de boulets dans le triangle ABC, il faut compter combien il s'en trouve dans le côté AC, ajouter à ce nombre l'unité, ensuite multiplier cette

quantité par la moitié du côté AB ou AC, qui eſt la même choſe, & le produit donnera le nombre des boulets contenus dans le triangle : ainſi le côté AC étant de ſix boulets, ſi j'ajoute à ce nombre l'unité pour avoir 7, & que je les multiplie par la moitié de AB ou de AC, qui eſt 3, le produit ſera 21, qui eſt le nombre des boulets que l'on cherche. Il en ſera de même pour tous les autres triangles arithmétiques.

La raiſon de ceci eſt que dans une progreſſion arithmétique, $a . a+e, a+2e, a+3e, a+4e, a+5e$, dont les termes ſe ſurpaſſent d'une quantité e, la ſomme des deux termes $a+e$ & $a+4e$ également éloignés des extrêmes, eſt égale à la ſomme des extrêmes a & $a+5e$, ou à celle des deux autres termes quelconques auſſi également éloignés des extrêmes, puiſque la ſomme des uns & des autres donne $2a+5e$; mais il y a la moitié autant de fois $2a+5e$ (qui eſt la ſomme des extrêmes) qu'il y a de termes dans la progreſſion : donc pour avoir la valeur de tous les termes d'une progreſſion arithmétique, qui commence par l'unité, ou par tout autre nombre, il faut multiplier le premier & le dernier terme par la moitié du nombre qui exprime la quantité des termes: c'eſt pourquoi nous avons ajouté le premier terme AC avec le dernier B, & nous avons multiplié la ſomme par la moitié du côté AB, c'eſt-à-dire par la moitié du nombre des termes de la progreſſion pour avoir les boulets du triangle.

Prévenu de ceci, il faut encore conſidérer que ſi l'on a une quantité de boulets qui forment par leurs arrangemens un *Figure* 327. priſme triangulaire DEHGF, ſoutenu par un plan incliné IK, dont la baſe ſoit le triangle EGH, ce priſme étant coupé par un plan EF, parallele à la baſe, ſe trouvera diviſé en deux parties, dont l'une, comme DEF, ſera le tiers de tout le priſme, & l'autre, comme EFGH, en ſera les deux tiers; car la partie EDF eſt une pyramide triangulaire, qui a pour baſe le triangle oppoſé à EGH, & pour hauteur la hauteur DE du priſme: par conſéquent la partie EFGH, qui eſt auſſi une pyramide, qui a pour baſe un quarré, en ſera les deux tiers. Mais il faut remarquer que le plan EF partage un triangle de boulet, tel que EFG, qui ſe rencontre dans la coupe; ce qui rendra les deux pyramides imparfaites, quand on les conſidérera compoſées de boulets : car comme le plan EF paſſe par tiers de chaque boulet L, il faudra donner à la

pyramide triangulaire DEF les deux tiers de la quantité des boulets du triangle arithmétique qui se rencontre dans la coupe EF. De même pour rendre réguliere la pyramide quarrée EFGH, il faudra lui donner le tiers du même triangle arithmétique. Or si l'on suppose que l'on a détaché du prisme la pyramide quarrée EFGH pour tenir lieu de la pyramide ABCQ, & que la pyramide triangulaire DEF qui reste soit regardée comme la pyramide MNOP, on pourra donc dire que la pyramide ABCQ est plus grande que les deux tiers du prisme qui auroit pour base le triangle ABC, qui est la même chose que EGH, & pour hauteur le côté AB, qui est la même chose que DE, du tiers du triangle ABC, qui est la même que celui qui se trouve dans la coupe EF. *Figure 324 & 325.*

Enfin l'on pourroit dire aussi que la pyramide MNOP sera plus grande que le tiers du prisme, qui auroit pour base le triangle MNO, qui est le même que EGH, & pour hauteur le côté MN, qui est le même que ED, des deux tiers du triangle MNO, qui est le même que le triangle arithmétique qui se rencontre dans la coupe EF.

D'où il s'ensuit, 1°. que pour trouver la quantité de boulets contenue dans une pile quarrée ABCQ, il faut d'abord chercher le nombre de ceux qui sont contenus dans le triangle arithmétique ABC, & le multiplier par les deux tiers du côté AB ou AC, & ajouter au produit le tiers du triangle ABC.

908. Ainsi le côté AC étant de 6, je commence par trouver le triangle ABC, en ajoutant l'unité au nombre 6 pour avoir 7, que je multiplie par la moitié du côté AB, qui est 3, & le produit donne 21, que je multiplie par les deux tiers du côté AB, qui est 4, pour avoir 84 au produit, auquel ajoutant le tiers du triangle arithmétique ABC, qui est 7, il vient 91 pour le nombre des boulets de la pile.

909. L'on pourra donc dire aussi que pour trouver le nombre de boulets contenus dans la pile triangulaire MNOP, il faut multiplier le triangle MNO par le tiers du côté MN, & ajouter au produit les deux tiers du nombre de boulets contenus dans le triangle MNO: ainsi le côté NO étant encore de 6, le triangle arithmétique sera de 21, qui étant multiplié par le tiers du côté MN, qui est 2, l'on aura 42, auxquels ajoutant les deux tiers du triangle, qui est 14, l'on aura 56 pour le nombre de boulets contenus dans cette pile.

Figure 326. A l'égard de la pile oblongue, il eſt fort facile d'en connoître la quantité de boulets : car comme elle eſt compoſée d'un priſme triangulaire RSTV, & d'une pyramide quarrée VTXY, l'on voit qu'il n'y a d'abord qu'à chercher la quantité de boulets contenue dans une pyramide quarrée, qui auroit pour côté XY ou VX ; enſuite ajouter à la valeur de cette pyramide celle du priſme RSTV, que l'on trouvera en multipliant le triangle XTV ou celui de la coupe TV, qui eſt la même choſe, par la quantité de boulets RT qui ſe trouve au ſommet de la pile moins une unité ; quand je dis moins une unité, c'eſt qu'on doit faire attention que le premier boulet T, avec le triangle arithmétique TV, qui lui correſpond, appartient entiérement à la pyramide TVXY, & par conſéquent il doit être ſupprimé de la quantité RT.

Ainſi ſuppoſant que le côté XY ou TX ſoit de 9, j'ajoute 1 à 9 pour avoir 10, que je multiplie par la moitié de 9 ; ou, ce qui eſt la même choſe, 9 par la moitié de 10, qui eſt 5, le produit ſera 45 pour la quantité de boulets du triangle XTY, que je multiplie par les deux tiers de 9, c'eſt-à-dire par 6, & il vient 270 pour le produit, auquel j'ajoute le tiers du triangle, qui eſt 15, & le tout fait 285 pour la pyramide. Or ſuppoſant auſſi que RT ſoit de 15 boulets, je multiplie 15 moins 1, qui eſt 14, par le triangle arithmétique, qui eſt 45, & il vient 630 pour le nombre de boulets du priſme RSTV, qui étant ajouté avec ceux de la pyramide, l'on trouvera 715 boulets dans la pyramide oblongue.

910. Comme il n'y a rien de plus commode pour l'imagination que les formules qui nous indiquent par leurs expreſſions ce que nous avons à faire dans tous les cas imaginables, nous allons donner une formule très-ſimple, par le moyen de laquelle on pourra trouver le nombre des boulets ou des bombes rangés en piles, ſoit que ces piles ſoient diſpoſées en forme priſmatique, comme dans la figure 326, ſoit qu'elles ſoient en pyramide quarrée ou en pyramide triangulaire. Notre formule peut s'appliquer à tous ces cas : car il eſt évident que pour connoître le nombre de boulets compris dans la pile de la figure 326, il faut, comme nous l'avons dit, décompoſer cette pile en deux corps, dont l'un eſt le priſme triangulaire RQXYT, lequel n'a aucune difficulté, & dont l'autre eſt une pyramide qui a même nombre de rangs que le priſme triangulaire, ou qui

qui a autant de rangs qu'il y a de boulets dans le côté RQ du triangle SRQ.

Il n'eſt pas moins viſible que cette pile eſt la ſomme des quarrés d'autant de nombres depuis l'unité qu'il y a de boulets dans le côté RQ: ainſi ſi l'on a 9 boulets, la pyramide ſera égale à la ſomme des quarrés des neuf premiers nombres, 1, 2, 3, 4, &c. Tout ſe réduira donc à trouver la ſomme des quarrés de tant de nombres naturels que l'on voudra. Sur quoi je remarque que tous les quarrés des nombres naturels réſultent de l'addition des termes de deux ſuites égales des nombres triangulaires, diſpoſées de maniere que la premiere ait un terme de plus que la ſeconde.

Par exemple, ſi l'on diſpoſe ces deux ſuites, comme on voit ici, & que l'on les ajoute terme par terme, il eſt évident qu'il en réſultera la ſuite des quarrés des nombres naturels que l'on voit au deſſous.

1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	&c.
	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	&c.
1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	&c.

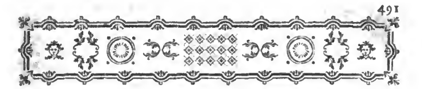
Ainſi tout ſe réduit à trouver la ſomme des quarrés de tant de termes que l'on voudra de la ſuite des nombres naturels: car de cette maniere on pourra trouver le nombre des boulets contenus dans une pile triangulaire & dans une pyramide quarrée quelconque. La pyramide triangulaire ſe trouvera, en ſommant autant de termes qu'il y a de boulets dans le côté du triangle MNO, & la pyramide quarrée ſe trouvera, en ſommant d'abord un nombre de termes de la ſuite des nombres triangulaires égal au nombre de boulets contenus dans le côté BC du triangle BCQ, *Figure* 324.
& en ſommant un nombre de termes de la même ſuite triangulaire diminué de l'unité, la ſomme de ces deux premieres ſera la ſomme des boulets de la pyramide quarrée. Voici la formule que j'ai trouvée: Si m eſt égal au nombre de boulets contenus dans le côté MO du triangle MNO, la ſomme des boulets ſera $\frac{m^3 + 3m^2 + 2m}{6}$, par exemple, dans notre figure $m = 6$: donc on aura $\frac{216 + 108 + 12}{6} = 56$, c'eſt le nombre que l'on a trouvé (art. 907). Si la pyramide eſt une pyramide quarrée, on pourra trouver le nombre des boulets par la même formule. Si $m = 6$, on aura pour la premiere ſomme 56, & pour la ſeconde, en faiſant $m = 5$, c'eſt-à dire en prenant la

ſomme des mêmes nombres triangulaires, diminuée d'un terme, on aura $\frac{125 + 75 + 10}{6} = 35$, dont la ſomme, avec 56, fait 91, comme on l'a déja trouvé à l'art. 906. J'ai trouvé cette formule, en recherchant les propriétés des nombres triangulaires; mais comme la théorie ſeroit peut-être un peu difficile pour des Commençans, je me contente de donner la formule qui eſt aſſez ſimple, pour qu'on puiſſe s'en reſſouvenir dans tous les cas poſſibles. Il faut bien remarquer que par cette formule, on pourra ſommer autant de termes que l'on voudra de la ſuite des quarrés des nombres naturels.

911. Suivant ces principes, on peut aiſément déduire une formule pour ſommer tant de nombres quarrés que l'on voudra : pour cela, il n'y a qu'à faire dans la formule $m = m - 1$, & ajouter ce qui en viendra à la même formule, la ſomme ſera une formule propre à ſommer tant de nombres quarrés que l'on voudra : cette ſubſtitution donne
$\frac{m^3 - 3m^2 + 3m - 1 + 3m^2 - 6m + 3 + 2m - 2}{6} = \frac{m^3 - m}{6}$, qui étant jointe avec $\frac{m^3 + 3m^2 + 2m}{6}$, donnera $\frac{2m^3 + 3m^2 + m}{6} = \frac{m^3}{3} + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m$. Il eſt à propos de ſe ſervir de cette formule pour trouver les nombres des boulets rangés en pyramide quarrée, puiſque l'on trouve la ſomme demandée par une ſeule opération, au lieu que par l'autre formule il faut néceſſairement en faire deux. Par exemple, ſi le nombre des rangs de boulets eſt 6, en faiſant $m = 6$ dans cette derniere formule, on aura $\frac{216}{3} + 18 + 1 = 91$, comme on l'avoit trouvé ci-devant. Cette formule pour ſommer les nombres quarrés eſt démontrée, en admettant celle que nous avons donnée pour ſommer les nombres triangulaires.

Fin du treizieme Livre.





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE QUATORZIEME.

Du mouvement des Corps, & du jet des Bombes.

LE principal objet que je me suis proposé dans le Traité du Mouvement que je donne ici, a été d'enseigner l'art de jetter les bombes. Il est vrai que je ne commence pas d'abord par-là, parce qu'il m'a paru qu'il étoit bon de donner une connoissance du choc des corps, afin d'en tirer quelques principes qui nous serviront beaucoup dans la méchanique. Je pourrois dire la même chose du chapitre du mouvement, parce qu'il me donnera aussi lieu dans la méchanique d'expliquer plusieurs choses qui n'auroient pu être entendues sans une connoissance de la chûte des corps: d'ailleurs il est absolument nécessaire à ceux qui veulent s'attacher aux Mathématiques & à la Physique, pour expliquer quantité de choses curieuses dans l'Artillerie, de sçavoir les principales regles du choc & du mouvement des corps: ainsi ce Traité contient trois chapitres; le premier traite du choc des corps, le second des regles du mouvement, & le troisieme de la théorie & de la pratique du jet des bombes.

A l'égard du jet des bombes, je ne vois pas que les Bombardiers se soient mis beaucoup en peine de sçavoir s'il y avoit des regles certaines sur ce sujet, dans la pensée où ils ont toujours été qu'il n'y avoit que la seule pratique qui puisse servir au Bombardier, pour lui faire jetter des bombes avec succès; & cela vient sans doute de ce que la plûpart n'ayant aucune connoissance des

Mathématiques ni de la Physique, ne peuvent point s'imaginer qu'il est possible de donner des loix des effets de la poudre, au caprice de laquelle ils attribuent les fautes qu'ils font. J'avoue qu'il y a tant de choses qui concourent dans la charge d'un mortier à déranger tout ce que les regles & l'attention du Bombardier le plus adroit sont en état de faire, qu'il y auroit de la témérité à croire qu'on peut jetter des bombes dans un endroit comme si on les y portoit avec la main. Mais ce qu'il y a de sûr, c'est que si un Bombardier avoit assez d'attention, en chargeant son mortier, pour en examiner le défaut, & pour faire ensorte de charger toujours également, les regles seroient d'un usage excellent, puisque l'on n'auroit pour chasser des bombes à une distance quelconque, qu'à en tirer une avec la charge que l'on aura jugé à propos, & à un degré d'élevation à volonté, pour connoître l'élévation qu'il convient de donner au mortier, pour jetter les autres bombes à la distance qu'on demande. Mais ceux qui n'ont que la pratique, soutiennent qu'il est impossible de pouvoir observer cette précision dans la maniere de charger également : car, disent-ils, l'inégalité des grains de poudre, soit dans leur grosseur ou dans les matieres qui la composent, fait que la même quantité pour chaque charge produit des effets différens ; ce qui peut venir aussi de la part de la terre avec laquelle on remplit la chambre, qui peut être plus ou moins refoulée une fois que l'autre : d'ailleurs les bombes qui ne sont point toutes bien calibrées & d'égale pesanteur, & souvent mal coulées, la plate-forme qui se dérange presque à chaque coup que l'on tire, sont autant de sujets qui prouvent que moralement il n'est pas possible de jamais tirer des bombes comme il faut. Mais quoiqu'on puisse remédier à tout ceci quand on voudra y bien prendre garde, il n'y a point de doute qu'un Bombardier expérimenté d'ailleurs dans son métier, & qui sçaura l'art de jetter les bombes, ne soit plus sûr de son fait que celui qui n'a que la simple pratique : car s'il s'apperçoit que son premier & son second coup ne jettent point la bombe où il veut qu'elle tombe, il pourra se corriger, au lieu que ce dernier tâtonnera en augmentant ou diminuant la poudre ou les degrés pendant un tems considérable ; & quoiqu'on dise que c'est le pur hazard qui gouverne l'action du mortier, l'expérience m'a fait voir que quand on vouloit apporter tous ses soins à charger également, & à poser l'affût toujours dans le même endroit de la plate-forme, & les tourillons dans la même situation sur l'affût, il étoit très-possible de tirer

quantité de bombes toujours à peu près dans le même endroit. Qu'on revienne donc de l'opinion où l'on est, que les regles pour jetter les bombes ne peuvent être d'aucun secours, puisque si l'on a soin de charger bien également, & que l'on se serve des bombes à peu près de même poids, l'on n'aura plus lieu de douter de la certitude de ces regles.

Après cela on peut dire qu'il y a si peu de Bombardiers qui se soient attachés à sçavoir ces regles, & encore moins à les pratiquer, que certainement il y a plus de préjugé que de connoissance dans leur fait; & quand ils pourroient s'en passer pour jetter des bombes dans un endroit de niveau avec la batterie, après en avoir tiré un grand nombre d'inutiles, comme cela arrive toujours, comment s'y prendroient-ils pour en jetter dans quelque forteresse fort élevée, comme sur un rocher escarpé, au pied duquel seroit la batterie, ou bien si la batterie étoit un lieu fort élevé, pour en jetter dans un fond? Il n'y a point de Bombardier, que je sçache, à qui l'expérience ait donné quelque pratique pour cela, d'autant plus qu'ils ne regardent point ces deux cas comme problématiques. Enfin il résulte de tout ce qui vient d'être dit, que jamais on ne parviendra à jetter des bombes à une distance donnée, que l'on ne sçache les regles qui sont établies pour cela, & qu'on n'ait assez d'expérience pour prévoir tous les accidens auxquels le mortier & la bombe sont sujets.

CHAPITRE PREMIER.

Du Choc des Corps.

DÉFINITIONS.

I.

911. LE *mouvement* d'un corps est le transport de ce corps d'un lieu dans un autre. Le mouvement est *réel*, lorsque le corps parcourt lui-même, en vertu d'une force qui lui a été appliquée, les parties de l'étendue comprises entre les deux termes du mouvement, qui sont le point de départ & le point d'arrivée. Tel est le mouvement d'une boule que l'on a jettée sur un plan horizontal. Le mouvement est *relatif* ou *respectif*, lorsque le corps passe d'un lieu en un autre par le moyen d'un

corps en mouvement, quoiqu'il soit lui-même en repos. Tel est le mouvement d'un homme dans un bateau. Dans le mouvement d'un corps, il y a cinq choses à considérer, le corps mis en mouvement, la force motrice, l'espace parcouru, le tems du mouvement, la direction de ce mouvement.

II.

913. On appelle *force motrice* tout ce qui peut mouvoir un corps. Un corps en mouvement est lui-même une force motrice: car l'expérience nous apprend qu'il peut lui-même en mettre un autre en mouvement. Pour estimer une force motrice, il faut connoître la masse du corps mis en mouvement, l'espace que ce corps a parcouru, & le tems pendant lequel il a parcouru cet espace.

III.

914. La *vîtesse* d'un corps est le plus ou le moins de chemin qu'il fait pendant un certain tems, lorsque quelque cause l'a mis en mouvement; d'autres ont défini la vîtesse, le rapport de l'espace au tems. En effet, pour avoir une idée de la vîtesse d'un mobile, il ne suffit pas de connoître seulement l'espace qu'il a parcouru, ou le tems qu'il a été en mouvement, mais il faut connoître pendant quel tems il a parcouru un espace déterminé. Par exemple, on ne peut pas dire qu'un homme ait fait une grande diligence, parce qu'il a parcouru dix lieues: mais cette même vîtesse est connue, lorsqu'on sçait qu'il les a faites pendant cinq heures.

IV.

915. La vîtesse d'un corps est uniforme ou variable, elle se nomme *uniforme*, lorsque dans des tems égaux elle fait parcourir des espaces égaux, & elle se nomme *variable*, lorsque dans des tems égaux elle fait parcourir des espaces inégaux. Les vîtesses uniformes ou variables sont entr'elles comme les espaces qu'elles font parcourir en des tems égaux. Si l'une dans une minute fait parcourir dix toises, & l'autre 20 dans le même-tems, ces deux vîtesses sont entr'elles comme 10 & 20, c'est-à-dire que la derniere est double de la seconde.

V.

916. La *direction* d'un corps est la détermination de son

mouvement, suivant une certaine ligne qu'il tend à parcourir en vertu de la force qui lui a été communiquée, & qu'il décrit effectivement, si rien ne le détourne de cette ligne.

VI.

917. Comme il est évident qu'un corps ne peut aller par deux chemins différens, lorsque plusieurs forces concourent par leurs actions réunies à le mettre en mouvement, le mouvement s'appelle *mouvement composé*, & la direction que suit le corps est appellée *direction moyenne*.

VII.

918. Les corps dont on considere le mouvement, sont *durs* ou *fluides*: il y en a aussi qui ont du ressort, & d'autres qui n'en ont pas.

VIII.

919. On appelle corps *dur* celui dont les parties ne se divisent pas aisément, & qui étant divisées ne se réunissent point facilement, comme une pierre.

IX.

920. On appelle corps *fluide* celui dont les parties se divisent aisément, & lesquelles étant divisées se réunissent facilement, comme l'eau.

X.

921. On appelle corps sans *ressort* celui qui à la rencontre d'un autre, ne change point de figure, ou s'il en change, ne se rétablit point dans sa premiere figure.

XI.

922. On appelle corps à *ressort* celui qui à la rencontre d'un autre, change de figure dans le choc, & ensuite se rétablit comme auparavant.

Nota. Nous n'examinerons dans ce Traité que les corps durs sans ressort; à l'égard des autres, nous en parlerons aux endroits qu'il conviendra.

DEMANDES.

I.

923. L'on demande qu'il soit regardé comme incontestable

que lorſque deux corps ſe rencontrent dans des directions diamétralement oppoſées, ils ſe communiquent mutuellement leur mouvement, & qu'un corps perd autant de ſon mouvement qu'il en communique à un autre.

II.

914. Que lorſque deux corps ſans reſſort ſe rencontrent, ils ne ſe repouſſent point l'un l'autre, & que le plus fort emporte le plus foible dans ſa même détermination.

Corollaire.

915. Il ſuit delà que lorſqu'un corps a plus de force qu'un autre, il pouſſe devant lui celui qui eſt le plus foible, & que ces deux corps peuvent être regardés comme s'ils n'en faiſoient plus qu'un, qui les vaut tous deux.

III.

916. On ſuppoſe encore que les corps ſe meuvent dans un milieu, qui ne réſiſte point à leurs mouvemens; de ſorte que ſi un corps parcourt 4 toiſes dans la premiere minute de ſon mouvement, il continuera de parcourir 4 toiſes dans chaque minute.

Axiome.

917. Les effets ſont proportionnels à leurs cauſes.

Corollaire.

Pl. XXIII. 918. Il ſuit delà que ſi l'on a deux corps égaux A & C, qui *Figure 329.* étant mis en mouvement, parcourent en même tems les eſpaces AB & CD, ces deux corps ont reçu des degrés de vîteſſe, qui ſont dans la raiſon des mêmes eſpaces AB & CD; puiſque les degrés de viteſſe de ces corps peuvent être pris pour les cauſes, & les eſpaces parcourus pour les effets.

Avertissement.

Comme les corps que l'on fait rouler ſur un plan parcourent des lignes droites (pourvu qu'une ſeule force les ait mis en mouvement), nous prendrons dans la ſuite des lignes droites pour exprimer non ſeulement le chemin que ces corps parcourent, ou auront à parcourir, mais encore pour exprimer les

les degrés de force qu'on leur aura communiqué : nous supposerons aussi que les corps dont nous parlerons seront de figure sphérique.

PROPOSITION I.

Théoreme.

919. *Si deux corps semblables de même matiere & égaux sont mus avec des vîtesses inégales, l'effort du corps qui aura le plus de vîtesse sera plus grand sur le corps qu'il rencontrera, que celui dont la vîtesse sera plus petite.*

Démonstration.

Si l'on suppose que de deux corps égaux l'un ait une vîtesse double de l'autre, je dis que ces deux corps venant à frapper un autre corps, celui qui aura la vîtesse double, le frappera avec deux fois plus de force que l'autre : car les effets étant proportionnés à leurs causes (art. 927 & 928) si l'on prend les vîtesses pour les causes, & les chocs pour les effets, le corps qui aura deux fois plus de vîtesse que l'autre, agira avec deux fois plus de force contre celui qu'il rencontrera.

PROPOSITION II.

Théoreme.

930. *Si deux corps inégaux & de même matiere sont poussés avec des vîtesses égales, le plus grand corps fera plus d'impression sur le corps qu'il rencontrera que le plus petit.*

Démonstration.

Si l'on suppose deux corps, l'un de quatre livres, & l'autre de deux livres, il est constant que si ces deux corps ont des degrés de vîtesse égaux, le plus grand aura deux fois plus de force que le plus petit : car si l'on suppose le corps de quatre livres divisé en deux également, l'on aura deux autres corps, dont chacun sera égal à celui de deux livres ; & comme ils auront la même vîtesse que celui de deux livres, la force de chacun en particulier sera égale à celle du plus petit : ainsi ces deux corps n'en faisant qu'un, la force du plus grand corps sera par conséquent double de celle du plus petit.

COROLLAIRE I.

931. Il suit des deux théorêmes précédens que la force d'un corps, qu'on peut appeller aussi *quantité de mouvement* de ce corps, ne dépend pas seulement de sa vîtesse, mais encore de sa masse : c'est pourquoi l'on connoîtra toujours la quantité de mouvement de deux ou de plusieurs corps, *en multipliant la masse de chacun par sa vîtesse*. Pour se convaincre de cette vîtesse, imaginons deux corps, dont l'un ait trois parties de masse & 4 degrés de vîtesse, & l'autre cinq parties de masse & 6 degrés de vîtesse, & nommons f la force qui est en état de donner un degré de vîtesse à un corps qui n'aura qu'une partie de masse, puisque les effets sont proportionnés aux causes, celle qui sera en état de donner quatre degrés de vîtesse sera $4f$. Si le corps devient trois fois plus grand, & qu'il faille lui donner encore 4 degrés de vîtesse, il n'est pas moins évident que la force devient $3 \times 4f$ ou $12f$. Par la même raison, puisque les degrés de vîtesse sont égaux, en appellant toujours f celle qui peut donner un degré de vîtesse à une partie du second corps, $6f$ sera celle qui est capable de lui en donner 6 degrés, & si le corps devient cinq fois plus gros, il faudra une force cinq fois plus grande : donc la force qui lui donne cette même vîtesse sera $5 \times 6f$ ou $30f$: donc les quantités de mouvement de ces corps, ou les forces qui les ont mises en mouvement seront entr'elles comme $12f$ est à $30f$, ou comme 12 à 30, c'est-à-dire comme les produits des masses par les vîtesses. Ainsi ayant deux corps, que nous nommerons a & b, nommant c la vîtesse du premier, & d la vîtesse du second, ac sera la quantité de mouvement de l'un, & bd la quantité de mouvement de l'autre.

COROLLAIRE II.

932. Il suit encore delà que connoissant la quantité de mouvement d'un corps & sa masse, en divisant la quantité de mouvement par la masse, l'on aura au quotient la vîtesse ; & que divisant de même la quantité de mouvement par la vîtesse, le quotient donnera la masse.

PROPOSITION III.

THÉOREME.

933. *Si deux corps ont des masses & des vîtesses qui soient en raison réciproque, ces deux corps auront une même quantité de mouvement.*

DÉMONSTRATION.

Par ce qui précede, la force d'un corps ou sa quantité de mouvement dépend de ces deux choses, sa masse & sa vîtesse, c'est-à-dire, est en raison composée de la masse & de la vîtesse, ou comme le produit de sa masse par sa vîtesse : *par hypothese*, la masse du premier est à celle du second, comme la vîtesse du même second est à celle du premier : donc les quantités de mouvemens ou les forces de ces deux corps sont égales. Ainsi nommant a la masse du premier, & c sa vîtesse; b la masse du second, & d sa vîtesse, on aura $a : b :: d : c$. Donc $ac = bd$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

934. Il suit delà que si l'on a deux corps A & B, dont les masses soient réciproques aux vîtesses, ces deux corps venant à se rencontrer suivant des directions diamétralement opposées, se choqueront également, & qu'ils demeureront tous les deux en repos au moment qu'ils se seront choqués : car supposant que le corps A soit de 4 livres, & sa vîtesse soit de 12 degrés, que le corps B soit de 6 livres, & sa vîtesse de 8 degrés; la masse du corps A, qui est 4, étant multipliée par sa vîtesse, qui est 12, donnera 48 pour la quantité de mouvement du corps A. De même, si l'on multiplie la masse du corps B, qui est 6, par sa vîtesse, qui est 8, sa quantité de mouvement sera encore 48 : ils viendront donc se choquer avec des forces égales & diamétralement opposées; le corps A choquera donc autant le corps B, que le corps B choquera le corps A : ainsi ils demeureront en repos, puisque l'un ne fera pas plus d'effort que l'autre, & qu'il n'y a pas de raison pour que l'un l'emporte sur l'autre. *Figure* 330.

Cette égalité entre deux forces ou quantités de mouvemens qui agissent suivant des directions diamétralement opposées, se nomme *équilibre*. Ainsi pour qu'il y ait équilibre entre deux ou un

plus grand nombre de forces qui agissent suivant des directions quelconques, il faut qu'on puisse les réduire à deux forces égales & directement opposées.

Corollaire II.

935. Il suit encore delà que si deux corps égaux avec des vîtesses égales, viennent à se rencontrer dans des lignes de direction diamétralement opposées, ils seront en équilibre à l'instant du choc, puisqu'ils auront chacun une même quantité de mouvement.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

936. *Lorsque deux corps sans ressort se meuvent dans la même détermination, & vers un même côté, le corps qui a le plus de vîtesse ayant rencontré celui qui en a moins, & ces deux corps allant ensemble, ils auront une quantité de mouvement égale à la somme de celles qu'ils avoient avant le choc.*

Démonstration.

Si ces deux corps se meuvent d'un même côté, il n'y aura rien d'opposé qui puisse détruire leur mouvement: c'est pourquoi ils conserveront après le choc la même quantité de mouvement qu'ils avoient avant le choc: car si celui qui a le plus de mouvement en communique à celui qui en a moins, cette quantité de mouvement reste dans ce dernier. Or ces deux corps étant considérés comme n'en faisant qu'un seul (art.925) après le choc; il s'ensuit que leur quantité de mouvement est la somme de celles qu'ils avoient avant le choc.

Corollaire I.

937. Il suit delà que connoissant la quantité de mouvement de deux corps, qui n'en font plus qu'un, après s'être rencontrés, l'on trouvera la vîtesse en divisant la quantité de mouvement par la somme des masses; & que connoissant la vîtesse, l'on trouvera la somme des masses, en divisant la quantité de mouvement par la vîtesse.

Corollaire II.

938. Par conséquent si l'on a deux corps égaux mus sur une

même ligne de direction, & que l'un soit en repos, & l'autre en mouvement, celui qui est en mouvement venant à rencontrer celui qui est en repos (ces deux corps n'en faisant plus qu'un), il lui comumniquera la moitié de la vîtesse qu'il avoit avant le choc; puisque pour avoir cette vîtesse, il faut diviser la quantité de mouvement par une masse double : enfin si le corps mobile en rencontre un autre en repos, dont la masse soit triple de la sienne, sa vîtesse ne sera plus que d'un quart, ainsi des autres.

En général soit u la vîtesse du premier corps, & m sa masse, v la vîtesse du second corps, & M sa masse. Soit V la vîtesse après le choc, on aura, suivant ce que nous venons de voir, $V = \frac{mu + Mv}{m + M}$. On pourra par cette formule déterminer la vîtesse V dans tous les cas possibles, quel que soit le rapport de m à M, & de u à v. Supposons, par exemple, $u = 0$, & $m = M$, on aura $V = \frac{Mv}{2M} = \frac{v}{2}$; c'est ce que nous venons de voir.

PROPOSITION V.

THÉOREME.

939. *Si deux corps se meuvent dans un sens directement opposé sur une même direction, ces deux corps venant à se rencontrer, & n'en faisant plus qu'un, la quantité de mouvement de ces corps sera la différence des quanités de mouvement que les deux corps avoient avant le choc.*

DÉMONSTRATION.

Si ces deux corps se meuvent dans des déterminations directement opposées, ils tendront mutuellement à s'arrêter; de sorte que s'ils avoient des forces égales, ils demeureroient en repos après le choc : ainsi le plus fort perd autant de sa force que le plus foible en a. Il ne reste donc pour mouvoir ces deux corps après leur choc, que la différence de leurs forces, ou de leur quantité de mouvement; mais ces deux corps étant considérés comme n'en faisant plus qu'un, sa quantité de mouvement sera la différence de celles des deux corps avant le choc.

COROLLAIRE.

940. Il suit delà que pour trouver la vîtesse de ces corps

après leur choc, il faut diviser la différence des quantités de mouvement qu'ils avoient avant le choc, par la somme de leurs masses, & le quotient donnera cette vîtesse, laquelle sera dans la détermination du corps qui avoit la plus grande quantité de mouvement avant le choc : donc la formule générale pour déterminer la vîtesse des corps après le choc, soit dans une même direction ou dans des directions diamétralement opposées, sera $V = \frac{mu \pm Mv}{m + M}$.

CHAPITRE II.

Du mouvement des Corps jettés.

DÉFINITIONS.

I.

941. SI un corps se meut pendant un certain tems, lequel tems soit divisé en plusieurs parties égales, nous appellerons chacune de ces petites parties *moment* ou *instant*.

II.

942. Si un corps reçoit dans chaque instant une augmentation égale de vîtesse, cette vîtesse sera nommée *accélerée*; & si au contraire un corps à chaque instant perd des degrés égaux de vîtesse, cette vîtesse sera nommée *retardée*. La vîtesse d'un corps qui tombe est une vîtesse accélerée, parce que la pesanteur agit à chaque instant sur lui, & lui communique des degrés égaux de vîtesse. Par une raison contraire, la vîtesse d'un corps jetté de bas en haut est une vîtesse retardée, puisque la pesanteur ôte à chaque instant des degrés égaux de vîtesse. Si les degrés de vîtesse reçus ou perdus à chaque instant ne sont pas égaux entr'eux, mais varient suivant des rapports constans, ces vîtesses sont appellées *variables accélerées* ou *variables retardées*.

AXIOME I.

943. Un corps en mouvement ou en repos est toujours le même corps; il est encore le même quelle que soit la détermination de son mouvement & sa quantité.

AXIOME II.

944. Le corps de lui-même ou de sa nature est tout-à-fait indifférent au mouvement ou au repos, & par conséquent ce corps étant une fois mis en mouvement, il y restera toujours jusqu'à ce que quelque cause le lui ait ôté; & réciproquement un corps une fois en repos, ne se mettra jamais de lui-même en mouvement.

AXIOME III.

945. Le corps de soi ou de sa nature est tout-à-fait indifférent à quelque détermination, ou à quelque vîtesse que ce puisse être, & par conséquent ce corps ne changera jamais de lui-même ni la vîtesse, ni la détermination qu'il a eu en dernier lieu.

946. Nous venons de voir qu'un corps ne peut être en mouvement sans une cause qui l'y ait mis, & que si rien ne s'oppose à son mouvement, il y sera éternellement. Dans la même supposition que rien ne s'oppose à son mouvement, si petite ou si grande que soit la force motrice, il est évident que la durée du mouvement seroit éternelle. On pourroit donc en apparence inférer delà que la plus petite force comme la plus grande produiroit un effet infini en durée, & croire que les forces mêmes sont infinies, suivant notre axiome, qui dit que les effets sont proportionnels aux causes. Pour n'être pas séduits par ce sophisme, il faut, 1°. distinguer la durée du mouvement du plus ou moins d'espace que la force motrice fait parcourir au corps dans un tems fini. 2°. Faire attention que, dans l'hypothese, que rien ne s'oppose au mouvement du corps, la durée infinie de ce mouvement ne vient pas directement de la force motrice, mais bien de l'indifférence du même corps au mouvement ou au repos; d'où il suit évidemment que les effets des causes seront toujours finis & proportionnels à ces causes, puisque les effets ne seront que le plus ou le moins d'espace parcouru dans un tems donné.

DEMANDE.

947. L'on demande qu'il soit accordé que la pesanteur de quelque cause qu'elle puisse provenir, presse toujours le corps avec une même force pour le faire descendre.

PROPOSITION I.

Théoreme.

948. *Si rien ne s'oppoſoit au mouvement des corps jettés ; chacun de ces corps conſerveroit toujours avec une vîteſſe égale le mouvement qu'il auroit reçu, & ſuivant toujours une même ligne droite.*

Démonstration.

Comme un corps ne peut jamais de lui-même ſe mettre en repos, ni changer ſa détermination ou la vîteſſe qu'il a reçue (art. 944 & 945), il s'enſuit que, ſi rien ne s'oppoſoit à cette vîteſſe, le corps conſerveroit perpétuellement ſon mouvement, & avec une vîteſſe toujours égale, & ſuivroit toujours une même ligne droite. C. Q. F. D.

Corollaire I.

949. Donc le mouvement tel qu'il eſt de la part de la puiſſance qui meut, ſoit horizontalement, ſoit obliquement, ſoit verticalement, ſeroit perpétuel & égal, en allant toujours de même côté, ſi l'air ne réſiſtoit pas au corps, & ſi ſa peſanteur ne le faiſoit pas toujours deſcendre en bas ; de ſorte que le mouvement, préciſément comme il eſt de la part du mobile, doit être conſidéré comme égal, perpétuel, & toujours diviſé vers le même côté où le corps eſt pouſſé.

Corollaire II.

950. De même, ſi immédiatement après qu'un corps a acquis une certaine vîteſſe en tombant, l'action de la peſanteur venoit à ceſſer tout-à-fait, & que l'air ne réſiſtât point, ce corps néanmoins continueroit de ſe mouvoir avec la même vîteſſe qu'il auroit reçue en dernier lieu, conſervant toujours également cette même vîteſſe, & ſuivant toujours la même ligne droite.

Corollaire III.

951. Donc puiſque l'action de la peſanteur ne nuit point à la vîteſſe d'un corps qui tombe, ſi l'air, ni autre choſe ne s'y oppoſoit, la vîteſſe que la peſanteur cauſeroit au corps dans le premier inſtant, ſubſiſteroit dans le ſecond inſtant avec une pareille

pareille vîtesse causée par la même pesanteur; par la même raison les vîtesses des deux premiers instans subsisteroient avec celles du troisieme instant; & ainsi les vîtesses de tous ces premiers instans subsisteroient avec les vîtesses que ce même corps recevroit dans chacun des instans suivans, ou bien (ce qui est la même chose) lorsqu'un corps tombe, ce corps reçoit des parties égales de vîtesse dans des tems égaux, en supposant que l'action de la pesanteur est uniforme, & négligeant la résistance de l'air.

PROPOSITION II.

THEOREME.

952. *Un corps qui tombe reçoit des degrés égaux de vîtesse dans des tems égaux; de sorte que dans le second instant il a une vîtesse double de celle qu'il avoit dans le premier instant de sa chûte, & dans le troisieme il en a une triple, & ainsi des autres.*

DÉMONSTRATION.

Puisqu'un corps qui tombe est continuellement poussé en bas, par l'action de sa pesanteur, qui est toujours la même (art. 951), il s'ensuit que la pesanteur doit donner à ce corps, à chaque instant de sa chûte des degrés égaux de vîtesse: donc puisque les degrés de vîtesse que le corps a reçus en premier lieu subsistent entiérement avec ceux qu'il auroit reçus en dernier lieu (art. 951), le corps en tombant se trouve avoir autant de degrés de vîtesse, causés par sa pesanteur, qu'il s'est écoulé de momens depuis le commencement de sa chûte jusqu'au moment que l'on compte: donc ce corps aura à la fin du second instant une vîtesse double de celle du premier, au troisieme instant une vîtesse triple, &c. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

953. Il suit delà que les degrés de vîtesse qu'un corps a acquis à la fin de chaque instant de chûte, sont comme les tems qui se sont écoulés depuis le commencement de sa chûte: donc puisque les instans écoulés depuis le premier moment de la chûte sont en progression arithmétique, les degrés de vîtesse acquis à la fin de ces tems sont aussi en progression arithmétique.

DEMANDE.

954. On demande qu'il ſoit permis de repréſenter les tems par des lignes ; ce qui ne doit faire aucune difficulté : car ayant repréſenté une minute par une ligne d'un pouce, je repréſenterai deux ou trois minutes par des lignes de deux ou de trois pouces. Par cette ſuppoſition, on ne prétend pas que les tems & les lignes ſoient des quantités de même nature, mais bien que les dernieres ſont des expreſſions propres à repréſenter les différens rapports des premiers.

PROPOSITION III.

THÉOREME.

Figure 331. 955. *Si deux corps égaux* A *&* B *ſont en mouvement pendant un même-tems, l'un d'une vîteſſe uniforme, l'autre d'un mouvement uniformément accéléré, tel que le dernier degré de la vîteſſe acquiſe ſoit égal à la vîteſſe conſtante du corps qui ſe meut uniformément, l'eſpace parcouru par le premier ſera double de l'eſpace parcouru par le ſecond.*

DÉMONSTRATION.

Soit repréſenté le tems du mouvement par AC, & ſuppoſons-le partagé en un nombre infini d'inſtans égaux. Si pendant un de ces inſtans le corps qui ſe meut d'un mouvement uniforme parcoure CD pendant le tems AC, il parcourra autant de fois CD qu'il y a d'inſtans dans le tems du mouvement, ou qu'il y a de points dans AC : donc le rectangle $AC \times CD$, repréſentera l'eſpace parcouru pendant le tems AC par le corps, dont le mouvement eſt uniforme. Préſentement voyons quel ſera l'eſpace que parcourra le mobile qui ſe meut d'un mouvement uniformément accéléré, pendant le même tems AC, en ſuppoſant que la vîteſſe qu'il a acquiſe à la fin du dernier inſtant du tems AC eſt auſſi repréſentée par CD. Cela poſé, par le dernier corollaire, puiſque les vîteſſes ſont comme les tems, à la fin du tems AB, c'eſt-à-dire dans l'inſtant B, il parcourra une ligne BE qui ſera à CD, comme $AC : AB$: donc la ſomme des eſpaces parcourus par le corps qui eſt mu d'un mouvement uniformément accéléré, ſera repréſentée par la ſomme des élémens du triangle ACB : donc l'eſpace total parcouru pendant le tems AB n'eſt pas différent

de cette somme, & sera représenté par $AC \times \frac{CD}{2}$: donc le premier mobile parcourt dans le même-tems un espace double du second. C. Q. F. D.

Corollaire I.

956. Puisque les deux corps sont égaux, on peut n'en supposer qu'un seul ; d'où il suit que si un même corps est mu d'un mouvement uniforme pendant un certain tems, & que dans un tems égal il ait acquis d'un mouvement uniformément accéléré une vîtesse égale à celle du mouvement uniforme, l'espace qu'il aura parcouru dans le premier cas sera double de celui qui a été parcouru dans le second.

Corollaire II.

957. Donc les espaces parcourus dans un mouvement uniformément accéléré sont entr'eux comme les quarrés des tems, à commencer de l'instant que le corps a été mis en mouvement : car il est évident que les triangles ABE, ACD qui représentent les espaces parcourus pendant les tems AB, AC étant semblables, sont comme les quarrés des tems AB & AC.

Corollaire III.

958. Puisque les tems sont comme les vîtesses (art. 953), & que les espaces parcourus depuis le premier instant du mouvement sont comme les quarrés des tems, ils seront aussi entr'eux comme les quarrés des vîtesses acquises. Ainsi nommant L une longueur parcourue depuis le point du repos ; T, le tems employé à la parcourir ; V, la vîtesse acquise à la fin de ces tems ; & l, une autre longueur parcourue depuis le point de repos ; t, le tems employé à la parcourir ; u, la vîtesse acquise à la fin de ce tems, l'on aura $L : l :: TT : tt$, ou bien $L : l :: VV : uu$.

Corollaire IV.

959. Puisque l'on a $L : l :: VV : uu$, si on extrait la racine quarrée de chaque terme, on aura $\sqrt{L} : \sqrt{l} :: V : u$; ce qui fait voir que dans le mouvement accéléré, on peut exprimer les vîtesses par les racines des longueurs parcourues depuis le point de repos. Il faut s'appliquer à comprendre ceci pour n'être point arrêté dans la suite.

COROLLAIRE V.

960. Comme dans la chûte des corps graves la pesanteur agit à chaque instant pour les approcher du centre de la terre, qu'elle leur communique à chaque instant des degrés égaux de vîtesse (au moins cette supposition ne peut causer aucune erreur en les considérant à des distances peu considérables de la surface de la terre, même de quelques lieues); il s'ensuit que les espaces parcourus par un corps qui tombe librement, à compter du point de repos, sont comme les quarrés des instans écoulés depuis le repos.

COROLLAIRE VI.

961. Il suit delà que les espaces qu'un corps parcourt en tombant pendant des tems égaux, sont entr'eux comme la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, &c. Imaginons que dans le premier instant de sa chûte le corps ait parcouru une toise. Comme cette vîtesse a été acquise par degrés, & que d'ailleurs il la conserve dans tous les instans suivans; dans le second instant, en vertu de ce premier degré de vîtesse, le corps parcourra un espace double, c'est-à-dire 2 toises (art. 955), mais la pesanteur a toujours agi de la même maniere; donc elle aura fait parcourir au corps une toise de plus dans ce second instant: il aura donc parcouru 3 toises. De même avec les deux degrés de vîtesse qu'il possede, dans le troisieme instant il parcourra 4 toises, & en vertu du nouveau degré que la pesanteur lui communique par son action, il parcourra encore une toise: donc dans le troisieme instant il aura parcouru 5 toises, & ainsi des autres. Donc les espaces qu'un corps qui tombe parcourt pendant des tems égaux sont comme les nombres 1, 3, 5, 7, 9, &c; d'où il suit encore de nouveau que les espaces parcourus depuis le premier instant de la chûte, sont comme les quarrés des instans qui se sont écoulés; puisqu'en ajoutant continuellement les nombres impairs depuis l'unité, il en résulte les nombres quarrés: car il est évident que $1 = 1$, $4 = 1 + 3$, $9 = 1 + 3 + 5$, $16 = 1 + 3 + 5 + 7$, &c.

COROLLAIRE VII.

962. Il suit encore delà que si un corps, après avoir parcouru un certain espace pendant un certain nombre d'instans, ve-

noit à être abandonné tout d'un coup de la force de la pesanteur, il continueroit néanmoins à se mouvoir avec une vîtesse uniforme égale à celle que la pesanteur lui a communiquée dans le premier tems, & par conséquent pendant un tems égal à celui de la descente, il parcourroit toujours un espace double de celui qu'il a parcouru pendant tout le tems que la pesanteur a agi sur lui.

Corollaire VIII.

963. Il suit encore delà que si l'on jette un corps de bas en haut, suivant une direction perpendiculaire ou oblique à l'horizon, le corps sera mu d'un mouvement uniformément retardé : car il est évident que dans cette supposition la pesanteur étant opposée en tout ou en partie au mouvement de projection de ce corps, doit lui ôter à chaque instant des degrés égaux de vîtesse, & par conséquent au bout d'un certain tems, lorsque la pesanteur aura détruit toute la force que le mobile avoit pour s'élever perpendiculairement, il commencera à tomber, & passera successivement par tous les degrés possibles d'accélération, jusqu'à ce qu'il soit arrivé à quelque corps qui l'arrête entiérement.

Corollaire IX.

964. Donc la vîtesse qu'un corps a acquise en tombant d'une certaine hauteur, est égale à celle qui auroit pu le faire monter à cette hauteur ; ou, ce qui revient au même, si l'on jette un corps de bas en haut avec une force égale à celle qu'il a acquise en tombant d'une certaine hauteur, cette force sera capable de le faire remonter à la même hauteur ; d'où il suit encore que les espaces parcourus par un corps poussé de bas en haut, seront comme les nombres impairs, pris dans un ordre renversé, si les tems sont égaux.

Corollaire X.

965. Donc si l'on modifie la force de la pesanteur d'une maniere constante, les espaces que cette force modifiée fera parcourir à un corps quelconque, seront toujours suivant les loix générales de la pesanteur. Par exemple, un corps qui tombe le long d'un plan incliné à l'horizon, ne glisse sur le plan qu'en conséquence des loix de la pesanteur qui l'oblige

toujours à descendre : donc il doit parcourir des espaces qui soient dans la raison des quarrés des tems, à compter depuis le premier instant du mouvement. Si dans l'expérience on ne trouvoit pas cette loi avec toute la précision possible, il n'y a que le frottement & la résistance du milieu dans lequel se fait le mouvement qui pourroit en altérer la justesse, ce qui ne conclud rien contre les principes que nous venons d'établir, puisque nous n'avons pas eu égard à ces circonstances.

Remarque.

966. Comme la théorie de la pesanteur a une application directe & immédiate à la projection des corps ; que l'on ne peut entendre celle du jet des bombes sans être convaincu des vérités que nous venons d'établir, & que d'ailleurs il y auroit une infinité de pesanteurs possibles, capables de faire parcourir aux corps soumis à leur action des espaces qui seroient entr'eux comme les quarrés des tems depuis le premier instant du mouvement, ou comme les nombres impairs depuis l'unité, en supposant les tems égaux, c'est à l'expérience à décider quelle est la force de la pesanteur auprès de la surface de la terre : car dans la supposition même que cette force augmentât ou diminuât à raison de ses différentes distances de la terre, suivant un rapport quelconque, les distances auxquelles on peut jetter les corps, même les plus grandes, ne sont pas assez considérables pour que l'on puisse appercevoir des variations dans l'action de la pesanteur.

967. On a reconnu par l'expérience qu'un corps qui tombe parcourt 15 pieds dans la premiere seconde de sa chûte, qu'il en parcourt 45 dans la seconde, 75 dans la troisieme, & ainsi de suite : donc la pesanteur est une force capable de faire parcourir 30 pieds dans une seconde à tout corps qui auroit été soumis à son action pendant le même-tems, puisque les 15 pieds n'ont été parcourus que d'un mouvement accéléré, & qu'il s'agit ici d'un mouvement uniforme. De même si la pesanteur a agi pendant 3 secondes, elle fera parcourir au corps 270 pieds pendant le même-tems, & par conséquent 90 pieds dans une seconde. Or il est visible que les vîtesses 30 & 90 pieds par seconde, sont comme les tems pendant lesquels le mobile est tombé.

968. Tout nous prouve cette prodigieuse augmentation de

vîtesse à raison des racines quarrées des hauteurs d'où les corps tombent : car si la vîtesse d'un corps qui tombe de 3 pieds étoit égale à celle d'un corps qui tombe de 60 pieds de haut, il n'y auroit pas plus de danger à tomber d'un troisieme étage qu'à tomber de deux ou trois pieds de haut, puisque l'on ne frappe la terre qu'à raison de la vîtesse avec laquelle on tombe. De même il n'y a personne qui ne sçache qu'une pierre nous blesse d'autant plus qu'elle tombe de plus haut.

Digression sur les variations de la pesanteur.

969. « Nous avons déja insinué que la pesanteur pouvoit » bien n'être pas une force constante & égale, à toutes les dis- » tances différentes de notre globe, quoiqu'on la regarde » comme telle dans les distances médiocres ; c'est ce qui arrive » en effet. M. *Newton* a démontré le premier que cette force » décroît en raison inverse des quarrés des distances, ensorte » que la force qui, combinée avec une force de projection, » retient la lune dans son orbite, en l'écartant continuelle- » ment de la tangente qu'elle tend à décrire, n'est autre chose » que la pesanteur diminuée en raison inverse du quarré des » distances. Il prouve qu'en vertu de la pesanteur, la lune » dans une minute s'écarte de 15 pieds de la tangente au point » de son orbite où elle étoit au commencement de cette mi- » nute : donc pour comparer la force de la pesanteur près de » la lune à celle de la pesanteur près de la terre, il faut voir » ce qu'elle fera décrire dans une seconde, en supposant tou- » jours que les espaces parcourus sont comme les quarrés des » tems, & faisant l'espace de 15 pieds égal à l'unité. Une mi- » nute vaut 60 secondes : donc les quarrés des tems seront 3600 » & 1 ; faisant cette proportion $3600 : 1 :: 1 : \frac{1}{3600}$, ce qua- » trieme terme sera l'espace parcouru près de la lune dans une » seconde de tems : donc les espaces que les corps parcourent » dans une seconde près de la lune, & près de la terre, en vertu » de la pesanteur, sont comme $\frac{1}{3600} : 1$. Mais les distances des » corps qui sont sur notre globe & de la lune au centre de la » terre sont 1 & 60, parce que la distance moyenne de la lune » à la terre est de 60 rayons de la terre : ces quarrés sont 1 & » 3600, qui sont précisément dans la raison inverse des forces » ou espaces parcourus $\frac{1}{3600}$ & 1, puisque $\frac{1}{3600} : 1 :: 1 : 3600$. » C. Q. F. D. »

« On a auſſi découvert que la peſanteur varie ſelon les » diſtances à l'équateur, enſorte qu'elle va en augmentant de » l'équateur vers les poles, & réciproquement. On s'eſt ap- » perçu de cette variation, en obſervant qu'un pendule qui bat » les ſecondes à Paris, c'eſt-à-dire qui fait ſoixante vibrations » dans une minute, en faiſoit un plus petit nombre vers l'é- » quateur; d'où on a conclu avec certitude que la peſanteur » eſt moindre vers l'équateur que vers les poles, puiſque les » vibrations des pendules, qui ne ſont que des effets de la pe- » ſanteur, ſont plus lentes vers l'équateur que vers les poles. » Cette diminution de peſanteur eſt cauſée par le mouvement » de rotation de la terre autour de ſon axe, duquel il réſulte » une force centrifuge plus grande vers l'équateur que vers les » poles.

Tout ce que nous venons de voir ſur les variations de la peſanteur n'empêche pas qu'on ne la doive regarder comme une force conſtante, puiſque ces variations ne peuvent être ſenſibles dans les plus grandes diſtances auxquelles on puiſſe jetter les corps. Quoique ces vérités n'aient pas une application directe au jet des bombes, qui doit faire le principal objet de l'Ingénieur, je n'ai pas cru cependant devoir les ſupprimer, parce qu'elles ſont trop belles pour qu'il ſoit permis à un homme de ſcience de les ignorer, & que de plus il eſt à propos que l'on ſçache quels ſont les changemens qui peuvent altérer les loix que nous venons d'établir, & quels ſont ceux qui ne peuvent produire le même effet.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

970. *Un corps eſt tombé perpendiculairement pendant quatre ſecondes; on demande l'eſpace que la peſanteur lui a fait parcourir.*

SOLUTION.

Soit appellé x cet eſpace inconnu; puiſque les eſpaces parcourus dans des tems différens, depuis le commencement du mouvement, ſont comme les quarrés des tems (art. 958), & que d'ailleurs on ſçait par expérience qu'un corps parcourt 15 pieds dans la premiere ſeconde; on aura cette proportion, $1 : 16 :: 15 : x = \frac{15 \times 16}{1} = 240$ pieds. C. Q. F. T. & D.

PROPOSITION V.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

971. *Un corps a parcouru en tombant par la seule force de la pesanteur un espace de 375 pieds, on demande le tems qu'il lui a fallu pour les parcourir.*

SOLUTION.

Soit x le tems cherché; puisque les espaces parcourus sont comme les quarrés des tems (art. 957), on aura cette proportion, $15 : 375 :: 1 : xx$: donc $xx = \frac{375}{15} = 25$, d'où l'on tire $x = 5$, c'est-à-dire que le corps a été 5 secondes de tems en mouvement. C. Q F. T. & D.

972. Comme dans le jet des bombes le mobile se trouve entre deux forces, l'une de projection & simplement motrice, c'est la force de la poudre, l'autre accélératrice ou retardatrice constante; c'est la force de la pesanteur; suivant que le corps descend ou monte, quelle que soit sa direction, & que d'ailleurs abstraction faite des résistances de l'air à ces deux forces, on ne peut trouver la courbe que le mobile décrit pendant son mouvement, sans supposer qu'il satisfait à chacune de ces deux forces à la fois, comme s'il n'avoit été poussé que par l'une ou l'autre séparément. Nous allons démontrer cette proposition, que l'on appelle le *mouvement composé.*

DÉFINITION.

973. On appelle simplement *force motrice*, toute force qui n'est appliquée à un corps que pendant un seul instant. Tout corps dur en mouvement est une force motrice par rapport à celui qu'il rencontre, car il ne lui est appliqué que pendant l'instant du choc.

974. Si deux ou plusieurs forces motrices sont appliquées dans un même instant à un même corps pour le mouvoir, chacune suivant sa direction, on les appelle *forces composantes.* La force qu'elles donnent est appellée *résultante.*

PROPOSITION VI.

THÉOREME.

975. *Si un corps* K *est poussé à la fois par deux forces* M, N *Figure 333.* *simplement motrices, & capables de lui faire parcourir dans le même*

tems, ſuivant leurs directions, l'une A B, *& l'autre* A C; *je dis, 1°. que le corps par l'effort composé de ces deux puiſſances, décrira d'un mouvement uniforme la diagonale* A D *du parallélogramme formé ſur leurs directions; 2°. qu'il parcourra cette même diagonale pendant le même-tems qu'il auroit parcouru le côté* A B *ou le côté* A C, *ſi l'une des deux forces ſeulement eût agi ſur lui.*

Démonstration.

Concevons deux regles infiniment minces M A B, N A C, chacune égale en peſanteur au corps K, elles-mêmes en mouvement, & dirigées, l'une ſuivant A B, & l'autre ſuivant A C, avec des vîteſſes qui leur font parcourir le double des lignes A C & A B, que les puiſſances M & N font parcourir au corps K. Ces regles venant à choquer le corps K, que l'on ſuppoſe en repos, lui communiqueront chacune la moitié de leurs vîteſſes, ſuivant les loix des corps à reſſort, & par conſéquent elles font préciſément ſur ce corps un effet égal à celui qu'auroient fait les puiſſances M, N que nous avons ſuppoſées agir ſur lui, & elles ne ſont pas différentes de ces mêmes forces. Cela poſé, le corps K doit décrire la diagonale A D dans le même-tems qu'il auroit décrit la ligne A B ou la ligne A C, s'il n'eût été pouſſé que par une ſeule puiſſance M ou N. Pour s'en convaincre, on remarquera que les regles ne choquent le corps qu'autant qu'il eſt néceſſaire pour qu'il ne puiſſe s'oppoſer au mouvement qui leur reſte, lequel eſt la moitié de celui qu'ils avoient avant le choc. Il faut de plus remarquer que les regles ne faiſant que gliſſer l'une ſur l'autre, ne peuvent détruire mutuellement le mouvement qui leur reſte: donc elles ſont mues avec des vîteſſes qui leur font parcourir les lignes A B, A C dans le tems que les puiſſances M, N auroient fait parcourir au corps K les mêmes lignes. Enfin on fera attention que dans ce même-tems leur interſection mutuelle décrit la diagonale A D: car il eſt évident que lorſque la regle A B eſt venue en E F, la regle A C a parcouru une partie proportionnelle de l'eſpace A B, & ſe trouve par conſéquent en G H; d'où il ſuit évidemment que l'interſection I eſt un point de la diagonale: donc pour que le corps K ne s'oppoſe point au mouvement de ces regles, il ſuffit qu'il ſoit venu d'une égale vîteſſe de K en I, c'eſt-à-dire qu'il ait parcouru K I dans le tems que les regles ont parcouru les eſpaces

AE, AH : donc il arrivera en D dans le tems que les regles seront venues en BD & en CD. D'ailleurs il est visible, comme nous l'avons déja fait remarquer, que ces regles sont égales aux puissances M & N, puisqu'elles communiquent la même vîtesse au corps K, suivant les loix des corps durs : donc le corps décrira la diagonale AD dans le même-tems qu'il eût parcouru AB ou AC, s'il n'eût été poussé que par l'une des forces M ou N. C. Q. F. D.

On peut encore concevoir le mouvement composé d'une autre maniere. Imaginons que le corps K est mu sur une regle AB, & que dans le même-tems qu'il parcourt la longueur de la regle, une force emporte cette regle le long de AC en lui faisant parcourir AC. Il est évident que dans ce mouvement le corps K décrit encore la diagonale AD, puisque les espaces entiers AB, AC & leurs parties proportionnelles sont décrits dans des tems égaux. Donc, &c.

On pourroit craindre dans cette derniere démonstration, que la supposition que nous avons faite que le corps est mu sur la ligne AB, & que cette ligne est emportée sur AC parallélement à elle-même, ne changeât quelque chose dans la force N qui meut le corps de A en C. Pour prévenir cette objection, nous remarquerons, avec M. *Varignon*, que lorsque deux corps sont mus d'une égale vîtesse, comme dans notre hypothese, cette même vîtesse les mettant dans l'impossibilité de s'aider ou de se nuire réciproquement, la force qui meut chacun séparément, est toujours la même ; d'où il suit que la force qui fait parcourir AC au corps K est toujours la même, soit qu'il soit emporté sur la regle AB, ou que la regle soit supprimée ; moyennant quoi on peut regarder cette derniere démonstration comme une des plus satisfaisantes.

Au reste comme cette proposition ne se trouve ici que relativement au jet des bombes, & pour faire voir qu'un corps qui est entre deux puissances, prend une direction par laquelle il satisfait à l'impulsion de chacune des forces qui agissent sur lui, nous donnerons encore une démonstration plus lumineuse & plus convaincante de cette même proposition dans le Traité de Méchanique qui doit suivre. Comme cette proposition est de la derniere importance dans tout ce qui a rapport à la composition & la décomposition des forces, on doit, autant qu'il est possible, s'appliquer à bien éclaircir les principes.

COROLLAIRE I.

976. Donc la force résultante, suivant la diagonale AD, est à l'une des composantes M ou N, comme AD : AB, ou comme AD : AC : car les forces qui meuvent des corps égaux sont comme les espaces parcourus en même-tems.

COROLLAIRE II.

977. Donc le corps satisfait aux deux puissances en même tems, comme s'il n'avoit été poussé que par l'une des deux : car il est évident que lorsqu'il est au point D, il se trouve éloigné de la ligne AB d'une quantité BD = AC, & réciproquement il se trouve éloigné de la direction AC d'une quantité DC = AB.

COROLLAIRE III.

978. Donc la force que le corps a, suivant la diagonale, est capable de faire équilibre avec les composantes, si elle est dirigée dans un sens contraire, c'est-à-dire que si l'on pousse un corps de D vers A avec une vîtesse capable de lui faire parcourir AD dans un certain tems, ce corps arrêtera avec la force qu'il a, dans cette hypothese, celle des puissances capables de lui faire parcourir AB & AC dans le même-tems, puisque l'effort résultant de ces deux puissances appliquées dans le même instant à ce corps, ne peuvent lui faire parcourir que la diagonale avec la même vîtesse.

COROLLAIRE. IV.

979. Donc si l'on a une force quelconque, on pourra toujours la regarder comme la résultante de deux autres forces, & supposer qu'elle est la diagonale du parallélogramme formé sur les directions de ces deux nouvelles forces ; d'où il suit encore qu'il y a une infinité de forces dans lesquelles on peut décomposer une force quelconque, puisqu'une ligne peut être diagonale d'une infinité de parallélogrammes différens. L'état de la question ou les conditions du problême, déterminent ordinairement quelles sont les forces dans lesquelles on doit décomposer une force donnée. On en verra des exemples dans la méchanique.

COROLLAIRE V.

980. Donc si un corps se trouve à la fois soumis à l'action de deux forces accélératrices ou retardatrices constantes, il décrira encore la diagonale du parallélogramme formé sur les directions de ces forces : car ces forces ne sont que des forces motrices qui renouvellent leur action à chaque instant; & comme les degrés d'augmentation ou de diminution sont proportionnels dans tous les instans du mouvement pour chaque force, il s'ensuit que la ligne décrite par le mobile doit être une ligne droite.

COROLLAIRE VI.

981. Si les deux forces ne gardent pas un certain rapport constant pendant chaque instant du mouvement, la ligne décrite par le mobile ne peut être qu'une ligne courbe ; cependant toujours telle qu'il satisfait durant chaque instant du mouvement à chacune des deux forces à la fois, comme s'il n'avoit été soumis qu'à l'une des deux.

COROLLAIRE VII.

982. Donc si l'une des forces est variable, & l'autre constante, la ligne décrite par le corps soumis à l'action de ces deux forces sera nécessairement une ligne courbe; d'où il suit & du corollaire précédent, que l'on peut ramener la théorie des courbes à celles du mouvement; & réciproquement connoître quel rapport les forces motrices doivent avoir entr'elles pour faire décrire à un corps une courbe déterminée.

Tout ce que nous venons de voir est suffisant pour connoître la courbe décrite par un corps soumis à l'action d'une force motrice, & à celle de la pesanteur, abstraction faite des résistances de l'air & des différentes circonstances qui peuvent altérer la précision des regles que nous allons établir. Il suffira de dire que les expériences du vuide démontrent que les corps tomberoient avec la même vîtesse, quels que soient leurs masses & leurs volumes, si l'air ne résistoit pas à leur mouvement. Si l'on vouloit avoir égard à cette résistance, il faut déterminer auparavant la résistance des fluides aux corps en mouvement, à raison de leurs volumes, de leurs masses & de leurs vîtesses. Ainsi l'on voit que nous ne pouvons actuelle-

ment déterminer la courbe que les corps décrivent en montant ou en descendant, suivant une ligne oblique à l'horizon, qu'en faisant abstraction des résistances de l'air, puisque l'air est un fluide, & que nous n'avons pas encore donné la théorie de la résistance des fluides.

CHAPITRE III.

De la théorie & de la pratique du Jet des Bombes pour servir à l'intelligence de la construction & de l'usage d'un instrument universel pour le jet des bombes.

983. TOUS ceux qui tirent des bombes sçavent en général que la bombe décrit une courbe, en allant du mortier au lieu où elle tombe; mais il faut encore sçavoir quelle est cette courbe, afin d'établir quelques regles qui servent de principes dans la pratique, en conséquence des propriétés de la courbe décrite pendant le mouvement. Nous allons démontrer que la courbe décrite non seulement par une bombe, mais par tout corps, quelle que soit sa direction parallele ou oblique à l'horizon, est toujours une parabole. On suppose encore ici comme dans ce qui précéde, que l'air ne fait aucune résistance, soit à la force d'impulsion, soit à celle de la pesanteur. Si la direction du projectile est verticale ou perpendiculaire à l'horizon, tout le monde sçait que le corps doit décrire une ligne droite, ainsi il n'est pas question de cette direction dans le cas présent.

DEMANDE.

984. On demande qu'on puisse regarder la force de la poudre comme une force capable de faire parcourir au corps jetté des espaces égaux. Cette demande est une suite immédiate de l'hypothese présente qu'on n'a pas égard à la résistance de l'air; d'ailleurs la force de la poudre est une force simplement motrice, qui n'agit sur le corps que dans un certain tems, que l'on peut regarder comme un instant par rapport à la durée du mouvement.

PROPOSITION VII.

THÉOREME.

985. *Si un corps A est poussé par une force motrice suivant une direction parallele ou oblique à l'horizon, je dis que par l'effort composé du mouvement d'impulsion & de la pesanteur, il décrira une parabole.* Figure 134 & 135.

DÉMONSTRATION.

Quelle que soit la direction de la force motrice, le corps A se trouvera entre deux forces, l'une constante, c'est la force de la poudre, l'autre accélératrice constante, c'est celle de la pesanteur : donc (art. 975) il doit satisfaire dans le même tems à chacune de ces deux forces, comme s'il n'avoit été soumis qu'à l'une des deux. En vertu de la force d'impulsion, il parcourt, dans des tems égaux, des espaces égaux AE, EG, GI, IB, & en vertu de la pesanteur, il parcourt à la fin de chacun de ces tems des espaces EF, GH, IK, BD, qui sont comme les quarrés des tems écoulés depuis le premier instant du mouvement. Cela posé, puisque les espaces AE, AG, AI croissent en progression arithmétique, & que les tems croissent dans la même proportion ; & que d'ailleurs les espaces parcourus à la fin de chacun de ces tems, à compter du premier instant, sont comme les quarrés des tems ; ces mêmes espaces EF, GH, IK, BD seront aussi entr'eux comme les quarrés des lignes AE, AG, AI, AB proportionnelles au tems ; & prenant au lieu des lignes AE, AG, AI, leurs paralleles LF, MH, NK, & de même au lieu des lignes EF, GH, IK, leurs paralleles AI, AM, AN, on aura, par ce qu'on vient de voir $LF^2 : MH^2 : NK^2 :: AL : AM : NN$; d'où il suit que la courbe AFD est une parabole, puisque les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme leurs abscisses. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

986. Comme la pesanteur n'est pas un instant sans agir sur le projectile, quelle que soit sa direction, il est évident qu'elle le détourne de cette ligne dès le premier instant du mouvement : donc la ligne AB qui exprime la direction de la force motrice, est tangente à la parabole.

COROLLAIRE II.

987. Si la direction de la force motrice est parallele à l'horizon, la verticale AO menée par le point A sera l'axe de la parabole, & le point A est le sommet de la courbe. Si la direction est oblique, la ligne AO menée par le même point A sera un diametre. Si le corps est poussé de A vers B, le point H déterminé par la verticale, menée par le milieu de GB, sera le plus haut où le corps puisse s'élever; s'il est poussé de A vers Q, le point A sera le plus haut où il puisse se trouver dans le mouvement. *Figure* 335.

COROLLAIRE III.

988. Les paraboles décrite par un même mobile ont d'autant plus d'étendue que la force motrice est plus grande sous la même inclinaison: car l'étendue dépend de la force motrice & de l'inclinaison de la direction de cette même force à l'horizon.

DÉFINITION.

989. La ligne AB, direction de la force motrice, est nommée la ligne de *projection*; la ligne BD élevée du point D de l'horizon où le corps tombe perpendiculairement jusqu'à la ligne de projection est nommée ligne de *chûte*. La ligne AD menée du point d'où le corps part jusqu'au point où il arrive sur l'horizon, est appellée ligne de *but*. Si cette ligne est horizontale, comme dans la figure 335, on l'appelle *amplitude* de la parabole; cette ligne détermine l'étendue du jet, & c'est pour cela qu'on l'appelle *amplitude*.

PRINCIPE FONDAMENTAL.

990. Comme les étendues des paraboles décrites par un même mobile dépendent de la force qui a mis le mobile en mouvement; pour ramener cette force à quelques mesures fixes & déterminées, les Géometres, après *Galilée*, sont convenus d'estimer les forces par les hauteurs, dont il auroit fallu que le même corps tombât pour acquérir la vîtesse qu'on lui suppose: car comme un mobile en tombant acquiert à chaque instant de nouveaux degrés de vîtesse, il n'y a point de vîtesse si grande qu'on puisse imaginer, à laquelle le même mobile ne puisse arriver, puisque l'on peut supposer la hauteur dont il est tombé aussi grande que l'on voudra.

PROPOSITION VIII.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

991. *Connoissant la ligne de projection* AB, *supposée parallele à l'horizon, & la ligne de chûte* BF *de la parabole* AEF *décrite par un mobile quelconque, on demande de quelle hauteur ce mobile doit tomber pour avoir à la fin de sa chûte une vîtesse avec laquelle il puisse parcourir la ligne* AB *d'un mouvement uniforme, dans le même tems que la pesanteur lui fera parcourir* BF *ou* AG. Figure 336.

SOLUTION.

Soit x la hauteur d'où le corps doit tomber pour avoir la vîtesse demandée ; soit T le tems que le corps emploie à parcourir BF en vertu de sa pesanteur ; soit fait de plus $BF = a$, & $AB = 2b$. La vîtesse que la pesanteur a communiquée au corps à la fin de sa chûte par BF est telle qu'elle lui fait parcourir $2a$ ou 2BF dans le tems T (art. 962) : la vîtesse qui doit être acquise par la hauteur inconnue x est telle qu'elle fait parcourir au même corps l'espace $2b$ ou AB dans le même tems T : d'ailleurs (art. 959) les vîtesses acquises par différentes hauteurs sont comme les racines quarrées de ces hauteurs, qui sont a & x: on aura donc cette proportion, $\sqrt{a} : \sqrt{x} :: 2a : 2b :: a : b$; d'où l'on tire $a\sqrt{x} = b\sqrt{a}$: élevant tout au quarré, on aura $a^2x = b^2a$, d'où l'on déduit $x = \frac{b^2}{a}$: donc on aura cette proportion, $a : b :: b : x$. Pour construire cette valeur de x, du point G au point D milieu de la ligne AB, on menera une ligne GD; on élevera au point D, la perpendiculaire CD à cette ligne, jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne AG, prolongée en C; je dis que la ligne AC est égale à x, c'est-à-dire que cette ligne est la hauteur dont le corps doit tomber pour avoir la vîtesse demandée : car à cause des triangles semblables GAD, DAC, on aura $AG(b) : AD(b) :: AD(b) : AC\left(\frac{bb}{a}\right)$. C. Q. F. T. & D.

Suite du Problême précédent.

992. Si l'on veut sçavoir de quelle hauteur le mobile doit tomber pour acquérir une vîtesse capable de lui faire parcourir

la ligne oblique GD dans un tems égal à la moitié de celui qu'il auroit employé à tomber par AG : on fera de même la hauteur inconnue $= y$; la ligne GD connue$= d$; la hauteur AG$= a$; & l'on dira: La vîtesse acquise par la hauteur AG est à la vîtesse acquise par la hauteur inconnue y, comme l'espace AG qu'elle fait parcourir uniformément pendant la moitié du tems de la chûte par AG, est à l'espace GD qui doit être parcouru pendant le même-tems, selon l'hypothese: & comme d'ailleurs les vîtesses sont comme les racines quarrées des hauteurs, on aura cette proportion, $\sqrt{a} : \sqrt{y} :: a : d$: donc en élevant tout au quarré $a : y :: a^2 : dd$: donc $y = \frac{a^2d^2}{aa}$ ou $\frac{dd}{a}$: donc la ligne GC est la hauteur que l'on demande; car à cause des triangles rectangles semblables GAD, GDC, on a AG(a):GD(d)::GD(d):GC$\left(\frac{dd}{a}\right)$. C.Q.F.T. & D.

Corollaire.

Figure 337. 993. Puisque le mobile avec la vîtesse acquise par la chûte CG parcourt GD dans la moitié du tems qu'il emploie à parcourir AG en tombant; pendant un tems quadruple il parcourra une ligne quadruple GE: donc dans le double du tems de la chûte par AG il parcourra d'un mouvement uniforme la ligne GE quadruple de GD. Mais dans le même tems double de celui de la descente par AG, la pesanteur fera parcourir un espace quadruple de AG, à compter depuis le premier instant de la chûte; d'où il suit que si un mobile est poussé suivant une direction oblique GD avec la force acquise par le diametre CG, il parcourra d'un mouvement uniforme la ligne GE quadruple de GD dans le même tems que la pesanteur lui feroit parcourir d'un mouvement accéléré la verticale EF aussi quadruple de GA, comme il est évident par ce qu'on vient de dire, & à cause des triangles semblables GAD, GEN.

Definition.

994. Toute ligne comme CG parcourue par un mobile pour acquérir un degré de force capable de lui faire décrire une parabole déterminée, est appellée la *ligne de hauteur*.

PROPOSITION IX.

THÉOREME.

995. *Le parametre d'une parabole décrite par un mobile est quadruple de la ligne de hauteur.* Figure 336.

DÉMONSTRATION.

Ce problême renferme deux cas ; car le corps est projetté horizontalement comme dans la figure 336, ou suivant une ligne oblique à l'horizon, comme dans la figure 337. Nous l'allons démontrer dans l'un & l'autre cas.

1°. Si le mobile est projetté horizontalement, suivant la ligne AB, l'ordonnée GF est égale à la ligne AB, & partant égale à 2AD. Par la propriété de la parabole, le quarré de GF est égal au produit de son abscisse AG par le parametre, ainsi nous aurons GF^2 ou $4AD^2 = AG \times 4AC$: mais à cause des triangles semblables DAG, CAD, on a AG:AD::AD:AC ; donc $AD^2 = AG \times AC$: donc $4AD^2$, ou $GF^2 = AG \times 4AC$: donc le quadruple de AC ou de la ligne de hauteur est égal au parametre. C. Q. F. 1°. D.

2°. Si la ligne de projection GE est oblique à l'horizon, Figure 337. on remarquera d'abord que la ligne de projection EG étant tangente à la parabole décrite en G, la ligne HI parallele à GB sera ordonnée au diametre GI ; & comme, par hypothese, GB est double de GD ; IH = GB sera aussi double de GD. Mais à cause des triangles semblables GAD, GDC, on aura GA : GD :: GD : GC : donc $GD^2 = GA \times GC$, & partant $4GD^2$ ou $IH^2 = GA \times 4GC = GI \times 4GC$, puisque GA = GI. C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE I.

996. Il suit delà que si on éleve sur la ligne de projection GE une perpendiculaire EM, qui aille rencontrer la ligne de hauteur GC prolongée en M, MG sera le parametre du diametre GK : car les triangles GCD & GME étant semblables, on aura GD : GE :: GC : GM : donc puisque GE est quadruple de GD, GM sera aussi quadruple de GC.

COROLLAIRE II.

997. Il suit encore delà que connoissant le parametre d'une

parabole décrite par un mobile, on connoîtra aisément de quelle hauteur le mobile doit tomber pour acquérir une force capable de lui faire décrire la parabole à laquelle appartient le parametre, puisque cette hauteur sera toujours le quart du parametre.

Corollaire III.

998. Comme avec un même parametre on peut décrire une infinité de paraboles différentes, lorsque l'angle des ordonnées avec le diametre n'est pas déterminé ; il s'ensuit qu'avec une même force un corps projetté peut décrire une infinité de paraboles différentes : ces courbes varieront suivant les différens angles de la ligne de projection avec l'horizon.

Corollaire IV.

999. Il suit encore delà que ces trois lignes, le parametre MG, la ligne de projection GE, & la ligne de chûte EF, sont en progression géométrique : car à cause des triangles semblables MGE, EGF, on aura MG:GE::GE:EF : donc deux lignes quelconques étant connues, on trouvera toujours la troisieme.

Corollaire V.

1000. Les lignes de chûte EF étant perpendiculaires à l'horizon, elles formeront, avec les lignes de projection GE, des triangles rectangles GEF qui seront semblables aux triangles GME, lesquels auront tous pour hypothese le parametre MG ; d'où il suit que toutes les lignes de projections possibles pour une même force sont renfermées dans un demicercle GEM.

Observation.

1001. Il faut bien s'attacher à concevoir la raison pour laquelle on a supposé que la force de projection est telle qu'elle fait parcourir au corps d'un mouvement uniforme la ligne GD dans la moitié du tems que le corps employeroit à parcourir AG. Pour cela, on remarquera que dans le tems que le corps parcourt GB, la pesanteur qui a toujours agi sur lui a fait parcourir l'espace BH = AG ; de même dans le tems que la force de projection lui auroit fait parcourir BE = GB, la pesanteur lui fera parcourir EF, quadruple de AG, & par conséquent il se trouvera en F sur l'horizontale GF.

COROLLAIRE.

1002. Il suit delà que dans un tems double de la descente par AG, le corps projetté suivant la ligne GD avec la vîtesse acquise par GC décrira la parabole GHF, & de plus que la vîtesse qu'il a lorsqu'il est en F est égale à celle qu'il auroit acquise par AG : car il est visible que le sommet H de la parabole décrite est au milieu de la ligne BL, double de AG.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

1003. *Etant donnée la ligne de but* GF, *l'angle* MGE *formé par le parametre* MG, *& la direction* GE *du mortier, & l'angle* EGF *formé par la direction du mortier & la ligne de but* GF, *trouver le parametre* MG, *la ligne de projection* GE, *& la ligne de chûte* EF. *Figure 339, 340 & 341.*

Considérez que les lignes MG & EF étant paralleles, les angles alternes MGE & GEF sont égaux ; & que connoissant l'un, on connoîtra l'autre : & qu'ainsi l'on connoît dans le triangle GEF le côté GF avec les angles EGF & GEF ; & que par conséquent on trouvera par la Trigonométrie la ligne de projection GE, & la ligne de chûte EF : mais EF : EG :: EG : GM (art. 999). Ainsi l'on voit que cherchant une troisieme proportionnelle à la ligne de chûte & à la ligne de projection, l'on aura aussi le parametre.

COROLLAIRE.

1004. Il suit delà que si l'on jette une bombe avec un mortier, selon telle inclinaison que l'on voudra, pour trouver le parametre de toutes les paraboles décrites par le même mobile toujours poussé avec la même force, il n'y a qu'à observer l'angle d'inclinaison du mortier, & mesurer la distance où la bombe sera tombée, puisque le reste se trouve après aisément.

Supposons, par exemple, que l'on ait mesuré l'angle EGF d'inclinaison du mortier avec la ligne de but GF, que nous supposerons de 500 toises ; & qu'on ait aussi mesuré l'angle MGE que fait la même ligne de direction avec la verticale MG ou le parametre. On connoîtra donc trois choses dans *Figure 342.*

le triangle EGF, sçavoir la ligne de but GF, l'angle EGF, & l'angle GEF égal à son alterne MGE: donc on connoîtra les lignes, EF qui est la ligne de chûte, EG qui est celle de direction; & par conséquent on trouvera le parametre par cette proportion, EF : EG :: EG : MG. Ainsi l'on sçaura de quelle hauteur le corps a dû tomber pour acquérir une force égale à celle que lui a communiqué la charge de poudre dont il est question, en prenant le quart du parametre (art. 993). D'ailleurs avec le même parametre on peut décrire une infinité de paraboles, selon l'angle des ordonnées au diametre : donc ces observations suffisent pour déterminer le parametre.

AVERTISSEMENT.

Nous allons donner des solutions géometriques & analytiques de plusieurs problêmes qui ont rapport au jet des bombes, pour nous préparer à faire les mêmes choses dans la pratique avec un instrument universel, dont la construction & l'usage dépendent de ce que l'on va voir : ainsi il ne faut pas que ceux qui étudieront ce Traité, s'inquiétent si on ne les conduit pas d'abord à la pratique, puisqu'ils trouveront dans la suite de quoi se contenter.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

Figure 342. 1005. *Trouver quelle élevation il faut donner à un mortier pour jetter une bombe à tel endroit que l'on voudra, pourvu que cet endroit soit de niveau avec la batterie.*

Le mortier étant supposé au point G, & le point F étant celui où l'on veut jetter la bombe, nous supposerons que la ligne GM, élevée perpendiculairement sur GF, est le parametre de projection. Cela posé, on le divisera en deux également au point A; & de ce point comme centre, on décrira un demi-cercle, & sur le point F de la ligne horizontale GH, on élevera la perpendiculaire FE, qui coupera le demi-cercle au point E. Or si l'on tire du point G aux points E les lignes GE, je dis que le mortier pointé, selon l'une ou l'autre de ces directions, jettera la bombe au point F.

DÉMONSTRATION.

Nous avons fait voir (art. 997) que le parametre, la ligne de projection, & la ligne de chûte étoient trois proportionnelles; ainsi pour prouver que la ligne GE est la ligne de projection, il n'y a qu'à prouver qu'elle est moyenne proportionnelle entre le parametre MG & la ligne de chûte correspondante EF. Or si l'on tire les lignes ME, l'on aura les triangles semblables MGE & GEF; car ils ont chacun un angle droit, & les angles GME & EGF ont chacun pour mesure la moitié de l'arc GIE: par conséquent l'on a MG : GE :: GE : EF.

Mais si la perpendiculaire élevée sur le point F, au lieu de couper le cercle, ne faisoit que le toucher en un seul point E; je dis que la ligne GE sera encore l'inclinaison du mortier; puisqu'à cause des triangles semblables MGE & GEF, l'on aura MG : GE :: GE : EF. *Figure 343.*

Enfin si l'on suppose que le point donné soit l'endroit C, & que la perpendiculaire CD ne rencontre pas le cercle, je dis que le problême est impossible; puisque GD, qui est supposé la ligne de projection, ne peut pas être moyenne proportionnelle entre le parametre MG & la ligne de chûte DC: car pour cela il faudroit qu'elle fût un côté commun aux deux triangles semblables MGE & GDC; ce qui ne peut arriver, tant que la pointe D sera hors du cercle.

COROLLAIRE I.

1006. Il suit delà que lorsque la perpendiculaire EF coupe le cercle, le problême a deux solutions, & que par conséquent on peut jetter une bombe en un même endroit par deux chemins différens: car les arcs ME & GE étant égaux, lorsque le mortier sera pointé à un degré d'élevation par un angle autant au dessus qu'au dessous du quart de cercle, la bombe ira également loin: mais comme les angles MGE n'ont pour mesure que les moitiés des arcs ME, & que c'est toujours avec la verticale MG & les lignes de projections GE, que l'on considere l'élevation du mortier; l'on voit que cet angle sera toujours plus petit qu'un droit, & qu'on pourra pointer le mortier également au dessus ou au dessous de 45 degrés pour chasser la bombe en un même endroit.

COROLLAIRE II.

1007. Comme le problême est toujours possible, soit que la ligne EF coupe ou touche le cercle, l'on voit que lorsqu'elle touchera le cercle, la bombe sera chassée le plus loin qu'il est possible avec la même charge, puisque la ligne de but GF est la plus grande de toutes celles qui peuvent être renfermées entre le parametre & la ligne de chûte. Or comme l'angle MGE a pour mesure la moitié du demi-cercle ME, l'on peut dire que de toutes les bombes qui seront tirées avec une même charge, celle qui ira le plus loin, sera celle qui aura été tirée sous un angle de 45 degrés.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

1008. *Trouver quelle élevation il faut donner à un mortier pour chasser une bombe à une distance donnée, en supposant que la batterie n'est pas de niveau avec l'endroit où l'on veut jetter la bombe, c'est-à-dire en supposant que cet endroit est beaucoup plus élevé ou plus bas que la batterie.*

Le point G étant supposé l'endroit du mortier, & le point F celui où l'on veut jetter la bombe, lequel sera plus élevé que la batterie, comme dans la figure 344, ou plus bas que la batterie, comme dans la figure 345, il faut sur la ligne horizontale GH élever la perpendiculaire GM égale au parametre de la charge du mortier, parce que je suppose que l'on a fait une épreuve pour trouver ce parametre, comme il a été dit, art. 1001; ensuite l'on élevera la perpendiculaire GA sur la ligne du plan GL, & l'on fera l'angle AMG égal à l'angle AGM; & du point A, comme centre, l'on décrira la portion de cercle MEG : du point donné F l'on menera la ligne FE parallele au parametre MG; & cette ligne venant couper le cercle aux points E, je dis que si l'on tire les lignes GE, qu'elles détermineront l'élevation qu'il faut donner au mortier pour jetter la bombe au point F dans l'un & l'autre cas.

DÉMONSTRATION.

MG étant le parametre, GE la ligne de projection, & EF, la

la ligne de chûte, il faut prouver, comme on l'a fait ci-devant, que MG : GE :: GE : EF. Pour cela, considérez que les triangles MGE & GEF sont semblables : car comme la ligne GF est perpendiculaire au rayon AG, l'angle EGF sera égal à l'angle GME, puisqu'ils ont chacun pour mesure la moitié de l'arc GIE : d'ailleurs à cause des paralleles MG & EF les angles MGE & GEF sont égaux, étant alternes : ainsi l'on aura MG : GE :: GE : EF, ce qui fait voir que l'angle MGE est celui qu'il faut que le mortier fasse avec la verticale pour chasser la bombe au point F. C. Q. F. D.

Pour ne pas répéter les mêmes choses, nous avons compris les deux cas précédens dans une même démonstration : mais il seroit bon que les Commençans répétassent deux fois la démonstration précédente, pour ne considérer qu'une des deux figures 344 & 345 à la fois.

Corollaire.

1009. Il arrivera dans les deux cas du problême précédent ce que nous avons dit (art. 1006) à l'occasion des bombes jettées à un endroit de niveau avec la batterie, qui est que si la parallele EF touche le cercle, au lieu de le couper, la portée de la bombe sera la plus grande de toutes celles qu'on peut jetter avec la même charge; & que si la parallele EF ne touchoit ni ne coupoit le cercle, que le problême seroit impossible; ce qui a été suffisamment expliqué ailleurs (art. 1005), pour n'avoir pas besoin d'en faire voir encore la raison.

Remarque.

1010. Il est bon que l'on sçache que dans la pratique ordinaire du jet des bombes, l'on pointe toujours le mortier sous l'angle qui donne la plus grande ligne de chûte EF, afin que la bombe tombant de plus haut, acquiere par sa pesanteur un degré de force capable de produire plus de dommage sur les édifices où elle tombe; mais quand on est près d'un ouvrage de fortification que l'on veut labourer par les bombes, pour le mettre plutôt en état de l'attaquer, l'on pointe le mortier sous l'angle de la petite ligne de chûte EF, afin que la bombe passant par le chemin le plus court, ne donne pas le tems à ceux qui sont dans l'ouvrage de se garantir des éclats.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

Figure 345. 1011. *La ligne de but* GF, *l'angle qu'elle fait avec la verticale* GM, *& la charge du mortier étant donnée, trouver l'angle d'élévation sous lequel il faut pointer le mortier pour qu'elle tombe au point* F.

SOLUTION.

Soit nommée a la ligne de but GF; comme la charge du mortier est aussi connue, & que d'ailleurs on suppose que l'expérience a déterminé la force qu'une telle charge peut donner à la bombe, il s'ensuit qu'on connoît le parametre de la parabole qu'elle doit décrire; puisque ce même parametre est quadruple de la ligne de hauteur, dont le projectile à dû tomber pour acquérir une force égale à celle qu'il reçoit de la poudre; soit p ce parametre. Comme l'on connoît l'angle MGF de la verticale avec la ligne de but GF, on connoîtra aussi l'angle de cette derniere ligne avec l'horizontale : donc au triangle rectangle GHF on connoîtra le côté HF & le côté GH. Nous nommerons HF, d; & partant GH sera $\sqrt{aa-dd}$: enfin la ligne EH qui détermine l'angle d'inclinaison demandé sera nommée x. Cela posé, il est visible, à cause du triangle rectangle GHE, que la ligne de projection GE est $\sqrt{aa-dd+xx}$; d'ailleurs la ligne de chûte EF $=d+x$, & comme ces deux lignes sont en progression avec le parametre (art. 999), on aura EF : GE :: GE : GM, ou $d+x : \sqrt{aa-dd+xx} :: \sqrt{aa-dd+xx} : p$; d'où l'on tire $px+pd=aa-dd+xx$. Or donnant cette équation, & la résolvant suivant les regles ordinaires, on aura d'abord $xx-px=dd+pd-aa$; & ensuite $x=\frac{1}{2}p \pm \sqrt{dd+pd+\frac{1}{4}pp-aa}$. Nous allons faire voir que ces deux valeurs de x, construites suivant la formule algébrique, sont précisément les mêmes que celles que nous avons ci-devant déterminé géométriquement.

Dans les constructions précédentes, on a d'abord sur la ligne GF élevée une perpendiculaire indéfinie GA; au point B, milieu du parametre MG, on a élevé une autre perpendiculaire BA qui coupe la premiere en A. Du point A comme

centre avec le rayon AG, on a décrite une portion de cercle qui a déterminé sur la verticale FE les points E, E qui donnent deux inclinaisons différentes pour jetter la bombe en F. Ainsi il faut faire voir que des deux lignes EF, EF, la plus petite est $\frac{1}{2}p - \sqrt{dd + pd + \frac{1}{4}pp - aa}$, & la plus grande $\frac{1}{2}p + \sqrt{dd + pd + \frac{1}{4}pp - aa}$. Par construction les triangles GHF, GBA sont semblables, & donnent GH : HF :: GB : BA, & analytiquement $\sqrt{aa - dd} : d :: \frac{p}{2} : \frac{pd}{2\sqrt{aa-dd}}$: donc le rayon AG sera égal à $\sqrt{\frac{p^2d^2}{4a^2 - 4dd} + \frac{pp}{4}}$. Je fais ensuite attention que pour avoir EH (x) il faut déterminer AO parallele à BG, & terminé en O à la ligne DE parallele à GH. OE = DE − DO = GH − GN ou GH − AB, & analytiquement $OE = \sqrt{aa - dd} - \frac{pd}{2\sqrt{aa - dd}}$; & à cause du triangle rectangle AOE, $AO = \sqrt{AE^2 - OE^2}$: donc l'expression algébrique de AO sera $\sqrt{\frac{p^2d^2}{4aa - 4dd} + \frac{pp}{4} - aa + dd - \frac{p^2d^2}{4aa - 4dd} + pd}$; ce qui se réduit à $\sqrt{dd + pd + \frac{pp}{4} - aa}$: donc EH (x), ou BG − BD $= \frac{1}{2}p - \sqrt{dd + pd + \frac{1}{4}pp - aa}$; d'où il suit évidemment que la construction géométrique est parfaitement d'accord avec l'analyse, & qu'elle nous donne les mêmes solutions. C. Q. F. T. & D.

COROLLAIRE I.

1012. Il suit delà, comme nous l'avons déja remarqué, que le problême aura toujours deux solutions, tant que le radical $\sqrt{dd + pd + \frac{1}{4}pp - aa}$ sera quelque chose. 2°. Il est évident que dans le cas où $\frac{1}{4}pp + pd + dd = aa$, le problême ne peut avoir qu'une solution; il n'est pas moins évident que la ligne EF devenue pour lors FI touche le cercle au seul point I, puisque l'expression $dd + pd + \frac{1}{4}pp$, est le quarré de $\frac{1}{2}p + d$, qui est égale à FI, & qu'il n'y a que dans le cas où $\frac{1}{2}p + d = a$, que cette ligne est tangente. Enfin si $\frac{1}{4}pp + pd + dd$, est plus grand que aa, le problême sera impossible, & l'on en concluroit qu'il faut augmenter la charge du mortier.

COROLLAIRE II.

1013. Si la ligne de but GF au lieu d'être au dessous de l'horizon étoit au dessus, la formule serviroit toujours à faire connoître les angles d'inclinaisons demandés ; il n'y auroit qu'à faire $FH = -d$, & la formule deviendroit $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - pd + dd - aa}$, sur laquelle on feroit les mêmes raisonnemens que sur la premiere. La construction de cette formule revient encore à celle de la figure 344.

COROLLAIRE III.

1014. Enfin si la ligne de but est horizontale, on tirera encore de cette formule la construction de la premiere figure, en faisant $d = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - aa}$. Ainsi la formule que nous venons de donner renferme tous les cas possibles.

COROLLAIRE IV.

1015. On remarquera encore que dans toutes les positions possibles de la ligne de but avec la ligne horizontale, la plus grande partie du jet sera toujours celle qui est déterminée par
Figure 343. $\frac{1}{4}pp = aa$, ou par $\frac{1}{4}pp + dd = aa + pd$, ou par $aa = \frac{1}{4}pp$
Figure 344.
Figure 345. $+ pd + dd$, parce que dans tous ces cas la ligne de chûte est la tangente de la portion de cercle GIM, & que cette tangente détermine la plus grande portée du jet.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

Figure 346. 1016. *Construction d'un instrument universel pour jetter les bombes sur toutes sortes de plans.*

On fera un cercle de cuivre ou de quelqu'autre matiere solide & polie, & on divisera sa circonférence en 360 parties égales ou degrés : on appliquera à un de ses points G une regle fixe GN, qui le touche au point G, & qui soit égale à son diametre GB. On divisera cette regle en un grand nombre de parties égales, comme en 200 parties ; & on y attachera un filet avec un plomb D, ensorte néanmoins que le filet puisse couler le long de la regle, en s'approchant ou s'éloignant du point G. On expliquera l'usage de cet instrument dans les problêmes suivans.

Usage de l'instrument universel pour le jet des bombes.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

1017. *Trouver par le moyen de l'instrument universel, quelle hauteur il faut donner à un mortier pour jetter une bombe à une distance donnée, supposant que le lieu où l'on veut la jetter soit de niveau avec la batterie.* Figure 339.

Pour résoudre ce problême, il faut commencer par faire une épreuve, en jettant une bombe avec la charge qu'on se propose de tirer, qui sera, par exemple, de deux livres de poudre; & supposant que la bombe a été jettée à 400 toises, sous un angle que l'on aura pris à volonté, qui sera, si l'on veut de 30 degrés, il faut chercher le parametre : ainsi l'angle MGE étant de 30 degrés, l'angle GEF sera aussi de 30 degrés, parce que la ligne de chûte EF est parallele au parametre MG : & comme l'angle EGF est de 60 degrés, & qu'on connoît la ligne FG de 400 toises, l'on trouvera, par la Trigonométrie, que la ligne de chûte EF est de 693 toises, & que la ligne de projection GE est de 800 toises. Or cherchant une troisieme proportionnelle à 693 & à 800 toises, l'on trouvera qu'elle est de 923 toises, qui est la valeur du parametre GM.

Cela posé, si l'on veut sçavoir à quels degrés d'élevation il faut pointer le mortier pour chasser une bombe à 250 toises avec une charge de deux livres de poudre, il faut faire une regle de Trois, en disant: Si 923 toises, valeur du parametre, donnent 250 toises pour la distance donnée, combien donneront 200, valeur du diametre de l'instrument, c'est-à-dire valeur de la ligne NG, pour le nombre de ses parties que je cherche, qu'on trouvera de 54. Figure 346.

Présentement il faut mettre la regle NG parfaitement de niveau, & faire glisser le filet KD jusqu'au nombre 54, & le filet venant à couper la circonférence du cercle de l'instrument aux deux endroits C, marquera que le problême a deux solutions, & qu'il doit être pointé sous un angle moitié du nombre des degrés compris dans les arcs GC. Or comme le plus grand est de 148 degrés, & que le plus petit est de 32 degrés, prenant leurs moitiés, qui sont 74 & 16, le mortier

pointé à l'une ou l'autre de ces élevations, chassera la bombe à la distance proposée.

DÉMONSTRATION.

Pour faciliter la démonstration de la pratique précédente, nous supposerons que la ligne GF est la distance donnée, c'est-à-dire qu'elle vaut 250 toises, & que la perpendiculaire GM est le parametre que l'on a trouvé. Or si l'on décrit un demi-cercle MEG, & que l'on mene la ligne FE parallele à GM, & que l'on tire les lignes GE aux points où cette parallele coupe le cercle, l'on aura les angles MGE de l'élévation du mortier, pour jetter la bombe au point F, comme on l'a démontré ci-devant (art. 1000). Présentement si l'on imagine que la regle NG de l'instrument soit mise d'alignement avec la ligne de but GF, & que les diametres MG & GB soient aussi d'alignement, & que le filet KD soit encore à l'endroit où on l'a posé, c'est-à-dire au point 54, l'on aura, selon la pratique du problême, GM : GF :: GB : GK, parce qu'on peut prendre ici le diametre GB pour la longueur de la regle GN, ces deux lignes étant égales. Cela étant, à cause de la proportion, la perpendiculaire KD coupera le demi-cercle GCB, de la même façon que la perpendiculaire FE coupe le demi-cercle MEG : ainsi les lignes EG & GC n'en faisant qu'une seule EC, comme les lignes MG & GB, l'arc ME sera égal à l'arc CB ou GC, qui est la même chose : ainsi ces arcs seront de 32 degrés ; & comme l'angle MGE n'a pour mesure que la moitié de l'arc ME, il ne vaudra que 16 degrés, qui est l'élevation qu'il faudra donner au mortier, si l'on veut pointer au dessous de 45 degrés : ainsi l'on voit que l'on trouve, par le moyen de l'instrument, les mêmes choses que l'on a trouvées ci-devant (art. 1008) avec le demi-cercle MEG. C. Q. F. D.

Figure 347.

COROLLAIRE.

Figure 348.

1018. Il suit delà que lorsque le filet KD, au lieu de couper le demi-cercle GCB, ne fait que le toucher en C, le mortier pointé sous la moitié de l'arc GC, qui est 45 degrés, chassera la bombe le plus loin qu'il est possible avec la même charge, puisque pour lors la ligne EF touchera aussi le demi-cercle MEG ; enfin que si le filet KD ne touchoit ni ne cou-

poit le cercle, le problême sera impossible; puisque dans ce cas la ligne EF ne peut pas toucher non plus, ni couper le demi-cercle MEG.

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

1019. *Trouver quelle élevation il faut donner au mortier pour chasser une bombe à une distance donnée, supposant que l'endroit où l'on veut jetter la bombe soit plus haut ou plus bas que la batterie, & cela en se servant de l'instrument universel.* Figure 349 & 350.

Supposant que de l'endroit G, où seroit une batterie de mortiers, on veuille jetter des bombes à l'endroit F beaucoup plus élevé ou plus bas que le plan de la batterie, il faut com-commencer par chercher, en se servant de la Trigonométrie, la distance horizontale GH, qui est l'amplitude de la parabole; & connoissant le parametre de la charge dont on voudra se servir, que je suppose être le même que celui du problême précédent, c'est-à-dire de 923 toises, la charge étant encore de deux livres de poudre, l'on dira: comme le parametre est à la distance GH, ainsi la longueur GN de la regle divisée en 200 parties est à la longueur GK, qui donnera un nombre de ces parties. Or supposant qu'on a trouvé 60 parties, l'on fera glisser le filet KD sur le nombre 60, où il faudra le tenir fixe; ensuite on appuyera le cercle de l'instrument sur un endroit où il puisse être stable; & l'ayant mis bien verticalement, on visera le long de la regle NG le lieu donné F, & le filet KD coupera le cercle aux points C, où il déterminera les arcs CG: & si l'on prend la moitié du nombre des degrés contenus dans l'un ou l'autre de ces arcs, l'on aura la valeur de l'angle que doit faire le mortier avec la verticale pour jetter la bombe au point F.

DÉMONSTRATION.

Ayant élevé sur la ligne horizontale GH la perpendiculaire GM égale au parametre, & sur le plan GF la perpendiculaire GA, on fera l'angle AMG égal à l'angle AGM, & du point A on décrira une portion de cercle MEG, & du point F on menera la ligne FE parallele à GM, qui coupera le cercle aux points E, auxquels menant les lignes GE, l'on Figure 351 & 352.

aura les directions G E qu'il faut donner au mortier pour jetter une bombe à l'endroit F (art. 1008). Or si on place l'instrument de maniere que la regle N G soit d'alignement avec le diametre G O, & que le filet K D soit toujours à l'endroit où on l'a posé dans l'opération, l'on verra que le demi-cercle G C B est coupé par la perpendiculaire K D de la même façon que le demi-cercle O E G est coupé par la perpendiculaire E F; ce qui se prouve assez de soi-même, sans qu'il soit besoin de répéter ce qui a déja été dit ailleurs à ce sujet.

Avertissement.

Comme l'on peut se servir de la Trigonométrie pour jetter des bombes par une méthode toute différente de celle que nous venons d'enseigner, voici deux propositions dont on pourra faire usage dans les occasions où l'on n'auroit pas d'instrumens tel que celui dont nous venons de parler; il est vrai que tout ce que nous allons enseigner ne peut avoir lieu que lorsque l'objet où l'on veut jetter les bombes est de niveau avec la batterie; mais comme cela se rencontre presque toujours, je ne me suis pas soucié de donner une méthode pour en jetter dans un lieu qui seroit plus bas ou plus haut que la batterie, parce que les opérations m'ont paru trop longues par la Trigonométrie. Il faut remarquer que nous allons supposer dans les propositions suivantes, que le mortier fait son angle d'élévation avec la ligne horizontale, quoique dans la pratique l'on pourra, si l'on veut, le former avec la verticale.

PROPOSITION XVII.

Théoreme.

1020. *Si l'on tire deux bombes avec la même charge à différentes élévations de mortier, je dis que la portée de la premiere bombe sera à celle de la seconde, comme le sinus d'un angle double de l'élévation du mortier pour la premiere bombe, est au sinus de l'angle double de l'élévation pour la seconde.*

Figure 353. Ayant élevé sur l'extrêmité B de la ligne horizontale B P une perpendiculaire B N à volonté, on la divisera en deux également au point M, pour décrire le demi-cercle N G B; ensuite ayant tiré les lignes B G & B K, pour marquer les deux inclinaisons différentes du mortier, on les prolongera de maniere

niere que K A soit égal à K B, & que G D soit égal à B G, & des extrêmités A & D, l'on abaissera les perpendiculaires A C & D E sur la ligne horizontale B P; ensuite si par le point K l'on mene la ligne I L parallele à B C, l'on aura I K égal à K L, & A L égal à L C, à cause des paralleles I B & A C: ainsi I K sera moitié de B C; & menant aussi par le point G la ligne F H parallele à B E, l'on aura encore F G égal à G H, & par conséquent F G sera la moitié de B E.

DÉMONSTRATION.

Considérez que l'angle D B E ayant pour mesure la moitié de l'arc G O B, la ligne G F étant le sinus de l'angle G M B, elle sera le sinus d'un angle double de l'angle D B E, & que de même l'angle A B C ayant pour mesure la moitié de l'arc K G B, la ligne K I étant le sinus de cet arc, ou bien de son complément, qui est la même chose, elle sera le sinus d'un angle double de l'angle A B C. Or la ligne B C étant double de I K, & la ligne B E double de F G, l'on aura donc B C : B E :: I K : F G. Mais si à la place des demi-amplitudes B C & B E, l'on prend les amplitudes entieres B Q & B P, c'est-à-dire la portée entiere de chaque bombe, l'on aura comme B Q, portée de la premiere bombe, est à B P portée de la seconde, ainsi I K, sinus de l'angle double de l'élévation de la premiere, est à F G, sinus de l'angle double de l'élévation de la seconde. C. Q. F. D.

APPLICATION.

1021. Pour tirer des bombes avec une même charge à quelle distance l'on voudra, il faut commencer par faire une épreuve: cette épreuve se fera, par exemple, en chargeant le mortier à deux livres de poudre, & en le pointant à 45 degrés, qui est l'élévation où le mortier chassera le plus loin avec cette charge, comme nous l'avons déja dit: après avoir tiré la bombe, on mesurera exactement la distance du mortier à l'endroit où elle sera tombée, que je suppose qu'on aura trouvée de 800 toises. Cela étant fait, si l'on veut sçavoir quelle élévation il faut donner à un mortier pour envoyer une bombe à 500 toises, pour la trouver il faut faire une Regle de Trois, dont le premier terme soit 800 toises, qui est la distance connue, le second 500 toises, qui est la distance où l'on veut envoyer la

bombe, le troisieme le sinus d'un angle double de 45 degrés, qui est 100000. La regle étant faite, l'on trouvera 62500, qui est le sinus d'un angle double de celui que l'on cherche: après l'avoir trouvé dans la Table, l'on verra qu'il correspond à 38 degrés 40 minutes, dont la moitié est 19 degrés 20 minutes, qui est la valeur de l'angle que doit faire le mortier avec l'horizon pour jetter une bombe à 500 toises.

PROPOSITION XVIII.

Théoreme.

1022. *Si l'on tire deux bombes à différens degrés d'élévations avec la même charge, il y aura même raison du sinus de l'angle double de la premiere élévation au sinus du double de la seconde, que de la portée de la premiere élévation à la portée de la seconde.*

Démonstration.

Figure 353. L'angle ABC étant celui de la premiere élévation du mortier, & l'angle DBE celui de la seconde, l'on aura encore IK:FG::BC:BE, ou bien IK:FG::BQ:BP, qui fait voir que IK, sinus d'un angle double de l'angle ABC, est à la ligne FG, sinus d'un angle double de l'angle DBE, comme la premiere portée BQ est à la seconde BP.

Application.

1023. On peut, par le moyen de cette proposition, sçavoir à quelle distance du mortier une bombe ira tomber, ayant fait une épreuve comme nous l'avons dit ci-devant.

Supposons donc qu'une bombe a été tirée par un angle de 40 degrés, & qu'elle ait été chassée à 1000 toises avec une certaine charge, on demande à quelle distance ira la bombe avec la même charge, le mortier étant pointé à 25 degrés, il faut faire une Regle de Trois, dont le premier terme soit le sinus d'un angle double de 40 degrés, c'est-à-dire le sinus de 80 degrés, qui est 98480, & le second le sinus d'un angle double de celui qu'on veut donner au mortier; comme cet angle a été proposé de 25 degrés, on prendra donc le sinus de 50 degrés, qui est 76604, & le troisieme terme la distance où la bombe a été chassée à 40 degrés, que nous avons supposé de 1000 toises, la regle étant faite, l'on trouvera pour quatrieme terme 777.

toises, qui est la distance du mortier à l'endroit où tombera la bombe, ayant été tirée sous un angle de 25 degrés.

PROPOSITION XIX.

PROBLEME.

1024. *Connoissant l'amplitude d'une parabole décrite par une bombe, sçavoir quelle est la hauteur où la bombe s'est élevée au dessus de l'horizon.* Figure 353.

Nous servant de la figure précédente, où l'on a supposé que la ligne BA marquoit l'élévation du mortier, l'on peut dire que cette ligne est la tangente de la parabole BLQ; & qu'ainsi la soutangente AC sera double de l'abscisse LC (art. 614), qui est ici la hauteur où la bombe aura été élevée sous l'angle ABC. Supposant cet angle de 70 degrés, l'amplitude BQ de 300 toises, la demi-amplitude BC sera de 150 toises: ainsi dans le triangle ABC l'on connoît l'angle ABC de 70 degrés, le côté BC de 150 toises, & l'angle droit BCA: ainsi par le calcul ordinaire de la Trigonométrie, l'on trouvera le côté AC de 412 toises, dont la moitié, qui est 206 toises, sera la valeur de la ligne LC, c'est-à-dire la hauteur où la bombe se sera élevée.

PROPOSITION XX.

PROBLEME.

1025. *Connoissant la hauteur où une bombe s'est élevée, sçavoir la pesanteur ou le degré de mouvement qu'elle a acquis en tombant par son mouvement accéléré.*

Supposant qu'une bombe de 12 pouces soit tombée de 206 toises de hauteur, sa vîtesse sera exprimée par la racine quarrée de sa chûte (art. 959), c'est-à-dire par la racine quarrée de 206, qui est $14\frac{1}{3}$. Cela posé, l'on sçait que la force ou la quantité du mouvement d'un corps, est le produit de sa masse par sa vîtesse (art. 931). Or comme les bombes de 12 pouces pesent environ 140 livres, l'on peut regarder cette quantité comme la valeur de la masse, qui étant multipliée par la vîtesse, qui est $14\frac{1}{3}$, donnera 2006 pour la quantité de mouvemens, ou la force de la bombe.

REMARQUE.

1026. Par les deux problêmes précédens, l'on voit qu'il est facile de sçavoir la force des bombes qui sont chassées sous différens degrés d'élévations, puisque connoissant leurs amplitudes, on connoîtra les hauteurs où elles se sont élevées, & par conséquent leur vîtesse, qu'il ne faudra que multiplier par la pesanteur des bombes de mêmes ou de différens calibres, pour avoir des produits, dont les rapports seront les mêmes que ceux des forces que les bombes auront acquises en tombant. Ainsi l'on peut sçavoir quel degré d'élévation il faudroit donner à un mortier de 8 pouces, pour que la bombe de son calibre tombant sur un édifice, comme, par exemple, sur un magasin à poudre, fît autant de dommage qu'une bombe de 12 pouces, qui auroit été jettée sous un angle de direction moindre que celui de la bombe de 8 pouces, cette derniere devant acquérir, par la hauteur de sa chûte, ce qu'elle a de moins en pesanteur que celle de 12 pouces. Ceci est non seulement curieux, mais peut encore avoir son utilité dans l'attaque des places.

Fin du quatorzieme Livre.





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE QUINZIEME,

Qui traite de la Méchanique Statique.

De toutes les parties des Mathématiques néceſſaires à un Ingénieur, après les élémens de Géométrie, il n'y en a pas de plus importante que celle que nous allons traiter. On l'appelle méchanique ſtatique, *parce que nous y conſidérons les machines en repos, ou plutôt en équilibre avec les fardeaux ou les poids qu'on veut enlever par leur moyen. On peut aiſément ſe convaincre de l'avantage qu'il y a de conſidérer ainſi les machines ſimples ou compoſées : car ſi l'on connoît la force qui eſt capable de faire équilibre avec les puiſſances qui leur ſont appliquées, on ſçait, dès-là même, celles qui ſont capables de les ſurmonter, en cas qu'il faille vaincre l'équilibre. En un mot, on eſt en état d'apprécier les forces par les réſiſtances qu'elles ont à vaincre ; de déterminer les ſituations & les directions les plus avantageuſes, ſuivant leſquelles on doit appliquer les forces motrices aux machines dont on fait uſage. Tout nous invite à découvrir les principes des effets que nous voyons exécuter tous les jours. N'y eût-il que la curioſité, on ne peut s'empêcher de voir avec étonnement un homme, dont la force ordinaire eſt très-petite, faire équilibre à l'aide d'une ſimple machine, avec des fardeaux de pluſieurs milliers, & ſouvent les mettre en mouvement. Bientôt, lorſqu'on a reconnu les vraies cauſes d'effets auſſi ſurprenans, on devient, pour ainſi dire, maître des*

mouvemens, à l'aide de la théorie établie sur ces mêmes principes : leur combinaison nous découvre une infinité d'avantages particuliers, applicables aux Arts & aux différentes situations dans lesquelles on peut se trouver. Quoique le génie de la méchanique, ainsi que les autres talens, soit un don particulier, qui semble d'abord dépendre beaucoup plus d'une heureuse disposition des organes qui nous rend inventifs, que des regles générales, il faut cependant regarder comme une vérité incontestable, que toutes choses égales d'ailleurs, celui qui possede les principes du mouvement & de la statique, est beaucoup plus propre que tout autre à l'exécution d'un grand nombre de manœuvres qui paroîtroient quelquefois impraticables : il sçaura combiner avec certitude, calculer les forces des machines qu'on lui présentera, & s'épargnera mille tâtonnemens inutiles, mais inévitables pour ceux qui ne sont pas instruits comme lui. Il est bon de prévenir ici, & de combattre deux erreurs grossieres, dans lesquelles tombent la plûpart de ceux qui s'appliquent à la méchanique sans en connoître les loix. Ayant observé la prodigieuse augmentation des forces dans certaines machines, ils s'imaginent pouvoir les augmenter à leur gré, en multipliant les leviers ou les roues. Ce qui seroit vrai dans un état parfait & dans la métaphysique de la méchanique, devient faux par l'augmentation des frottemens qui sont inévitables dans les machines, telles que celles dont on est obligé de faire usage. Une erreur à peu près semblable, & qui a toujours sa source dans l'ignorance, est celle de certaines personnes qui ayant exécuté une machine en petit, en concluent avec la derniere assurance qu'elle doit produire les mêmes effets en grand. Ils ne font pas attention que les corps semblables croissant en pesanteur dans la raison des cubes des dimensions homologues, les frottemens croissent dans la même raison ; ce qui est cause que dans certaines machines la force sur laquelle ils comptent pour produire l'effet qu'ils annoncent, est employée toute entiere, & souvent n'est pas encore capable de vaincre les frottemens. Il est bien vrai qu'une machine qui produit certain effet en grand, en produira un proportionnel en petit ; mais le réciproque n'est jamais vrai : ainsi il faut toujours compter sur une augmentation considérable de forces dans les machines que l'on exécute. Les meilleures sont celles où cette augmentation pardessus la proportion du modele avec la machine en grand se trouve être la plus petite, toutes choses égales d'ailleurs. Il y a encore un troisieme défaut dans ceux qui ignorent la statique, & qui cependant ont un

goût décidé pour cette partie. Mais on commence à craindre le ridicule, en cherchant le mouvement perpétuel, *& l'on se persuade aisément, quand on n'est pas entêté de ses idées, qu'il y a des recherches plus dignes de notre attention, après les efforts inutiles de ceux qui ont voulu trouver la solution de ce problême, qui est ordinairement l'écueil des mauvais Méchaniciens, comme la quadrature du cercle est celui des médiocres Géometres.*

CHAPITRE PREMIER,

Dans lequel on donne l'introduction à la Méchanique.

DÉFINITIONS.

I.

1027. LA *méchanique* est une science qui considere les rapports qui se rencontrent entre les puissances ou les forces appliquées sur les corps pour les mouvoir par le moyen des machines. Ainsi la méchanique prise en général, est la science des mouvemens, & par conséquent la comparaison des masses des corps, celle de leur vîtesse, fait nécessairement partie de la méchanique, envisagée sous ce point de vue.

II.

1028. Si l'on détermine les rapports qui doivent se trouver entre un certain nombre de puissances, pour leurs forces absolues, & leurs directions, afin de produire l'équilibre, la méchanique en général devient une partie déterminée, & se nomme *méchanique statique* : son objet est de mettre les forces en équilibre, ou si elles y sont, de déterminer les raisons qui concourent à l'établir.

III.

1029. Nous avons déja dit que toute *force mouvante* ou *puissance*, est ce qui peut mouvoir un corps, & par conséquent les corps en mouvement sont des forces motrices, puisqu'il est démontré par l'expérience qu'ils peuvent faire mouvoir les autres. Nous n'examinons pas ici si cette propriété est attachée essentiellement aux corps en mouvement, ou si elle ne dépend que de la volonté de Dieu qui a établi la communication du mouvement par le moyen du choc.

IV.

1030. *L'équilibre* est l'état d'un corps en repos, tiré par plusieurs forces, qui tendent à le mouvoir. Un corps suspendu, au moyen d'un cordon, est en équilibre, & tire autant le cordon de haut en bas, qu'il est lui-même tiré de bas en haut par ce même cordon. Cette machine nous présente la maniere dont se fait l'équilibre, & nous montre qu'en général il ne peut y avoir d'équilibre qu'entre deux forces égales, & directement opposées. Si donc il y a plus de deux forces en équilibre appliquées à un même corps, ce que l'on a à faire est de déterminer, par le moyen d'une force connue, comment toutes les autres, dont les directions sont données, se composent en une seule égale & directement opposée à la premiere, afin de produire l'équilibre.

V.

1031. On appelle *poids*, l'effort qui sollicite les corps à descendre au centre de la terre. Dans les corps de même matiere, les poids sont proportionnels aux volumes, & par conséquent se déterminent par les regles de la Géométrie. Comme les mesures doivent être homologues aux choses dont elles sont la mesure, les poids naturellement doivent se mesurer par des poids. Celui auquel on rapporte les autres, est regardé comme l'unité, quoiqu'il puisse contenir un nombre indéfini de parties égales: ainsi la livre, qui est la mesure ordinaire des poids, est regardée comme l'unité, quoiqu'elle contienne seize parties égales, qui servent à mesurer les corps d'un moindre poids, & ainsi des autres mesures plus petites.

1032. Il y a deux manieres de représenter une force. La premiere & la plus naturelle, est d'exprimer l'effort dont elle est capable par les poids auxquels elle peut faire équilibre. Ainsi une puissance capable de soutenir un poids de 20 livres est une force de 20 livres. Mais comme il s'agit moins des forces absolues que des rapports qu'elles ont entr'elles, les Géometres sont convenus de désigner les forces par des lignes. Ainsi ayant représenté une force de 4 livres par une ligne d'une certaine longueur, une force triple ou quadruple, c'est-à-dire de 12 ou de 16 livres, sera représentée par une ligne triple ou quadruple de la premiere. Dans la théorie du mouvement, nous avons déterminé les forces par les espaces qu'elles font

parcourir

parcourir à des corps égaux en tems égaux : ainsi les lignes qui représentoient les forces motrices, sont les expressions naturelles de ces forces. Ici ces lignes désignent les rapports qui se trouvent entre les poids des forces appliquées aux corps. Au reste de quelque maniere que l'on les considere, on verra que cela revient toujours au même.

VI.

1033. La ligne de *direction* d'une puissance est la ligne suivant laquelle elle tend à mouvoir le corps en cas qu'elle soit seule, & que le corps cede à son impression. Une même force ne peut pas agir suivant plusieurs directions à la fois : ainsi une force seule qui tire un corps ne peut le mouvoir que suivant une ligne droite : il faut encore remarquer que l'on ne doit mesurer l'effort d'une force appliquée à un corps que par la résistance qu'elle éprouve de la part de ce corps : car si le corps a une masse de dix livres, il ne détruit qu'une force de dix livres dans la puissance qui agit sur lui, quand même elle seroit en état de vaincre une force de 100 livres ; c'est ce que les Méchaniciens entendent par ce principe général : *l'action est égale à la réaction.*

VII.

1034. On appelle *machines* tous les instrumens propres à faire mouvoir ou à arrêter le mouvement des corps ; il y en a de *simples* & de *composées.*

1035. Les machines simples sont au nombre de six, sçavoir, le *levier*, la *roue dans son aissieu*, la *poulie*, le *plan incliné*, le *coin*, & la *vis.*

1036. Les *machines composées* sont sans nombre, & dépendent des différentes combinaisons de celles-ci, prises en tel nombre qu'on le juge à propos.

VIII.

1037. On appelle *centre de gravité* d'un corps un point par lequel ce corps étant suspendu, demeure en équilibre dans toutes les situations imaginables. Il suit delà que la puissance qui est appliquée à ce point, arrête tous les efforts de la pesanteur des parties qui composent ce corps : donc on peut concevoir que cette même pesanteur est réunie à ce point. Nous verrons par la suite la maniere de déterminer les centres de gravité des

principales figures & des principaux corps qui peuvent être mis en usage. Cette recherche ne peut être que très-utile dans la méchanique.

AXIOME.

1038. Le poids d'un corps agit avec la même force dans tous les points de sa direction. Concevons un corps attaché à une corde flexible, & faisons abstraction du poids de cette corde : il est évident que ce corps tire toujours autant le point auquel il est attaché par cette corde, quelle que soit la longueur de la corde. Cela suppose que la force qui pousse le corps au centre de la terre est toujours la même. Cette fausse supposition ne peut être sensible dans les plus grandes distances, relativement aux machines.

AVERTISSEMENT.

Après avoir considéré dans le Traité du mouvement le parallélogramme des forces, c'est-à-dire la composition des forces, pour déterminer la vîtesse que les forces composantes procurent au mobile, nous allons reprendre la même question par rapport à la méchanique statique, c'est-à-dire considérer quelle est la force capable de faire équilibre avec les forces composantes.

PROPOSITION I.

THÉOREME.

Figure 354. 1039. *Si un corps* K *est poussé à la fois par deux puissances égales représentées par les côtés* AB, AC *d'un quarré* ABDC, *& dirigées suivant ces mêmes côtés, je dis qu'il décrira la diagonale* AD *du même quarré dans le tems qu'il eût décrit le côté* AC, *s'il n'avoit été poussé que par une seule force.*

DÉMONSTRATION.

Il est d'abord évident que le corps doit se mouvoir sur la diagonale AD : car ne pouvant aller que par un seul chemin, & se trouvant entre deux forces motrices entiérement égales, il n'y a pas de raison pour qu'il s'approche plutôt de l'une que de l'autre ; ce qui arriveroit, s'il décrivoit toute autre ligne que la diagonale. Pour sçavoir présentement si la force résultante est représentée par la même diagonale, je nomme x cette même résultante, dont la longueur est inconnue, & je fais

attention que si des deux forces égales A C, A B il en résulte une seule force x : pareillement ces mêmes forces peuvent être regardées comme les résultantes, chacune de deux forces égales, disposées de la même maniere qu'elles le sont elles-mêmes par rapport à la résultante x, & proportionnelles à ces mêmes forces : mais ces forces font un angle de 45 degrés avec la diagonale : donc leurs composantes doivent être prises, deux sur la ligne E A F perpendiculaire à la diagonale, & deux autres sur la diagonale elle-même. On aura donc cette proportion, la résultante x est à sa composante A B, que je nommerai a, comme la même composante A B, prise pour résultante des forces A E & A G, est à sa composante A E; d'où l'on tire cette analogie, $x : a :: a : \frac{aa}{x} =$ A E. On démontrera de même que la force A F est aussi égale à $\frac{aa}{x}$: donc au lieu des deux forces égales A B, A C, on aura quatre nouvelles forces égales, dont deux A E, A F sont directement opposées, & se détruisent par conséquent, & deux autres sont toutes les deux dirigées suivant A D, & sont chacune représentées par $\frac{aa}{x}$. Mais ces deux forces tirant dans le même sens, sont les seules qui forment la résultante inconnue x, à laquelle elles sont égales. On aura donc cette équation $\frac{2aa}{x} = x$, ou en multipliant par x, $2aa = xx$; d'où il suit évidemment que la résulrante est non seulement dirigée suivant la diagonale, mais encore égale à cette même diagonale. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

1040. Comme toute ligne peut être regardée comme la diagonale d'un quarré, il s'ensuit qu'au lieu d'une seule force on peut prendre deux forces composantes, représentées par les côtés du quarré, dont l'expression de la premiere est diagonale : car ces deux nouvelles forces ne produiront pas d'autre effet sur le mobile que celui qui résultoit de la premiere.

COROLLAIRE II.

1041. Il suit delà que si un corps est tiré ou poussé à la fois par deux forces morrices, représentées & dirigées suivant les côtés A B, A C d'un parallélogramme rectangle, il décrira, par l'effort composé des deux puissances, la diagonale A D du

même parallélogramme, dans le tems qu'il eût décrit l'un ou l'autre des côtés AB, AC, s'il n'eût été poussé que par une seule force M ou N.

DÉMONSTRATION.

Figure 355. Par le corollaire précédent, on peut décomposer les deux forces AC, AB, chacune en deux autres qui soient les côtés du quarré, dont ces mêmes lignes sont les diagonales: de plus, il est évident que la ligne AE qui divise l'angle droit en deux angles égaux, doit réunir deux de ces quatre forces dans lesquelles nous décomposons les premieres composantes AB & AC; mais il est aisé de voir que le corps ne peut pas suivre la ligne AE: car pour cela il faudroit que les forces AH, AI, directement opposées, fussent égales, ce qui est impossible, puisque les lignes ou les forces qu'elles représentent sont dans la raison des lignes ou forces AC, AB, qui sont inégales (*par hypothese*): donc tandis que le corps sera poussé par la somme des forces AF, AG, dirigées sur la même ligne, il y aura encore une force représentée par AK, différence des forces directement opposées AH, AI. Pour déterminer toutes ces forces, nous nommerons AB, a; AC, b; on aura AF ou AH $= \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$, & de même AI ou AG $= \sqrt{\frac{1}{2}aa}$: donc AE ou AF $+$ AG $= \sqrt{\frac{1}{2}a^2} + \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$; & AK ou AI $-$ AH $= \sqrt{\frac{1}{2}a^2} - \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$. Présentement voyons si cette force AK, appliquée perpendiculairement en E, est capable de ramener le corps à l'extrêmité D de la diagonale AD; si cela est, il faut que l'angle AED étant rectangle, on ait $AD^2 = AK^2 + (AF + AG)^2$. J'éleve donc DE ou AK au quarré, & j'ai $\frac{1}{2}a^2 - 2\sqrt{\frac{1}{4}a^2b^2} + \frac{1}{2}b^2$ pour le quarré de $\sqrt{\frac{1}{2}a^2} - \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$. J'éleve de même AE ou AF $+$ AG $= \sqrt{\frac{1}{2}a^2} + \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$ au quarré, & j'ai $\frac{1}{2}a^2 + 2\sqrt{\frac{1}{4}a^2b^2} + \frac{1}{2}b^2$: ajoutant les deux quarrés ensemble, la somme est $a^2 + b^2$; d'où il suit que pendant que les efforts conjoints AF, AG font décrire au mobile la ligne AE égale à leur somme, la force AK ou DE, ramene le corps à l'extrêmité de la diagonale: Donc dans ce cas des forces inégales dirigées suivant les côtés du parallélogramme rectangle & représentées par ces côtés, le corps décrit encore la diagonale. C. Q. F. D.

OBSERVATION.

1042. On pourroit craindre d'être tombé dans un paralogisme, parce que nous démontrons que le corps, entre les forces AE & AK, qui sont les côtés d'un parallélogramme rectangle, & qui représentent les forces qui agissent sur lui, décrit la diagonale AD du nouveau parallélogramme ; ce qui semble être précisément l'état de la question. Mais il est aisé de se convaincre que quelles que soient les forces dans lesquelles on décompose les premieres AB, AC, la résultante est nécessairement égale à la diagonale : c'est ce que nous allons faire en peu de mots. Soit x la résultante, dirigée suivant AE, qui fait un angle quelconque avec la ligne AC, & soient faits $AB = a$, $AC = b$; puisque les forces a & b font parcourir x, deux forces proportionnelles à a & b feront parcourir AB, pourvu qu'elles soient disposées de la même maniere que les lignes AB & AC le sont par rapport à AE; ce qui arrivera si l'on prend l'une AG sur AE, & l'autre sur la ligne AI perpendiculaire à la diagonale : car AB fait avec AE le même angle que AG fait avec AB, & AC fait avec AE le même angle que AI fait avec AB. Donc les forces dirigées, suivant ces lignes, sont disposées à l'égard de AB, comme AB & AC le sont à l'égard de AE : de même puisque les forces a & b font parcourir AE ou x, deux forces proportionnelles, & disposées de la même maniere à l'égard de AE, feront parcourir AC; ce qui arrivera, si l'on prend l'une sur AE, & l'autre sur AH, aussi perpendiculaire à AE. On aura donc ces quatre proportions, $AE : AB :: AB : AG$, ou $x : a :: a : \frac{aa}{x} = AG$ $AE : AC :: AB : AI$, ou $x : b :: a : \frac{ab}{x} = AI$; & encore $AE : AC :: AC : AF$, ou $x : b :: b : \frac{bb}{x} = AF$; & enfin $AE : AB :: AC : AL$, ou $x : a :: b : \frac{ab}{x} = AL$: donc au lieu des deux forces AB & AC nous en avons quatre, AF, AG, AL, AI, dont les deux dernieres sont égales, & directement opposées, puisque nous avons trouvé pour AL & pour AI $\frac{ab}{x}$, & dont les deux premieres sont dirigées sur la même ligne AE, & par conséquent concourent seules à produire AE; ce qui donne

$\frac{aa}{x}+\frac{bb}{x}=x$; d'où l'on tire $aa+bb=xx$: ce qui prouve invinciblement que la résultante des quatre nouvelles forces ou des deux composantes est nécessairement égale à la diagonale. Mais ces quatre forces dans lesquelles on a décomposées les deux premieres AB & AC, font précisément le même effet que les forces AH, AF, AI, AG, dans lesquelles nous avions d'abord décomposé les forces M & N, en regardant les lignes AB & AC comme les diagonales des quarrés GI, FH: donc il est incontestablement démontré que la force DE ou AK a dû ramener le corps K sur la diagonale AD.

Corollaire III.

1043. Donc si l'on a une force quelconque, on poutra, si on le juge à propos, la décomposer en deux autres forces perpendiculaires entr'elles, & la regarder comme la résultante ou la diagonale d'un parallélogramme rectangle, dont les côtés expriment les forces résultantes qui l'ont produites; seulement il faut bien remarquer que comme une même ligne peut être diagonale d'une infinité de parallélogrammes rectangles différens, il ne faut pas la décomposer au hazard, mais examiner la décomposition la plus analogue à l'état de la question. On en va voir un exemple dans le corollaire suivant.

Corollaire IV.

Figure 356. 1044. Il suit encore delà que si un corps est poussé à la fois par deux forces M, N, représentées par les côtés AC, AB d'un parallélogramme obliqu'angle ou obtusangle, & dirigées suivant les mêmes côtés, il décrira encore la diagonale AD dans le tems qu'il eût décrit l'une ou l'autre des lignes AB, AC, en n'obéissant qu'à une seule force M ou N. Pour s'en convaincre, du point C sur la diagonale AD, soit abaissée la ligne CF, & formé le parallélogramme AFCH; pareillement du point B soit abaissée la perpendiculaire BG à la diagonale AD, & soit achevé le parallélogramme rectangle AIBG: les lignes AH, AF, AI, AG feront le même effet que les forces AC, AB (art. 1043). De plus, les forces représentées par AH, AI sont évidemment égales, & directement opposées, puisqu'elles mesurent les hauteurs des triangles égaux ABD, ACD: donc il ne reste pour mouvoir le corps

que les forces conſpirantes A F, A G, dirigées ſuivant la diagonale : reſte donc à faire voir que leur ſomme eſt égal à la diagonale ; ce qui eſt évident, à cauſe des triangles rectangles égaux & ſemblables B G D, C F A, qui donnent G D = A F : donc encore dans ce cas le corps décrit la diagonale A D du parallélogramme, formé ſur la direction des forces compoſantes. C. Q. F. 3°. D.

Corollaire V.

1045. Donc quel que ſoit l'angle de direction des forces compoſantes, le corps pouſſé par deux forces décrira toujours la diagonale du parallélogramme formé ſur ces directions. Et de plus, ſi l'on oppoſe au corps dans la direction de la diagonale une force repréſentée par cette même ligne, cette force ſera équilibre avec les deux autres ; puiſque de ces deux forces il n'en réſulte qu'une force égale à celle de la diagonale, & à laquelle on ſuppoſe la nouvelle force directement oppoſée.

Corollaire VI.

1046. Donc plus l'angle de direction des puiſſances compoſantes ſera petit, plus auſſi la ligne ou force réſultante ſera grande pour les mêmes forces compoſantes : de maniere que le corps ſe mouvra avec la ſomme des compoſantes dans le cas où ces deux forces ſont dirigées ſur une même ligne ; & réciproquement plus cet angle ſera obtus, plus la force réſultante ſera petite ; enſorte que dans le cas où cet angle deviendroit égal à deux droits, les forces ſe détruiſent réciproquement, & le corps eſt emporté dans la direction de la plus forte puiſſance, & reſte en repos, ſi les forces compoſantes ſont égales.

Corollaire VII.

1047. Il ſuit encore delà que les trois forces étant repréſentées par les lignes A B, A C, A D, elles le ſont auſſi par les lignes A B, A D, B D qui forment le triangle A B D : donc elles ſont entr'elles comme les ſinus des angles du triangle A B D, puiſque dans tout triangle, les côtés ſont entr'eux comme les côtés oppoſés à ces angles. On aura donc B D : A B : A D :: ſin. B A D : ſin. A D B : ſin. A B D ; mais à cauſe des paralleles C D, A B, l'angle C A D = l'angle A D B, l'angle

BAD = l'angle BAD, & le ſinus de l'angle ABD eſt le même que celui de l'angle ABC: donc on aura cette proportion, AB : AC : AD :: ſin. CAD : ſin. BAD : ſin. BAC; d'où il ſuit que chaque puiſſance eſt repréſentée par le ſinus de l'angle formé par les directions des deux puiſſances que l'on ne compare pas.

Corollaire VIII.

1048. Il ſuit encore delà que ſi l'on a trois forces repréſentées par les lignes P, Q, R à mettre en équilibre, il n'y a qu'à former un triangle ABD avec ces trois lignes ou leurs égales, & achevant enſuite le parallélogramme ABDC, les lignes AB, AC, AD diſpoſées comme elles ſe trouveront par la conſtruction du parallélogramme, détermineront les ſituations reſpectives des puiſſances données dans le cas de l'équilibre.

Corollaire IX.

1049. De plus, comme chaque côté AB, AD, BD du triangle ABD peut être pris pour la diagonale du parallélogramme à conſtruire, il s'enſuit que trois forces pourront recevoir trois diſpoſitions différentes, & toutes les trois propres à produire l'équilibre.

Corollaire X.

1050. Il ſuit encore delà que ſi l'on donne un nombre quelconque de forces déterminées de grandeur & de poſition qui tirent toutes dans un même plan, & qui ſont appliquées au même corps, on pourra toujours déterminer la réſultante de toutes ces forces, ſoit pour ſa direction, ſoit pour ſa quantité de force. Pour cela on commencera par chercher la réſultante de deux forces quelconques; enſuite on cherchera la réſultante de cette nouvelle force équivalente aux deux autres, & d'une troiſieme; ce qui réduira trois forces à une ſeule: on continuera le même procédé juſqu'à ce que l'on n'ait plus qu'une ſeule force, & alors la réſultante derniere ſera celle qu'on demande.

Scholie.

1051. Il ſeroit aiſé de déduire encore un grand nombre de corollaires de cette propoſition, & l'on peut dire même que toute

toute la théorie de la méchanique ſtatique n'eſt qu'une ſuite de conſéquences déduites de ce principe. Il étoit donc de la derniere importance de le démontrer dans toute la rigueur poſſible: peut-être la démonſtration que j'apporte paroîtra-t'elle un peu longue; mais on ſentira bientôt que cette longueur eſt pardonnable, ſi l'on veut approfondir les démonſtrations de pluſieurs Auteurs. Il ne leur eſt pas bien difficile de démontrer que le corps décrit la diagonale, lorſqu'ils ont tellement combiné les forces motrices ou tractives, que le corps eſt néceſſairement obligé de ſe mouvoir en diagonale. Ce n'eſt pas là l'état de la queſtion. Il faut, comme le dit M. *d'Alembert*, laiſſer le corps libre de choiſir telle direction qu'il voudra, & faire voir enſuite que cette direction doit ſe trouver abſolument ſur la diagonale, & que la force réſultante doit être repréſentée par cette même diagonale; c'eſt ce que je crois avoir fait dans les art. 1042 & 1043. Dans ce dernier, la direction eſt priſe au hazard, & je démontre que la force réſultante eſt exprimée par la diagonale, quelle que ſoit la direction de cette réſultante; d'où il ſuit que puiſque les quatre forces dont il eſt queſtion dans cet article, produiſent une diagonale, les quatre dont il étoit queſtion dans le précédent, & qui ſont, ainſi que les quatre premieres équivalentes aux deux forces motrices M & N, doivent auſſi produire une diagonale; d'où il ſuit *Figure* 355. que le corps ne peut pas décrire la ligne A E; ce qui fixe par conſéquent la direction du corps ſur la diagonale. J'ai auſſi ſuppoſé deux forces ſimplement motrices: car ſi la propoſition eſt vraie dans ce cas, elle le ſera auſſi dans le cas des forces tractives, parce que l'on peut regarder la force qui meut un corps, après que la force motrice a agi ſur lui dans un inſtant, comme une force tractive.

CHAPITRE II,

Où l'on fait voir le rapport des puiſſances qui ſoutiennent des poids avec des cordes.

1052. COMME nous avons conſidéré dans le Traité du Mouvement la théorie des corps qui ſe choquent ou qui ſe rencontrent, celle des corps jettés ſelon des directions perpendicu-

laires, obliques ou paralleles à l'horizon ; il semble que, pour suivre un ordre dans la méchanique, dont l'objet est de considérer en équilibre les corps qui tendent naturellement à se mouvoir, il est nécessaire d'expliquer, avant toutes choses, ce qui a le plus de rapport avec ce qui précéde immédiatement : or ce sera sans doute la théorie des corps soutenus par des puissances qui sont en équilibre avec ces corps dans toutes les situations qu'on peut leur donner ; & c'est ce qu'on se propose d'enseigner dans ce second chapitre, parce qu'après cela nous ferons voir dans le troisieme les poids qui tendent à rouler sur des plans inclinés, & le rapport de leur pesanteur avec les puissances qui les soutiennent en repos.

PROPOSITION.

Théoreme.

Pl. XXVII. Figure 360. 1053. *Si les deux puissances* P *&* Q *soutiennent un poids* R *tendant à suivre la direction* BR, *je dis que ces deux puissances seront en équilibre entr'elles, si elles sont en raison réciproque des perpendiculaires* BC *&* BG, *tirées d'un des points* B *de la direction* BR *sur les directions* FP *&* FQ, *c'est-à-dire que* P : Q :: BG : BC.

Démonstration.

Pour que ces deux puissances fassent équilibre entr'elles, il faut qu'elles soient comme les côtés FE & FD d'un parallélogramme, dont la diagonale BF exprimeroit la force ou la pesanteur du poids R, parce que pour lors le poids R étant pris pour la puissance résistante, il sera en équilibre avec les deux puissances agissantes, parce qu'il se trouvera de part & d'autre une égalité de force ; mais prenant BD à la place de EF, nous aurons les côtés BD & DF du triangle BDF, qui seront dans la raison des puissances P & Q ; & comme les côtés BD & DF sont aussi dans la raison des sinus de leurs angles opposés, qui ne sont autre chose que les perpendiculaires BC & BG, l'on aura donc P : Q :: BC : BG. C. Q. F. D.

Figure 361. De même si d'un point D de la direction FQ l'on tire les perpendiculaires DG & DC sur les directions BR & FP, l'on aura le rapport de la puissance P au poids Q, étant en raison réciproque des perpendiculaires DC & DG : car à cause que

ces perpendiculaires sont les sinus des angles opposés aux côtés BF & BD du triangle BDF, l'on aura BD:BF::DG:DC, ou bien P : R :: DG : DC.

Enfin si du point E, pris dans la direction de la puissance P, l'on abaisse les perpendiculaires EG & EC sur les directions des puissances R & Q, l'on aura encore Q : R :: EG : EC. *Figure 362.*

COROLLAIRE I.

1054. Il suit delà que si l'on suppose que le poids R diminue continuellement, les deux puissances P & Q demeurant les mêmes, la diagonale BF du parallélogramme ED, diminuera à proportion du corps R. Or comme les côtés FD & FE demeureront les mêmes, l'angle EFD augmentera, parce que les puissances P & Q descendront, & le poids R remontera : mais tant que le poids R sera d'une grandeur finie, la diagonale BF sera toujours une ligne finie, & pourra toujours former le parallélogramme ED, & par conséquent les directions FP & FQ formeront toujours un angle en F. *Figure 363.*

COROLLAIRE II.

1055. Il suit delà qu'une corde ne peut jamais être tendue en ligne droite que par une puissance infinie : car son poids, quelque petit qu'on le suppose, sera toujours d'une grandeur finie, & peut être regardé, étant réuni en un seul point, comme le poids R attaché à quelqu'un des points F de la même corde.

COROLLAIRE III.

1056. Si des points E & D l'on abaisse les perpendiculaires EG & DH sur la direction BR, & qu'on acheve les parallélogrammes rectangles GI & HK, l'on aura les côtés EI & IF, qui représenteront deux forces égales à la force EF, & les deux côtés FK & KD, qui exprimeront aussi deux forces égales à DF (art. 1045) ; mais IF & FK sont deux forces égales qui ne soutiennent aucune partie du poids R : ainsi la partie du poids que soutient la puissance Q, sera exprimée par DK, & la partie du poids que soutient la puissance P, sera exprimée par EI. Il s'ensuit donc que les parties du poids R que soutiennent les puissances P & Q, sont l'une à l'autre, comme EI est à DK, ou comme GF est à HF : mais comme *Figure 364.*

BH est égal à GF, BF exprimera toute la pesanteur du poids: ainsi l'on aura donc P:R:: EI, ou GF:BF; & de l'autre part Q:R:: DK ou HF:BF.

COROLLAIRE. IV.

Figure 365. 1057. Mais si la puissance Q étoit dans la ligne horizontale ED, & que la puissance P fût au dessus de l'horizontale, cette puissance soutiendra elle seule tout le poids R: car ayant achevé le parallélogramme rectangle BE, la perpendiculaire HE exprimera la partie du poids R, que porte la puissance P; mais HE est égal à la diagonale BF, qui exprime toute la pesanteur du poids: ainsi la puissance P soutiendra tout le poids.

COROLLAIRE V.

Figure 366. 1058. Mais si la puissance Q étoit au dessous de l'horizontale HL, & la puissance P au dessus, il arrivera que la puissance P soutiendra non seulement tout le poids R, mais encore la partie du poids que soutiendroit la puissance Q, si elle étoit autant au dessus de l'horizontale HL, comme elle se trouve ici au dessous: car ayant formé les parallélogrammes rectangles IH & GK, la ligne EH exprimera ce que porte la puissance P, & la ligne FK exprimera l'effort que fait la puissance Q. Or comme FK est égal à IB, il s'ensuit que EH ou IF est composé de BF & de BI, c'est-à-dire de BF, qui exprime la pesanteur du poids, & de BI qui est la partie du poids R que soutiendra la puissance Q, si elle étoit autant au dessus de l'horizontale HL qu'elle est au dessous: ce qui fait voir que la puissance P soutient plus que la pesanteur du poids R.

COROLLAIRE VI.

Figure 367. 1059. Enfin il suit delà que si l'on a un corps pesant HI, soutenu par deux puissances P & Q, ces deux puissances seront en équilibre, si elles sont en raison réciproques des perpendiculaires FG & FC, tirées d'un des points de la direction BF sur celles des puissances P & Q: car si l'on suppose que toute la pesanteur du corps HI soit ramassée autour de son centre de gravité F pour former le poids R, il faudra, pour soutenir ce poids, que P soit à Q, comme BE est à BD, ou comme FD est à BD. Or comme les sinus des angles dans le triangle

FBD sont dans la même raison que leurs côtés opposés, FG étant le sinus de l'angle FBG, & FC le sinus de l'angle BFD, puisqu'il est celui de son alterne CBF, l'on aura FD : BD :: FG : FC, ou bien BE : BD :: FG : FC ; par conséquent P : Q :: FG : FC.

Mais si le corps pesant HI étoit appuyé par une de ses extrêmités H, & soutenu seulement à l'extrêmité I par la puissance Q, cette puissance Q sera au poids R, comme BD est à BF ; & comme ces lignes sont les côtés du triangle BFD, elles seront dans la raison des sinus des angles BFD & BDF, qui sont les perpendiculaires EG & EC ; ce qui fait voir que la puissance Q est au poids R dans la raison réciproque des perpendiculaires EC & EG, tirées d'un des points E de la direction de la puissance P sur celles des puissances Q & R.

CHAPITRE III.

Du Plan incliné.

DÉFINITIONS.

1060. ON appelle *plan incliné* toute superficie inclinée à l'horizon, le long de laquelle on fait mouvoir un poids. Ce plan peut toujours être exprimé par l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

PROPOSITION.

THEOREME.

1061. *Si une puissance* Q *soutient un poids sphérique* P *par une ligne de direction* DE, *parallele au plan incliné* AB, *je dis*, 1°. *que la puissance sera au poids, comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur, c'est-à-dire que* Q : P :: BC : BA. Pl. XXVIII. Figure 369.

2°. *Que si le poids est soutenu par une puissance* Q, *qui tire selon une direction* DE, *parallele à la base* AC *du plan, la puissance sera au poids comme la hauteur du plan est à la longueur de sa base, c'est-à-dire que* Q : P :: BC : AC. Figure 370.

DÉMONSTRATION DU PREMIER CAS.

Si l'on tire la ligne DF perpendiculaire sur le plan incliné AB, cette ligne sera la direction de la puissance résistante : & Figure 369.

faisant le parallélogramme IG, le côté DG exprimera une des puissances agissantes, & le côté DI l'autre puissance agissante, & ces deux puissances agissantes ensemble seront en équilibre avec la puissance résistante DF; mais ces deux puissances étant l'une à l'autre comme DG est à DI, seront comme les côtés IF & ID du triangle rectangle DIF; & comme ce triangle est semblable au triangle ABC, l'on aura IF, ou DG : ID :: BC : BA, ou bien Q : P :: BC : BA.

Démonstration du second cas.

Figure 370. 1062. Si la direction DE de la puissance Q est parallele à la base AC du plan incliné, il sera facile de prouver que Q : P :: BC : CA : car si la ligne DF est perpendiculaire sur AB, elle exprimera encore la puissance résistante; & si l'on fait le parallélogramme rectangle IG, l'on aura Q : P :: DG : DI. Or si à la place du DG on prend IF, l'on aura les côtés IF & ID du triangle rectangle DIF, qui seront comme Q est à P : & comme ce triangle est semblable au triangle ACB, l'on aura FI : ID :: BC : CA, ou bien Q : P :: BC : CA.

Figure 371. 1063. Mais si la ligne de direction DE de la puissance Q n'étoit point parallele au plan incliné AB, ni à sa base AC, & que cependant la puissance & le poids fussent en équilibre; en ce cas la puissance sera au poids dans la raison réciproque des perpendiculaires FI & FL : car ayant fait le parallélogramme KG, l'on aura toujours Q : P :: DG : DK, ou GF; mais les côtés DG & GF du triangle GDF sont comme les sinus de leurs angles opposés, qui sont les perpendiculaires EI & FL : ainsi l'on aura DG : GF ou DK :: FI : FL, ou bien Q : P :: FI : FL. L'on trouvera comme dans les propositions précédentes le rapport de chacune des puissances agissantes P & Q à la résistance R, qui est l'effort que le poids P fait contre le plan AB.

Corollaire I.

Figure 371. 1064. Il suit delà que si deux corps P & Q se soutiennent mutuellement sur des plans diversement inclinés par des lignes RP & RQ, paralles à ces plans, ils seront entr'eux comme les longueurs des plans, c'est-à-dire que P : Q :: BA : BC : car comme BD est la hauteur commune des deux plans, la puissance qui seroit en R ne fera pas plus d'effort pour soutenir

le poids, que pour soutenir le poids Q, c'est à-dire qu'elle pourroit être la puissance commune : ainsi comme le rapport de la puissance R à la hauteur DB, est le même pour chaque plan incliné, le rapport des plans & des poids sera aussi le même.

COROLLAIRE II.

1065. De même si deux poids P & Q se soutiennent mutuellement sur des plans diversement inclinés par des lignes de directions paralleles aux bases, ces deux poids seront entr'eux comme les longueurs des bases, c'est-à-dire que P:Q :: DA:DC : car comme BD est la hauteur commune des deux plans, la puissance R pourra devenir commune pour les deux poids. Ainsi comme le rapport de la hauteur BD à la puissance de part & d'autre sera le même, le rapport des poids & des bases sera aussi le même. *Figure 373.*

COROLLAIRE III.

1066. Il suit encore delà que lorsqu'une puissance Q tire ou pousse un poids P par une ligne de direction parallele au plan, la puissance est au poids comme le sinus BC de l'angle d'inclinaison BAC du plan est au sinus total AB, & que par conséquent la puissance est toujours moindre que le poids. *Figure 369.*

COROLLAIRE IV.

1067. Enfin l'on peut dire encore que lorsqu'une puissance Q tire ou pousse un poids P par une ligne de direction parallele à la base AC du plan incliné, la puissance est au poids, comme le sinus BC de l'angle d'inclinaison BAC est au sinus AC de son complément ABC ; ce qui fait voir que la puissance est égale au poids, lorsque l'angle d'inclinaison est de 45 degrés, & qu'elle est plus grande que le poids, lorsque l'angle d'inclinaison est au dessus de 45 degrés. *Figure 370.*



CHAPITRE IV.

Du Levier.

DEFINITIONS.

1068. *Levier* eſt une verge inflexible conſidérée ſans peſanteur, à trois points de laquelle il y a trois puiſſances appliquées, deux deſquelles, qui ſont les *agiſſantes*, agiſſent d'un certain ſens, & ont leurs directions dans un même plan; & la troiſieme, qui eſt la *réſiſtante*, agit d'un ſens directement oppoſé aux deux autres, entre leſquelles elle eſt toujours.

PROPOSITION.

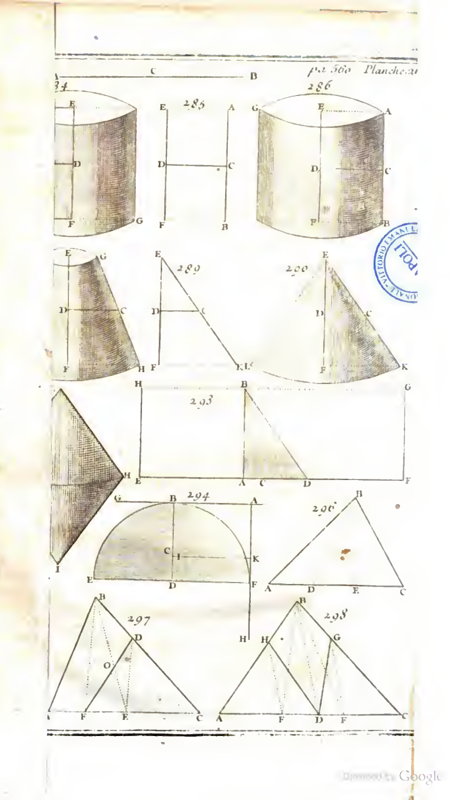
THÉOREME.

1069. *Deux puiſſances* P *&* Q *que l'on compare, ſeront en équilibre, ſi elles ſont en raiſon réciproque des perpendiculaires* DG *&* DH, *tirées du point d'appui* D *ſur les lignes de directions* CA *&* CB *des puiſſances* P *&* Q: *ainſi il faut prouver que* P : Q :: DH : DG.

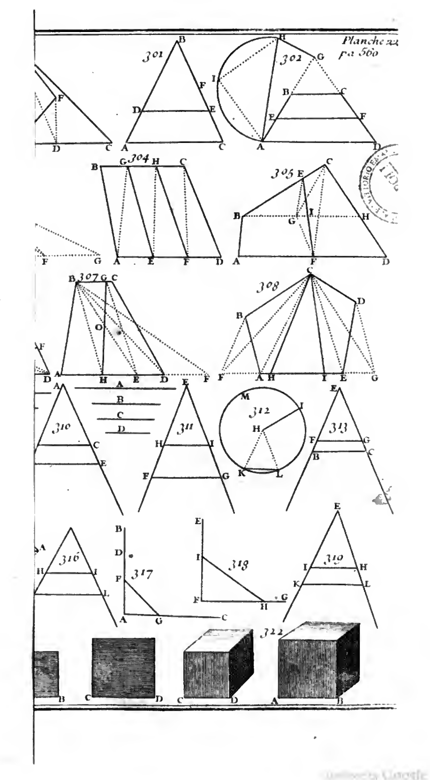
DÉMONSTRATION.

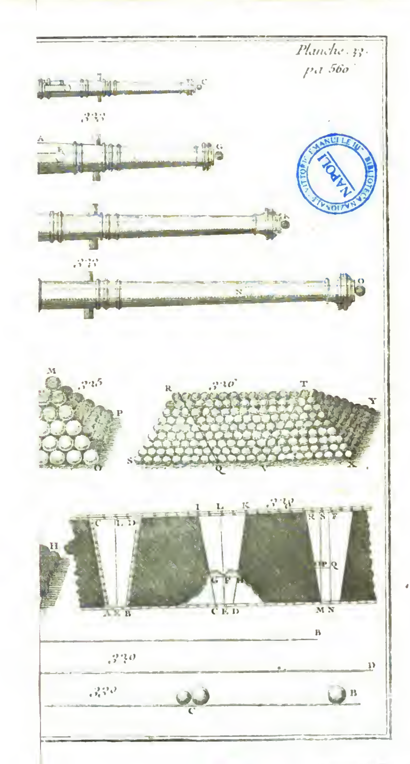
Si du point D l'on tire les lignes DE, DF paralleles aux lignes de directions CA, CB, l'on aura un parallélogramme EF, dont la diagonale CD exprimera la force de la puiſſance qui réſiſte aux deux puiſſances P & Q; le côté CE exprimera la force de la puiſſance P, & le côté CF celle de la puiſſance Q: ainſi l'on aura P : Q :: EC, ou DF : FC; mais dans le triangle DCF, l'on ſçait que les ſinus des angles ſont dans la même raiſon que leurs côtés oppoſés: l'on aura donc le côté DF eſt au côté CF, comme le ſinus de l'angle DCF eſt au ſinus de l'angle CDF. Or comme DH eſt le ſinus de l'angle DCF, & que DG eſt le ſinus de l'angle CDF, puiſqu'il eſt celui de l'angle alterne ECD, ſi à la place de DF on prend EC, l'on aura EC : FC :: HD : DG, & ſi au lieu de EC & FC l'on prend les puiſſances P & Q, l'on aura encore P : Q :: DH : DG. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

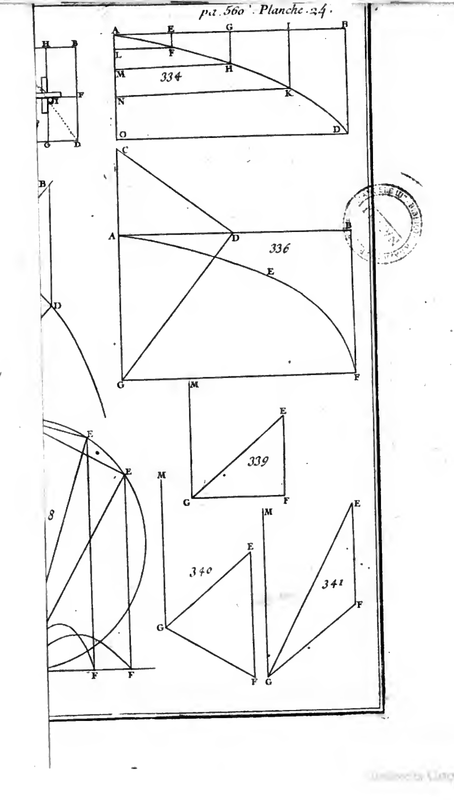


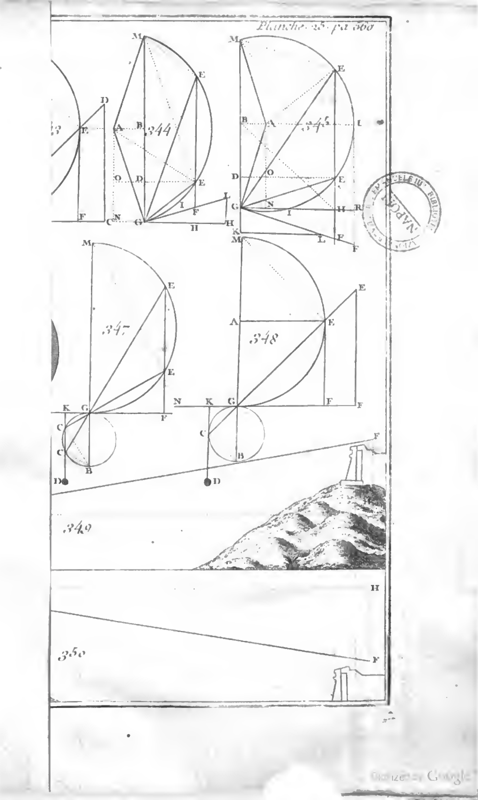
pa. 560 Planche.21
285
286
289
290
293
294
296
297
298

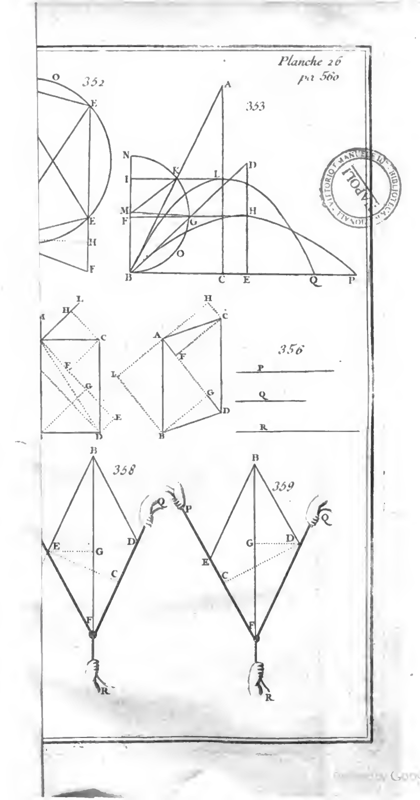

Planche 22
pa 560
301
302
304
305
307
308
310
311
312
313
316
317
318
319
322


Planche. 33.
pa. 560
M
P
O
R
T
Y
S
Q
V
X
I
L
K
C
D
R
S
F
H
Q
G
F
H
A
B
C
E
D
M
N
B
D
B
C




A
E
G
I
B
L
F
M
H
334
N
K
O
D
C
A
D
B
336
E
G
F
M
E
339
G
F
M
E
340
G
F
M
E
341
F
G
E
E
8
F
F
H
B
F
G
D
B
D


Planche 25 pa 560
344
345
347
348
349
350


Planche 26
pa 560
352
353
356
358
359

COROLLAIRE I.

1070. Il est clair que si le point C s'éloignoit de plus en plus des trois points A, D, B, de sorte que les directions AC, DC, BC des trois puissances P, R, Q, devinssent enfin paralleles, elles seront perpendiculaires ou obliques; si elles sont obliques, l'on aura encore P : Q :: DH : DG : car les lignes DH & DG sont des perpendiculaires tirées sur les lignes de directions des puissances P & Q; de plus à cause des triangles semblables DAG & DBH, l'on pourra à la place des lignes DH, DG, prendre les lignes DB & DA, d'où l'on tire P : Q :: DB : DA; c'est-à-dire que deux puissances appliquées aux extrêmités des bras d'un levier, sont en équilibre, lorsqu'ayant leurs directions paralleles, elles sont en raison réciproque des bras du levier, c'est-à-dire si P : Q :: DB : DA. *Figure* 374 *&* 375.

REMARQUE.

1071. L'on peut remarquer ici en passant, que si deux puissances portent un poids E, appliqué dans le milieu d'un levier, elles seront également chargées; car il y aura même raison de P à Q, que de CB à CA : mais comme CB est égal à CA, la puissance P sera égale à la puissance Q. Et si au contraire le poids F, est plus près de A que de B, comme le poids F, la puissance P sera plus chargée que la puissance Q, puisque l'on aura P : Q :: DB : DA. Ainsi d'autant le bras sera plus grand que le bras DA, d'autant la puissance P sera plus chargée que la puissance Q. *Figure* 377.

COROLLAIRE II.

1072. Mais si l'on a un levier AB, dont le point d'appui soit à une des extrêmités A, & que de deux puissances appliquées aux points D & B, l'une tire selon la direction DQ, & l'autre selon la direction BP en sens contraires, ces deux puissances seront encore en équilibre, si elles sont en raison réciproque des perpendiculaires AG & AH, tirées du point d'appui A sur leurs lignes de directions : car faisant le parallélogramme EF, le côté CF exprimera la force de la puissance P, & la diagonale CD celle de la puissance Q, pour que ces deux puissances soient en équilibre. Et comme dans le triangle CFD, les côtés CF & CD sont dans la raison des sinus de *Figure* 377.

leurs angles opposés, l'on aura CF : CD :: AH : AG, ou bien P : Q :: AH : AG.

Corollaire III.

Figure 377 & 378. 1073. L'on peut dire encore, comme dans le coroll. I, que si le point C s'éloignoit de plus en plus à l'infini des points D & B, ensorte que les lignes de directions BP & DQ devinssent paralleles & perpendiculaires au levier AB, les puissances P & Q demeureront toujours en équilibre : car dans ce cas la perpendiculaire AG deviendra égale à la longueur du levier AB, & la perpendiculaire AH égale au bras AD, & l'on aura encore P : Q :: AD : AB.

Corollaire IV.

Figure 379. 1074. Par conséquent si une puissance P soutient un poids Q à l'aide d'un levier AB, ensorte que le poids soit dans le milieu D, le point d'appui à l'extrêmité A, & la puissance à l'extrêmité B, cette puissance ne soutiendra que la moitié du poids Q ; car l'on aura P : Q :: AD : AB : ainsi AD étant la moitié de AB, P sera la moitié de Q.

Corollaire V.

1075. Donc si le poids, au lieu d'être dans le milieu du levier, étoit au point C plus près de A que de B, la puissance sera moins chargée qu'elle n'étoit auparavant : car l'on aura toujours P : Q :: AC : AB. Et comme AC est moindre que CB, P sera moindre que la moitié de Q.

Corollaire VI.

Pl. XXIX. *Figure* 380. 1076. Il suit delà que si la puissance étoit appliquée à un point quelconque D du levier AB, & que le poids fût à l'extrêmité B, la puissance & le poids seront encore en équilibre, s'il y a même raison de la puissance au poids, que du levier AB au bras AD.

Corollaire VII.

Figure 381. 1077. Si l'on a un levier AB, dont le point d'appui soit en E, deux poids P & Q attachés aux extrêmités A & B seront en équilibre, s'ils sont en raison réciproque des bras du levier, c'est-à-dire si P : Q :: EB : EA : car nous avons démontré que deux puissances dans cet état étoient en équilibre, si au lieu

des puissances l'on met des poids qui leur soient équivalens, ils feront le même effet, & seront par conséquent en équilibre.

COROLLAIRE VIII.

1078. Il suit encore delà que si l'on a deux poids appliqués aux extrêmités d'un levier ou d'une balance, on pourra toujours trouver le point d'appui, autour duquel les deux poids seront en équilibre, en disant: Comme la somme de deux poids P & Q est à toute la longueur de la balance AB, ainsi le poids P est à la longueur du bras BE, qui donnera le point E pour le point d'appui. *Figure 381.*

Par la même raison connoissant les bras AE & EB avec un poids P, l'on trouvera toujours l'autre poids Q, en disant: comme le poids P est au bras EB, ainsi le bras AE est au poids Q.

COROLLAIRE IX.

1079. Il suit encore delà qu'ayant une verge AB d'une pesanteur quelconque, on pourra trouver un point tel que F, par lequel la verge étant suspendue, elle soit en équilibre avec le poids C: car il n'y a qu'à diviser la verge AB en deux également au point D, & supposer que sa pesanteur est rassemblée autour de son centre de gravité pour avoir le poids E, ensuite chercher dans la verge AD, qui n'a plus de pesanteur, un point d'appui F, en disant: comme la somme des deux poids C & F est à la longueur AD, ainsi le poids E est au au bras AF. *Figure 382.*

COROLLAIRE X.

1080. Enfin l'on peut dire qu'ayant deux poids C & D appliqués aux deux extrêmités d'une balance AB, à laquelle on suppose une pesanteur, pour trouver un point d'appui, autour duquel la pesanteur de la balance & celle des poids soient en équilibre, il faut d'abord chercher un point d'appui tel que E, autour duquel les deux poids C & D soient en équilibre, en faisant abstraction de la pesanteur de la balance; ensuite supposer que les poids C & D sont réunis dans le seul poids G au centre de gravité E, & que la pesanteur de la balance est aussi réunie dans le poids F autour de son centre de gravité H, & regardant la longueur EH comme une balance *Figure 383.*

aux extrêmités de laquelle sont les poids G & F, on en cherchera le point d'appui, en disant : Comme la somme des deux poids G & F est à la longueur EH, ainsi le poids F est au bras EI, qui donnera le point I, qui sera celui autour duquel la pesanteur de la balance & celle des poids C & D seront en équilibre.

COROLLAIRE XI.

Figure 384. 1081. Enfin si l'on a une verge ou balance AB d'une certaine pesanteur avec un poids I suspendu à l'extrêmité A, & qu'on prenne le point C pour le point d'appui, & que l'on veuille trouver dans le bras CB un endroit où un poids tel que H, aidé de la pesanteur de la balance, soit en équilibre avec le poids I, il faut diviser la balance AB en deux également au point E, & supposer que sa pesanteur soit réunie dans le point F ; ensuite chercher la partie du poids I, qui fera équilibre avec le poids F, ou autrement avec la balance, en disant : Comme le bras AC est au poids F, ainsi le bras CE est à la partie du poids I qui doit faire l'équilibre, qui sera, par exemple, la partie K. Présentement pour trouver le point G, où le poids H doit être suspendu pour être en équilibre avec ce qui reste du poids I, qui est la partie L, il faut dire : Comme le poids H est au bras AC, ainsi le poids L est au bras CG, que l'on trouvera après avoir déterminé la pesanteur de la balance AB, & celles des poids I & H.

L'on tire de ce corollaire le moyen de faire la balance romaine, que l'on nomme aussi *peson*.

REMARQUE.

Figure 385. 1082. Il y a encore une autre maniere de démontrer l'équilibre dans les machines dont nous n'avons pas encore parlé, mais qui s'entendra aisément, si l'on se rappelle ce qui a été enseigné dans le Traité du Mouvement.

Par exemple, pour prouver que deux poids P & Q attachés aux extrêmités d'un levier AB, sont en équilibre, s'ils sont en raison réciproque des bras EB & EA, c'est-à-dire si P : Q :: EB : EA.

Considérez que le poids P ne peut se mouvoir qu'il ne fasse aussi mouvoir le poids Q. Or supposant que le poids P puisse emporter le poids Q, dans le tems que le poids P décrira l'arc

AF, le poids Q décrira l'arc GB : ainsi l'arc AF marquera la vîtesse du poids P, & l'arc GB la vîtesse du poids Q en tems égaux. Mais nous avons fait voir (art. 933) que deux corps avoient une même quantité de force, lorsqu'ils avoient des masses & des vîtesses réciproques: ainsi ces deux poids auront des forces égales, si P : Q :: GB : AF. Or, selon la supposition, P : Q :: EB : EA : ainsi prenant EB & EA à la place de GB & AF, qui sont dans la même raison, l'on aura P : Q :: EB : EA : par conséquent ces deux poids ayant une même force, lorsqu'ils sont dans la raison réciproque des bras du levier, demeureront en équilibre, puisque l'un ne fera pas plus d'effort pour se mouvoir que l'autre.

COROLLAIRE.

1083. Il suit delà que si à la place du poids Q on suppose une puissance, cette puissance sera encore en équilibre avec le poids P, s'ils sont en raison réciproque de leurs chemins ou des vîtesses, qu'ils ont en tems égaux, c'est-à-dire si la puissance Q est au poids, comme le chemin ou la vîtesse AF du poids est au chemin ou à la vîtesse GB de la puissance : c'est pourquoi lorsque l'on fera voir dans les machines que le chemin de la puissance & celui du poids sont en raison réciproque de la puissance & du poids, on prouvera toujours que la puissance & le poids sont en équilibre. *Figure 385.*

Par exemple, pour prouver que si une puissance Q appliquée à l'extrêmité d'un levier, soutient un poids P, que la puissance & le poids seront en équilibre, si Q : P :: AF : AB. Imaginons que la puissance & le poids se soient mus, ensorte que le levier AB ait pris la situation AD, la vîtesse de la puissance sera l'arc DB, & la vîtesse du poids l'arc EF; & dans l'état de l'équilibre, l'on aura Q : P :: EF : DB, & si à la place des arcs l'on prend les rayons, l'on aura Q : P :: AF : AB. *Figure 386.*

DÉFINITIONS.

1084. Comme nous n'avons point mis de différence entre les leviers dont nous venons de faire mention, & que cependant le point d'appui, ou la puissance résistante change le levier de nature, selon qu'il est placé différemment, nous nommerons *levier du premier genre* celui qui a une puissance à une extrêmité, un poids à l'autre, & le point d'appui entre

les deux. Nous nommerons *levier du second genre* celui dont le point d'appui est à une des extrêmités, une puissance à l'autre, & le poids entre les deux. Enfin nous nommerons *levier du troisieme genre* celui dont le point d'appui est à une des extrêmités, le poids à l'autre, & la puissance entre les deux.

Il y a encore une quatrieme sorte de levier, qu'on appelle *levier recourbé*. Ce levier est nommé ainsi, parce qu'il fait un angle au point d'appui; ce qui lui a fait aussi donner le nom *d'angulaire*. Ce levier se rapporte toujours au levier du premier genre, parce que la puissance est à une des extrêmités, le poids à l'autre, & le point d'appui entre deux.

CHAPITRE V.

De la Roue dans son aissieu.

DEFINITIONS.

1085. LA *roue dans son aissieu* est une machine composée d'une roue attachée par ses rayons fixement à un cylindre, que l'on nomme *treuil*, aux extrêmités duquel sont des pivots de fer; posés sur un affût, qui n'est autre autre chose qu'un assemblage de pieces de bois, qui sert à porter la roue & son aissieu.

La puissance s'applique ordinairement à la circonférence de la roue, qu'elle fait tourner par le moyen des chevilles qui sont perpendiculaires à son plan, comme aux roues qui servent à tirer les pierres des carrieres: pour le poids, il est toujours attaché à une corde qui tourne autour du treuil.

PROPOSITION.

THÉOREME.

1086. *Si une puissance soutient un poids à l'aide d'une roue; & que cette puissance agisse par une ligne de direction tangente à la roue, je dis que la puissance sera au poids comme le rayon du treuil est au rayon de la roue.*

DÉMONSTRATION.

Pour prouver que si la puissance Q soutient le poids P en

équilibre, il y aura même raison de Q à P, que du rayon CB *Figure 387.*
du treuil au rayon CA de la roue. Remarquez que la ligne droite AB peut être regardée comme un levier, dont le point d'appui est au centre C du treuil, & que la puissance Q étant à une des extrêmités du levier, & le poids à l'autre, l'on aura dans l'état de l'équilibre Q : P :: CB : CA.

Mais si la puissance, au lieu d'agir selon la direction AQ, agissoit selon la direction DF, toujours tangente à la roue, la puissance sera encore au poids comme le rayon du treuil est au rayon de la roue : car l'angle DCB fait un levier recourbé, dont les bras sont les rayons CB & CD. Or si la puissance agit par une ligne de direction DF perpendiculaire au bras CD, elle fera le même effet à l'endroit D qu'à l'endroit A : ainsi le levier recourbé tenant lieu du levier du premier genre (art. 1084), l'on aura toujours Q : P :: CB : CA, ou bien Q : P :: CB : CD. C. Q. F. D.

L'on peut encore démontrer ceci par le mouvement, en considérant que lorsque la puissance a fait un tour de la roue, le poids a fait un tour du treuil; mais nous sçavons que la puissance & le poids sont en équilibre, lorsqu'ils sont en raison réciproque de leurs vîtesses : ainsi la circonférence de la roue exprimant la vîtesse de la puissance, & la circonférence du treuil celle du poids, la puissance sera au poids comme la circonférence du treuil est à la circonférence de la roue; mais prenant les rayons à la place des circonférences, puisqu'ils sont en même raison, l'on aura la puissance est au poids comme le rayon du treuil est au rayon de la roue.

CHAPITRE VI.

De la Poulie.

DÉFINITIONS.

1087. LA *poulie* est une roue de bois ou de métal, qui est attachée à une écharpe ou chape de fer, qui embrasse la poulie.

Lorsque la poulie est attachée à l'endroit d'une machine d'où elle ne bouge point, on la nomme *poulie fixe*; & lorsqu'elle est attachée à un poids que l'on veut enlever, on la nomme *poulie mobile*.

Lorsque plusieurs poulies sont enfermées dans la même chape, soit qu'elles soient posées les unes au dessus des autres, ou les unes à côté des autres, on les nomme *poulies mouflées*, lesquelles peuvent être toutes ensemble fixes ou mobiles.

Remarque.

1088. Dans la théorie de la poulie, comme dans celle de toutes les autres machines, l'on n'a point d'égard aux frottemens des cordages, ni à celui de la poulie sur son aissieu : cependant l'on peut dire que plus la poulie sera grande & l'axe petit, & moins il y aura de frottement.

Proposition.

Théoreme.

1089. *Si une puissance soutient un poids à l'aide d'une poulie ; dont la chape soit immobile, je dis, 1°. que la puissance sera égale au poids. 2°. Que si la chape est mobile, de sorte que le poids qui y seroit attaché, soit enlevé par la puissance, cette puissance sera la moitié du poids, lorsque la direction de la puissance & celle du poids seront paralleles.*

Démonstration du premier cas.

Figure 388. Si l'on considere le diametre AB de la poulie, comme un levier du premier genre, puisque le poids est à une extrêmité, la puissance à l'autre, & le point d'appui entre les deux, qui est ici le point C. Il faudra, pour que la puissance soit en équilibre avec le poids, avoir cette proportion, $Q:P::CA:CB$. Mais comme l'on a CA égal à CB, puisque ce sont les rayons d'un même cercle, l'on aura $Q = P$. C. Q. F. D.

Pour démontrer ceci par le mouvement, faites attention que si la puissance Q tire de haut en bas, la corde BQ de la longueur de deux pieds, cela ne se pourra faire sans que le poids P ne soit monté, d'autant que la puissance est descendue, c'est-à-dire de deux pieds ; mais dans l'état de l'équilibre, la puissance doit être au poids dans la raison réciproque de la vîtesse ou du chemin de la puissance & du poids. Et comme la vîtesse de l'une est égale à la vîtesse de l'autre, la force de l'une sera égale à la force de l'autre.

Corollaire.

COROLLAIRE.

1090. Il suit delà que les poulies fixes n'augmentent point la force de la puissance, & qu'elles ne servent qu'à changer les directions, & à diminuer le frottement, qui seroit très considérable, si la corde ne tournoit pas avec la poulie, & étoit obligée de glisser ou de passer pardessus un cylindre immobile; au lieu qu'il n'est presque question ici que du frottement qui se fait de la poulie contre son aissieu, qui est bien plus petit que celui que feroit la corde sur le cylindre immobile, le frottement de l'aissieu étant à celui du cylindre immobile, comme le rayon de l'aissieu est à celui de la poulie; ce qui fait voir, comme nous l'avons déja dit, que plus la poulie est grande, & l'aissieu petit, moins il y aura de frottement.

DÉMONSTRATION DU SECOND CAS.

Si l'on suppose une poulie AB, au dessous de laquelle passe une corde, dont l'un des bouts soit attaché à un endroit fixe G, & qu'à l'autre bout AE soit appliquée une puissance Q, ou bien que l'autre bout de la corde passe au dessus d'une poulie DE, afin que la puissance étant en Q, & tirant de haut en bas, agisse plus commodément: enfin que le poids P soit attaché à l'écharpe CI, il faut prouver que la puissance ne soutient que la moitié du poids. *Figure 389.*

Pour cela, faites attention que le diametre AB de la poulie peut être regardé comme un levier du second genre, dont le point d'appui est à l'extrêmité B, la puissance à l'extrêmité A, & le poids dans le milieu. Or si la puissance est en équilibre avec le poids, l'on aura Q : P :: CB : AB; mais le rayon CB, est la moitié du diametre AB: donc la puissance Q sera la moitié du poids P.

Il faut remarquer que par ce qui a été démontré dans le premier cas, la poulie DE ne fait autre chose ici que faciliter l'action de la puissance, puisqu'elle n'aura pas plus de force appliquée dans la partie EA de la corde, que dans la partie DQ, comptant toujours pour rien le frottement dans la poulie DE, comme dans la poulie AB.

On démontrera encore ceci par le mouvement, en considérant que si la puissance a élevé le poids P de deux pieds, chaque brin de corde GB & EA sera diminué de deux pieds:

ainsi la puissance Q sera descendue de quatre pieds, ou pour mieux dire, le brin DQ sera augmenté de quatre pieds : ainsi le mouvement de la puissance sera double de celui du poids ; par conséquent le poids sera double de la puissance, puisque dans l'état de l'équilibre, la puissance & le poids sont dans la raison réciproque de leurs vîtesses.

Remarque.

1091. Il est à remarquer que si les brins AQ & BG ne sont point paralleles, l'analogie précédente ne sera plus la même, c'est-à-dire que l'on n'aura pas Q : P :: BC : AB ; mais que le rapport de la puissance au poids sera dans la raison réciproque des perpendiculaires tirées du point d'appui B sur les lignes de directions du poids & de la puissance. Or prenant la ligne AH pour la direction de la puissance, & la ligne CI pour celle du poids, BC sera une perpendiculaire tirée sur la direction CI du poids, & BF sera une perpendiculaire sur la direction AH de la puissance : ainsi l'on aura Q : P :: BC : BF. Ce qui est facile à entendre, si l'on a bien compris ce qui a été enseigné au sujet du levier.

Mais comme plus la ligne BA est grande par rapport à la ligne BC, plus la puissance est grande par rapport au poids dans le levier du second genre, il s'ensuit que la ligne BF devenant plus petite que BA, lorsque les brins ne sont pas paralleles, la puissance n'a pas tant de force dans ce cas ci que dans l'autre, & par conséquent il faut que les brins soient paralleles, pour que la puissance agisse avec toute sa force.

CHAPITRE VII.

Du Coin.

Définition.

1092. Le *coin* est une machine de fer ou de bois servant à élever des corps à une petite hauteur, ou à fendre du bois, qui est son principal usage. Sa figure est ordinairement isoscele, quand il sert à fendre du bois ; mais on suppose qu'elle est rectangle, quand on s'en sert pour élever un corps pesant.

On suppose en premier lieu que les faces AO & BO du coin

ſont égales, & que le bois eſt flexible ; de maniere qu'étant commencé à fendre, & le coin introduit par la force qui le pouſſe dans la fente, les faces de la fente ſont pliées en ligne courbe, & que les faces du coin les pouſſent en deux points I & K, où il y a deux puiſſances égales, qui réſiſtent ſelon des directions E C & F C perpendiculaires aux faces du coin, & à celle des fentes qui repouſſent celles du coin, autant qu'elles ſont pouſſées par le coin, parce que l'action eſt égale à la réaction, en ſuppoſant que la tête du coin eſt frappée en G par un maillet ou une force, dont la direction eſt perpendiculaire à A B, & paſſe par l'angle A O B du coin qu'elle diviſe en deux également, puiſque le coin eſt iſoſcele. Or l'objet de ceci eſt de prouver premiérement que dans l'inſtant de l'équilibre que le coin eſt enchâſſé, comme on vient de le dire, le bois ne ſe fend point, mais il ſe ſeroit fendu, pour peu que la force du coin eût été plus grande ; il faut prouver, dis-je, que dans l'inſtant de l'équilibre les faces du coin pouſſant celles des fentes en ſont également repouſſées ; ou, ce qui eſt la même choſe, que les deux efforts qui ſe font en I & en K ſont égaux.

Pour cela ayant pris ſur G O, direction de la puiſſance R, un point quelconque D, & achevé le parallélogramme C E D F, je dis qu'il a tous ſes côtés égaux : car les triangles C I O, C K O, rectangles en I & en K, ſont égaux & ſemblables, puiſque les angles C O I, C O K ſont égaux, & par conſéquent auſſi les angles O C I, O C K ; mais l'angle O C F eſt égal à l'angle C D E, étant alternes : donc l'angle O C I égal à O C K, eſt égal à l'angle C D E, & par conſéquent C E & D E ſont égales entr'elles, & partant le parallélogramme E F a les quatre côtés égaux ; mais dans l'état de l'équilibre, l'action du coin ou la réſiſtance du bois en I, eſt à l'action du coin ou à la réſiſtance du bois en K, comme C E, C F : donc puiſque C E & C F ſont égaux, l'effort du coin en I eſt égal à l'effort du coin en K : nommant donc la force qui pouſſe le coin R, & l'effort du coin en I, P, l'effort en K ſera auſſi P.

PROPOSITION.

Théoreme.

Figure 390. 1093. *La force qui chasse le coin est à la résistance du bois ; comme la moitié de la tête du coin est à la longueur d'un de ses côtés : ainsi il faut prouver,* 1°. *que* R : 2P :: AG : AO. 2°. *Que si une puissance soutient un poids à l'aide d'un coin, la puissance sera au poids, comme la hauteur du coin est à sa longueur.*

Démonstration du premier cas.

Il est clair que les trois puissances P, P, R peuvent être regardées comme agissantes contre le point C, où leurs directions concourent : c'est pourquoi l'on a R : P :: CD : CE + CF, ou CE + ED ; mais les triangles ABO, CDB sont semblables : car les triangles AGO, CIO le sont, ayant chacun un angle droit aux points G & I ; & l'angle au point O commun : c'est pourquoi CD : CE + DE, ou 2CE :: AB : AO + BO ou 2AO : donc R : 2P :: AB : 2AO, ou R : 2P :: AG : AO, en divisant par 2 les deux termes du deuxieme rapport. C. Q. F. D.

Démonstration du second cas.

Pl. XXX. Figure 391. Pour démontrer présentement que si une puissance Q soutient un poids à l'aide d'un coin ABC, la puissance est au poids, comme sa hauteur BC est à sa longueur CA, supposons que le poids P soit retenu par une corde GD, attachée à un point fixe D, & qu'une puissance Q pousse le coin, ensorte que de l'endroit où il étoit, il soit parvenu en FA ; pour lors le poids P sera monté au sommet B du coin, ou au sommet E, qui est la même chose : alors le chemin de la puissance sera exprimé par la ligne AC, & le chemin du poids par la ligne CB : car la puissance a été de A en F ; ou, ce qui est la même chose, de C en A dans le même-tems que le poids est monté de la hauteur BC ou EA ; mais dans l'état de l'équilibre, la puissance & le poids sont dans la raison réciproque de leurs vîtesses : donc l'on aura Q : P :: BC : CA. C. Q. F. D.

Corollaire.

1094. Il suit delà que plus la hauteur ou la tête du coin est petite, plus la puissance a de force.

CHAPITRE VIII.

De la Vis.

1095. LA *vis* eſt de toutes les machines celle qui donne le plus de force à la puiſſance pour élever ou pour preſſer un corps, lorſque la puiſſance ſe ſert d'un levier pour la mettre en mouvement; & quoique cette machine ſoit connue de tout le monde, voici cependant de la façon qu'il faut la concevoir, afin de mieux entendre l'analogie que nous en ferons.

Ayant un cylindre ABCD, imaginons que ſa hauteur BD eſt diviſée en un nombre de parties égales, & que par chaque point de diviſion, comme F & H, l'on a tiré des perpendiculaires FE & HG à la ligne BD, & que chaque perpendiculaire ſoit égale à la circonférence du cercle du cylindre, c'eſt-à-dire qui auroit AB pour diametre. Or ſi l'on tire des lignes EB & GF, l'on aura autant de triangles rectangles EBF & GFH, qu'il y a de parties égales dans la hauteur BD; & ſi l'on roule tous ces triangles ſur le cylindre, le point E viendra aboutir en F, & le point G en H, & toutes les hypoténuſes EB & GF ainſi roulés, formeront enſemble une ſpirale ſur le cylindre, qui commencera en B, & finira en D; ou autrement toutes ces hypoténuſes formeront les filets de la vis, & les hauteurs BF & FH feront les intervalles de ces filets, que l'on nomme *pas de la vis :* ainſi l'on peut dire que la vis eſt un cylindre enveloppé de triangles rectangles, dont les hypoténuſes EB & GF formeront les filets, les hauteurs BF & FH les pas de la vis, & les baſes EF & GH le contour du cylindre. *Figure 392.*

L'écroue dans lequel entre la vis, eſt un autre cylindre creux, dont le diametre eſt égal à celui de la vis, & dont la ſurface intérieure eſt compoſée de triangles rectangles égaux, & ſemblables à ceux qui ſont roulés ſur le cylindre pour former la vis : c'eſt ainſi que les Géometres regardent la vis & ſon écroue.

Mais afin de tirer de la vis toute l'utilité qu'on en attend, il faut entailler le cylindre entre les filets formés par les hypoténuſes des triangles rectangles d'une certaine profondeur,

& diminuer le diametre de l'écroue d'une grandeur égale à la profondeur des entrailles de la vis, & faire les mêmes entailles dans les creux de l'écroue, afin que la vis puisse entrer dedans, & y tourner librement: si l'écroue est fixe en tournant la vis, on la fait avancer, & si c'est la vis qui est immobile, on fait avancer l'écroue.

Il y a encore une autre sorte de vis, que l'on nomme *vis sans fin*, qui n'entre point dans un écroue. Elle est mise en mouvement par une manivelle, ou par une roue dentée, dont les dents glissent le long des pas de la vis, comme on le verra dans les machines composées.

PROPOSITION.

Théoreme.

1096. *Si une puissance presse ou enleve un poids à l'aide d'une vis, la puissance sera au poids, comme la hauteur d'un des pas de la vis est à la circonférence du cercle que décrira la puissance appliquée au levier, par le moyen duquel on meut la vis.*

Démonstration.

Figure 392 & 393. Si l'on suppose que l'écroue C D de la vis soit immobile sur le plan G H, la vis E F étant mise en mouvement, fera monter le poids P qui est attaché à son extrêmité F, & si la puissance Q est appliquée à l'extrêmité B d'un levier A B, il faudra, pour faire tourner la vis, qu'elle tourne elle-même. Or dans le tems qu'elle aura décrit une circonférence de cercle, dont le rayon sera A B, la vis aura aussi fait un tour, & sera montée de la hauteur d'un pas: ainsi le chemin ou la vîtesse de la puissance sera exprimé par la circonférence I B, & le chemin ou la vîtesse du poids par la hauteur d'un pas de la vis; mais dans l'état de l'équilibre, la puissance est au poids dans la raison réciproque de la vîtesse de l'une à celle de l'autre: donc la puissance Q est au poids P, comme la hauteur d'un pas de la vis est à la circonférence décrite par la puissance Q. C. Q. F. D.

Corollaire.

1097. Il suit delà que plus les pas de la vis seront serrés, & & le levier long, plus la puissance aura de force. Ainsi supposant que les pas de la vis ne soient éloignés que de deux pouces,

& que le levier soit de 6 pieds, ou autrement de 72 pouces, la circonférence du cercle, dont il sera le rayon, sera de 452 pouces : ainsi la puissance sera au poids, comme 2 est à 452, ou bien comme 1 est à 226 : par conséquent une puissance d'une livre sera en équilibre avec un poids de 226 livres.

Nous n'avons point eu d'égard ici au frottement, non plus que dans les autres machines, quoiqu'il soit considérable.

CHAPITRE IX.

Des Machines composées.

1098. NOUS avons déja dit que lorsque plusieurs machines simples de mêmes ou de différentes especes, servent à faire mouvoir un corps, la machine qui étoit composée de toutes celles-là, se nommoit *machine composée.* Or comme ces sortes de machines montrent parfaitement l'utilité que l'on tire des méchaniques dans la pratique des Arts, nous allons faire voir les propriétés de celles qui sont le plus d'usage.

1099. Mais avant cela, il faut sçavoir que l'effort d'un homme qui agit en poussant ou tirant (comme font ceux qui tournent au cabestan, & qui tirent les charrettes), n'est que d'environ 25 livres, & que celle des chevaux qui agissent de la même maniere, n'est que de 175 livres, ou égale à celle de sept hommes, ce qu'on a connu par expérience.

1100. Que l'effort d'un homme qui tire du haut en bas, peut être d'environ 50 ou 60 livres, & même davantage; mais il ne peut agir si long-tems : il peut même être égal à son poids; mais alors il ne pourroit agir.

1101. Que l'effort d'un homme qui marche dans une roue est égal à son poids.

1102. Que dans la pratique il faut avoir égard aux frottemens, qui sont d'autant plus grands, que la machine est plus composée; aux grosseurs des cordes qui alongent les rayons des cylindres de leur demi-diametre; à la grosseur des cordes qui augmentent aussi le rayon du cylindre; à la roideur des mêmes cordes; que si l'on fait faire plusieurs tours à la corde, le rayon du cylindre augmente à chaque tour du diametre de la corde.

Analogie des poulies mouflées.

1103. *Si une puiſſance ſoutient un poids à l'aide de pluſieurs poulies, je dis que la puiſſance eſt au poids, comme l'unité eſt au double du nombre des poulies d'en bas, qui ſont toujours les poulies mobiles.*

Démonstration.

Figure 394. Soit HG la moufle d'en haut, qui eſt celle qui doit être fixe, & DK la moufle d'en bas, qui eſt celle qui doit hauſſer & enlever le poids, ſoit auſſi un des bouts de la corde attaché à l'extrêmité G de la moufle d'en haut ; après avoir paſſé au deſſus des poulies A, B, C, & au deſſous des poulies D, E, F, enſorte que ſon autre extrêmité ſoit le bout où eſt appliquée la puiſſance. Cela poſé, lorſque la puiſſance tire le bout de la corde pour faire monter le poids, toutes les parties de la corde tirent d'une égale force à la puiſſance Q ; c'eſt pourquoi chacune des poulies d'en bas, D, E, F, porte une égale partie du poids P, c'eſt-à-dire que chacune porte un tiers, parce qu'il y a trois poulies. Or ſi l'on conſidere que la poulie F eſt un levier du ſecond genre, dont le point d'appui eſt en M, la puiſſance en N, ou dans la direction NO ou RQ, qui eſt la même choſe, & le poids dans le milieu F, l'on aura que la puiſſance eſt au poids comme MN eſt à MF, c'eſt-à-dire que la puiſſance ſera la moitié du poids ; mais comme la poulie ne ſoutient ici que le tiers du poids, la puiſſance n'en ſoutiendra que la ſixieme partie, puiſque $P : R :: 1 : 6$, qui fait voir que la raiſon de la puiſſance au poids, eſt comme l'unité au double du nombre des poulies D, E, F.

Figure 395. 1104. Mais ſi l'on avoit une moufle EF immobile, dont les poulies A, B, C, D fuſſent miſes les unes à côté des autres, & une moufle mobile LM, dont les poulies G, H, I, K fuſſent dans la même diſpoſition que celles d'en haut, & qu'une corde dont une des extrêmités ſeroit attachée en I, paſſât au deſſous des poulies d'en bas, & au deſſus des poulies d'en haut, tant que l'autre bout étant parvenu à la derniere poulie A fût retenu par une puiſſance Q, l'on verroit encore que cette puiſſance eſt au poids, comme l'unité eſt au double du nombre des poulies d'en bas : ainſi comme il y a quatre poulies G, H, I, K, l'on aura $Q : P :: 1 : 8$.

Autre

Autre démonstration par le mouvement.

1105. Pour prouver que Q : P :: 1 : 6 dans la figure 394, ou que Q : P :: 1 : 8 dans la figure 395, remarquez que pour que le Poids P soit élevé par la puissance Q d'un pied, il faut que chacune des cordes qui soutient le poids se raccourcisse aussi d'un pied, & qu'ainsi la puissance doit descendre d'autant de pieds qu'il y a de brins de cordes qui se raccourcissent : mais il y a deux fois autant de brins de corde qu'il y a de poulies mobiles; ce qui fait voir que la vîtesse du poids est à celle de la puissance, comme l'unité est au double du nombre des poulies d'en bas, & par conséquent la puissance & le poids sont en équilibre, puisqu'ils sont en raison réciproque de leur vîtesse. *Figure 394.*

Application de l'effet des poulies aux manœuvres de l'Artillerie.

1106. De toutes les machines composées, il n'y en a pas qui soient plus en usage pour les manœuvres de l'Artillerie, & pour celles qu'on pratique en général, pour élever facilement des corps fort pesans, que la chevre. Or pour faire voir ici l'effet de la chevre ABCD, qui est équipée de deux poulies mouflées immobiles E, F, & de deux autres mobiles G, H, à la moufle desquelles est attachée une piece de canon pesant 4800 livres. Considérez que si la puissance est appliquée à la corde EQ, l'on aura Q : P :: 1 : 4; ainsi la puissance ne soutiendra que la quatrieme partie du poids, c'est-à-dire 1200 livres; mais la puissance, quand on se sert d'une chevre, n'est jamais appliquée aux cordes, elle est toujours appliquée à un levier MO, qui passe dans le treuil KL de la chevre. Or si le treuil a un pied de diametre, & que le levier depuis l'axe du treuil jusqu'à l'endroit où est appliquée la puissance, soit de 5 pieds, ou autrement de 60 pouces, le rayon du treuil & la longueur du levier feront un levier du second genre, dont le point d'appui sera au centre du treuil, la puissance à l'extrêmité O, & le poids à l'endroit I de la circonférence du treuil. Si la puissance soutient le poids en équilibre, il y aura même raison de cette puissance au poids, que du rayon du treuil à la longueur du levier, c'est-à-dire comme 6 pouces est à 60 pouces, ou bien comme 1 est à 10; mais à l'endroit I, le poids de 4800 est réduit à 1200: la puissance qui seroit appliquée au levier ne sou- *Figure 396.*

tiendra donc que la dixieme partie de 1200 livres, qui est 120 livres : ainsi l'on voit qu'une puissance de 120 livres soutient, par le moyen de la chevre, un poids de 4800 livres, & qu'elle en pourroit élever un beaucoup plus pesant avec une force même moindre que celle qu'on lui a supposée ici, en augmentant le nombre des poulies, & la longueur du levier.

Définitions.

1107. La machine simple à laquelle une puissance est immédiatement appliquée, & qui donne le mouvement à toutes les autres, est nommée la *premiere*; celle sur laquelle la premiere agit, la *seconde*; & celle sur laquelle la seconde agit, la *troisieme*, ainsi de suite.

Corollaire I.

1108. Il suit delà que l'effet de la premiere machine est à la cause qui fait agir la seconde, comme l'effet de la seconde est à la cause qui fait agir la troisieme, ainsi de suite jusqu'à la derniere.

Corollaire II.

1109. Il suit encore delà que dans les machines composées le rapport de la puissance au poids est composé de l'effet de la premiere machine à la cause qui fait agir la seconde, & de l'effet de la seconde à la cause qui fait agir la troisieme, ainsi de suite, jusqu'à la cause qui fait mouvoir le poids : par exemple, dans la chevre dont nous venons de parler, le rapport de la puissance Q au poids P est composée de celui de 1 à 10, & de celui de 1 à 4 : ainsi multipliant les antécédens de ces rapports les uns par les autres, & les conséquens aussi les uns par les autres, on aura $\frac{1}{40}$ pour le rapport composé, qui est celui de la puissance au poids, & qui fait voir que la puissance est la quarantieme partie du poids : car $\frac{1}{40}$ est la même chose que $\frac{120}{4800}$, qui est le rapport que nous avons trouvé.

Des Roues dentées.

Définitions.

1110. Lorsqu'une machine est composée de plusieurs roues, il faut que toutes les roues soient dentées, excepté la *premiere*, & que toutes les lanternes ou pignons le soient aussi, excepté

le *dernier*, qui doit être rond, afin que la corde qui enleve le poids, s'entortille à l'entour ; il faut aussi qu'il y ait à chaque extrêmité des pivots des axes, pour pouvoir être ajustés dans une espece d'affût, de maniere que la lanterne ou le pignon de l'axe de la premiere roue engraine dans les dents de la seconde, la lanterne ou le pignon de la deuxieme dans les dents de la troisieme, ainsi de suite jusqu'à la derniere. Cette machine, ainsi composée, est nommée *machine des roues dentées*, qui est propre pour élever de très-gros fardeaux, & d'autant plus gros & plus pesans que les roues seroient en plus grand nombre.

Analogie des Roues dentées.

1111. *Ayant nommé* f *le rayon de la premiere roue, à la circonférence de laquelle est appliquée la puissance*, a *le rayon de son pignon*, g *le rayon de la seconde roue*, b *celui de son pignon*, h *le rayon de la troisieme roue*, c *celui de son pignon*, k *le rayon de la quatrieme roue*, d *celui de son pignon*, l *le rayon de la cinquieme roue*, & e *celui de son pignon (qui n'est point denté), il faut faire voir que le rapport de la puissance* Q *au poids* P, *est comme le produit des rayons des aissieux au produit des rayons des roues.* Pl. XXXI. Figure 398.

Si la premiere roue étoit seule, & que la puissance enlevât par son moyen le poids P, qui devroit pour cela être suspendu au pignon ou au treuil de cette roue, l'on auroit $Q:P::a:f$; mais l'effet de la premiere roue, au lieu d'être employé à lever un poids, est employé à faire tourner la seconde par le moyen des dents de son pignon qui engraine dans les dents de la seconde roue ; d'où l'on voit que l'effet de la premiere roue est la cause qui fait agir la seconde, parce que l'effet des dents de son aissieu contre les dents de la seconde roue, est égal au poids qu'elle pourroit enlever. Il en est ainsi des autres. Or si l'on nomme l'effet de la premiere roue r, l'effet de la seconde f, celui de la troisieme t, & celui de la quatrieme u, l'on aura pour le premier rapport $q:r::a:f$, pour le second $r:f::b:g$, pour le troisieme $f:t::c:h$, pour le quatrieme $t:u::d:k$, enfin pour le cinquieme & dernier rapport, $u:p::e:l$.

Présentement si l'on multiplie ces cinq proportions terme par terme, c'est-à-dire les antécédens par les antécédens, & les conséquens par les conséquens, l'on aura cette proportion,

qrstu : *rstup* :: *abcde* : *fghkl*. Et si l'on divise les deux premiers termes par *rstu*, l'on aura Q : P :: *abcde* : *fghkl*; d'où l'on tire cette analogie pour toutes les machines composées des roues dentées : *Si une puissance soutient un poids à l'aide de plusieurs roues, la puissance est au poids comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues.*

q : *r* :: *a* : *f*
r : *s* :: *b* : *g*
s : *t* :: *c* : *h*
t : *u* :: *d* : *k*
u : *p* :: *e* : *l*

APPLICATION.

1112. Pour faire voir la force immense qu'on peut donner à une puissance, par le moyen des roues dentées, supposons que la force de la puissance soit de 50 livres, & que cette puissance soit appliquée à la premiere roue d'une machine composée de cinq roues de chacune 12 pouces de rayon, parce que nous les supposons égales, aussi-bien que les pignons qui seront, par exemple, d'un pouce de rayon. Cela posé, le rapport du rayon de chaque pignon au rayon de chaque roue, sera comme 1 est à 12 : ainsi le produit de tous les pignons sera 1, & celui de tous les rayons des roues sera 248832. Or si l'on veut sçavoir quelle est la pesanteur du poids qu'une puissance de 50 livres, que je suppose être la force d'un homme, pourroit enlever avec cette machine : je considere que selon ce qui vient d'être démontré, la puissance est au poids comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues, & que par conséquent le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues, comme la puissance est au poids ; ainsi pour trouver le poids, je dis : Si 1, produit des rayons des pignons, donne 248832 pour le produit des rayons des roues, que donnera la puissance de 50 livres pour le poids qu'elle seroit capable d'enlever ? l'on trouvera 12441600, qui est le nombre de livres qu'un homme peut enlever avec une force moyenne, aidée d'une machine composée de cinq roues dentées.

Du Cric.

1113. Le cric, dont l'usage est si fréquent dans l'Artillerie, fait encore voir combien les roues dentées augmentent la puissance, & pour en calculer la force, considérez la figure 397 qui représente à peu près les parties dont l'intérieur est com-

posé, qui est mis en mouvement par la manivelle ABC, où est appliquée la puissance; cette manivelle en tournant, fait tourner le petit pignon D, lequel étant engrainé dans la roue E, la fait aussi tourner. Au centre de cette roue, est un autre pignon F, qui fait monter le cric GH, pour enlever le fardeau. Présentement si l'on suppose que la manivelle AB (que nous considérons ici comme le rayon d'une roue), soit de 15 pouces, que le pignon D ait un pouce de rayon, la roue E, 12 pouces aussi de rayon, & le pignon F deux, l'on connoîtra le rapport de la puissance au poids qu'on peut enlever, en considérant le rapport du produit des rayons des pignons au produit des rayons des roues: ainsi le produit des pignons sera 2, & le produit des roues 180; ce qui fait voir que la puissance sera au poids, comme 2 est à 180, ou bien comme l'unité est à 90. Or si l'on suppose que la puissance est 50, multipliant 50 par 90, l'on aura 4500, qui est à peu près le poids qu'un homme peut enlever par le moyen d'un cric tel que celui que nous venons d'expliquer: & si au lieu de deux roues il y en avoit davantage, l'on voit qu'on peut avec le cric lever des fardeaux d'une pesanteur immense. Pl. XXX. *Figure* 397.

De la Vis sans fin, appliquée aux roues dentées.

1114. La vis sans fin est encore une machine propre à augmenter extrêmement la force de la puissance, surtout quand elle met en mouvement plusieurs roues dentées. Supposant donc qu'on a une machine composée d'une vis sans fin, & de trois roues, comme celle de la figure 399, pour sçavoir le rapport de la puissance Q au poids P, je considere que la puissance étant appliquée à une manivelle ou à un levier AB, fera tourner la vis, qui mettra en mouvement la premiere roue, à cause que les pas de la vis sont engrainés avec les dents de la premiere roue, dont les pignons qui s'engrainent avec les dents de la seconde roue, la fera tourner aussi, & le pignon de celle-ci la troisieme roue, au pignon de laquelle est attaché le poids. Pl. XXXI. *Figure* 399.

Présentement si l'on nomme *n* la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon le levier AC, *a* l'intervalle d'un pas de la vis, *f* l'effet des filets contre les dents de la roue, *g* le rayon de la premiere roue, *b* celui de son pignon, *h* le rayon

de la seconde roue, & d le rayon de son pignon, k le rayon de la troisieme roue, & c celui de son pignon, t l'effet de la premiere roue, & u l'effet de la seconde. Voici comme il faut raisonner : L'on sçait que la puissance qui est appliquée au levier d'une vis, est à l'effet de la vis, comme l'intervalle d'un des pas de la vis est à la circonférence du cercle que décrit la puissance, l'on aura donc cette proportion, $q : s :: a : n$, & l'effet de la premiere roue donnera encore $s : t :: b : g$, l'effet de la seconde $t : u :: d : h$, & celui de la troisieme, $u : p :: c : k$. Or multipliant ces quatre proportions, termes par termes, l'on aura $qstu : stup :: abcd : hgnk$, & divisant les deux premiers termes par stu, l'on aura $Q : P :: acdb : hgnk$; d'où l'on tire cette analogie : *Si une puissance enleve un poids à l'aide d'une vis & de plusieurs roues dentées, la puissance sera au poids comme le produit de l'intervalle d'un des pas de la vis, par les rayons des pignons des roues, est au produit de la circonférence qui décrit la puissance par les rayons des roues.*

$$
\begin{array}{ccccccc}
q & : & s & :: & a & : & n \\
s & : & t & :: & b & : & g \\
t & : & u & :: & d & : & h \\
u & : & p & :: & c & : & k \\
\end{array}
$$
$$qstu : stup :: acdb : hgnk$$

Application.

1115. Pour sçavoir quel est le poids qu'une puissance de 50 livres peut enlever par le moyen de la machine précédente, nous supposerons que le rayon CA du cercle que décrit la puissance est de $10\frac{1}{2}$ pouces; par conséquent la circonférence sera de 66 pouces : de plus qu'un des pas de la vis est de 2 pouces, que le rayon de la premiere roue est de 24 pouces, & celui de son pignon de 3, que le rayon de la seconde roue est de 20 pouces, & celui de son pignon de 2, enfin, que le rayon de la troisieme roue est de 18 pouces, & celui de son pignon d'un pouce & demi. Cela posé, si l'on multiplie les rayons des pignons les uns par les autres, l'on aura 9 au produit, qui étant multiplié par un des pas de la vis, qui est de 2 pouces, l'on aura 18 pour un des termes de la proportion ; & multipliant aussi les rayons des roues les unes par les autres, & ensuite le produit par la circonférence que décrira la puissance, l'on aura 570240 pour un autre terme de la proportion : ainsi la puissance sera au poids, comme 18 est à 570240, ou comme 1 est à 31680. L'on pourra donc dire comme 1 est à 31680, qui

eſt le rapport du produit des rayons des pignons par un pas de la vis au produit des rayons des roues par la circonférence décrite par la puiſſance : ainſi 50, qui eſt la force de la puiſſance, eſt au poids que cette puiſſance eſt capable d'enlever, l'on trouvera que ce poids eſt de 1584000 livres.

Remarque.

Si un auſſi grand poids que celui que nous venons de trouver peut être enlevé par la force moyenne d'un ſeul homme avec une vis à trois roues ſeulement, ce n'eſt pas ſans raiſon qu'*Archimede* diſoit, pour faire voir juſqu'à quel point on pouvoit augmenter la force de la puiſſance, que ſi on lui donnoit un point fixe pour appuyer ſa machine, il ne ſeroit pas embarraſſé d'enlever toute la terre, malgré l'immenſité de ſon poids. *Da punctum, & movebo.*

Machine composée d'une roue, & d'un plan incliné.

1116. Ayant un plan incliné GH, dont la hauteur eſt GI, & un poids P ſur ce plan, où il eſt retenu par une corde BP parallele à GH, dont un des bouts eſt attaché au treuil d'un tourniquet, qui eſt mis en mouvement par une puiſſance Q, appliquée à un des leviers AQ, AD ou AC, qui ſervent à faire tourner le treuil pour attirer le poids P vers le ſommet G; on demande quel eſt le rapport de la puiſſance au poids ? Pl. XXXI. *Figure* 401.

Ayant nommé GH, a; GI, b; le rayon du treuil, c; & la longueur d'un des leviers AC, AQ ou AD, d; & l'effort que fait la puiſſance qui ſeroit appliquée dans la direction PB pour ſoutenir le poids P, f; l'on aura par la propriété du plan incliné, $f : p :: b : a$, & par la propriété de la roue, la puiſſance Q ne ſoutenant que l'effort f de l'autre puiſſance q, l'on aura $Q : f :: c : d$. Or multipliant les termes de ces deux proportions, l'on aura $Q \times f : pf :: bc : ad$, & diviſant les deux premiers termes de cette proportion par f, il viendra $Q : P :: bc : ad$, qui fait voir que la puiſſance eſt au poids, comme le produit du rayon de l'aiſſieu par la hauteur du plan incliné eſt au produit du rayon de la roue ou de la longueur du levier par la longueur du plan incliné.

Application.

1117. Il arrive fort ſouvent que pour tirer des corps peſans

d'une cave, comme sont, par exemple, les muids de vin ou d'eau-de-vie, l'on se sert d'un tourniquet pour en faciliter le transport : ainsi si les marches de la cave sont dans un même plan, l'escalier pourroit être regardé comme un plan incliné. Si donc la hauteur de ce plan incliné est à sa longueur, comme 4 est à 6, & qu'ayant un tourniquet à l'entrée de l'escalier, le treuil soit, par exemple, de 6 pouces de rayon, & le levier de 36 pouces de longueur, depuis le centre du treuil jusqu'à l'endroit où est appliquée la puissance; & qu'on veuille sçavoir la pesanteur du corps qu'une puissance de 50 livres peut soutenir ou attirer à soi par le moyen du tourniquet, il faut commencer par multiplier le rayon du treuil, qui est de 6 pouces, par la hauteur du plan incliné, qui est de 4 pieds, ou qu'on peut prendre pour telle, le produit sera 24 pouces; & multipliant la longueur du levier de 36 pouces par 6 pieds, le produit sera 2592 : ainsi la puissance sera au poids qu'elle est capable de soutenir, comme 24 est à 2592, ou comme 1 est à 108 : ainsi pour trouver le poids, il n'y a qu'à dire : Si 1 donne 108, combien donneront 50 ? l'on trouvera 5400 livres pour le poids que l'on cherche.

De la Sonnette.

Figure 400. 1118. Presque toutes les machines composées augmentent la force de la puissance, excepté celle que l'on nomme communément *sonnette*, dont on se sert pour enfoncer des pilots, par le moyen d'un gros billot de bois, tel que A, que l'on nomme *mouton*. Ce mouton est attaché par deux mains de fer ou crampons B, suspendus à deux cordes qui passent sur des poulies G, & à ces cordes sont plusieurs bouts O N, qui sont tirés tout à la fois par des hommes qui levent le mouton vers G, & le laissent tomber tout d'un coup sur la tête du pilot C F que l'on veut enfoncer. Mais comme il arrive qu'à mesure que le pilot s'enfonce, le mouton tombe de plus haut, & acquiert par son accélération un plus grand degré de force; voici comme l'on pourra mesurer la force du mouton à chaque coup, & même sçavoir combien il faudra de coups pour enfoncer un pilot à refus de mouton.

Nous supposerons que le terrein dans lequel on veut enfoncer le pilot est homogene dans toutes ses parties, & qu'aussitôt que le bout du pilot est entré jusques un peu au dessus de la partie

partie que l'on a taillée en pointe, le terrein dans lequel on l'enfonce résiste toujours également, parce que l'on compte pour rien le frottement de la terre qui entoure la surface du pilot, qui se trouve de plus en plus couverte, à mesure que le pilot enfonce.

Cela posé, je suppose que le mouton A, après avoit été enlevé jusqu'au plus haut de la sonnette, se trouve éloigné de 3 pieds de la tête C du pilot, & que l'ayant laissé tomber, le pilot se soit enfoncé de 13 pouces, de sorte que la tête sera descendue de C en D. Or pour sçavoir de combien le pilot sera enfoncé au second coup, qui sera plus fort que le premier, parce que le mouton, au lieu de tomber de H en C, tombera de H en D; je considere que la force ou la quantité de mouvement d'un corps est le produit de sa masse par sa vîtesse, & qu'ainsi la force du corps A, en tombant de H en C, sera à la force du même corps en tombant de H en D, comme le produit de la pesanteur du corps A par la vîtesse acquise de H en C, est au produit de la pesanteur du même corps par la vîtesse acquise de H en D: mais nous sçavons que les vîtesses d'un corps qui tombe de différentes hauteurs, peuvent s'exprimer par les racines quarrées des espaces parcourus: ainsi nommant a la masse du corps A; b l'espace parcouru HC; & d l'espace parcouru HD, l'on aura $\sqrt{b}$ pour la vîtesse acquise de H en C, & $\sqrt{d}$ pour la vîtesse acquise de H en D: ainsi la force du corps A tombant en C & en D, sera comme $a\sqrt{b}$ est à $a\sqrt{d}$, ou bien comme $\sqrt{b}$ est à $\sqrt{d}$. Mais les effets étant comme les causes, il s'ensuit que l'enfoncement du pilot au premier coup sera à l'enfoncement du pilot au second coup, comme la racine quarrée de l'espace parcouru par le mouton au premier coup sera à la racine quarrée de l'espace parcourn au second coup. Or dans la supposition, l'espace parcouru dans le premier coup est de 3 pieds, ou autrement de 36 pouces, dont la racine sera 6; & comme le pilot aura été enfoncé de 13 pouces, l'espace HD sera de 49 pouces, dont la racine est 7. Je dis donc, pour trouver l'enfoncement du pilot au second coup, si la vîtesse 6 a donné 13 pour l'enfoncement du pilot au premier coup, combien donnera la vîtesse 7 pour l'enfoncement du pilot au second coup? l'on trouvera 15 & $\frac{1}{6}$, qui fait voir que le pilot sera enfoncé au second coup de 15 pouces 2 lignes, qui est la distance DE.

Pl. XXXI. Figure 400. Pour sçavoir combien il sera enfoncé au troisieme coup, je considere que l'espace H E est de 64 & $\frac{1}{4}$, dont la racine quarrée est 8, & je dis encore : Si la vîtesse 6 donne 13 pour l'enfoncement du pilot au premier coup, combien donnera 8 ? l'on trouvera 17 pouces & 4 lignes, & agissant toujours de même, l'on trouvera que l'enfoncement du quatrieme coup sera de 19 pouces 6 lignes, que celui du cinquieme sera de 21 pouces 8 lignes, & que celui du sixieme sera de 23 pouces 10 lignes : ainsi l'on aura pour l'enfoncement du pilot à chaque coup les six termes suivans, 13 pouces, 15 pouces, plus 2 lign. 17+4, 19+6, 21+8, 23+10, qui sont tous en progression arithmétique, puisqu'ils se surpassent de 2 pouces & de 2 lignes ; ils se surpasseroient même encore de quelques parties de point, auxquelles je n'ai pas eu égard.

L'on sera peut-être surpris de voir que les racines quarrées des espaces parcourus par le mouton, sont en progression arithmétique, de même que les quantités qui expriment l'enfoncement du pilot à chaque coup; mais cela ne peut arriver autrement, comme on le va voir.

Si l'on a une progression arithmétique $\div a.b.c.d.e.f$, dont chaque terme marque le tems pendant lequel un corps tombant de différentes hauteurs, a mis à parcourir différens espaces, & que ces espaces soient, par exemple, $g.h.i.k.l.m$, ces espaces seront dans la raison des quarrés des tems, c'est-à-dire comme aa, bb, cc, dd, ee, ff: or si l'on extrait la racine quarrée de l'une & l'autre de ces progressions, l'on aura $\div a.b.c.d.e.f$ pour les tems, & $\sqrt{g}, \sqrt{h}, \sqrt{i}, \sqrt{k}, \sqrt{l}, \sqrt{m}$, pour celles des espaces parcourus. Or si les tems a, b, c, d, e, f sont en progression arithmétique, les racines des espaces le seront aussi : ainsi il n'est plus étonnant que si les tems que le mouton met à tomber, sont en progression arithmétique, les racines quarrées des espaces, qui sont les vîtesses acquises, le soient aussi : mais les vîtesses acquises peuvent être regardées comme les causes de l'enfoncement du pilot à chaque coup ; & comme les effets sont proportionnels à leurs causes, les causes étant en proportion arithmétique, les effets le seront aussi ; ce qui fait que le pilot doit s'enfoncer plus au second coup qu'au premier, & plus au troisieme qu'au second, dans la raison d'une progression arithmétique.

L'on peut tirer de ce qu'on vient de dire, la maniere de

connoître combien il faut donner de coups ſur un pilot pour le faire entrer à refus de mouton : car on n'a qu'à conſidérer au premier coup de combien le pilot ſera enfoncé, & regarder cette quantité comme le premier terme d'une progreſſion arithmétique. Suppoſant donc que le mouton tombant de 3 pieds de hauteur, le pilot ſe ſoit enfoncé de 12 pouces, & ſuppoſant auſſi qu'au ſecond coup le pilot ſe ſoit enfoncé de 14 pouces, je regarde ce nombre comme le ſecond terme de la progreſſion, & comme la différence de ce terme-ci à l'autre eſt 2, je vois que le troiſieme terme ſera 16, que le quatrieme ſera 18, le cinquieme 20. Or ſi j'ai un pilot, par exemple, de 12 pieds de longueur, cette longueur exprimera la valeur de tous les termes de la progreſſion pris enſemble : ainſi j'ajoute les termes que je viens de trouver pour voir s'ils valent 144 pouces ; & comme il s'en faut beaucoup, je cherche encore quelque terme, comme, par exemple 22, 24 & 26, qui font avec les autres 152 pouces, qui ſurpaſſent la longueur du pilot de 8 pouces ; & comme ce ſont 8 termes qui m'ont donné cette quantité, je vois qu'il faut 8 coups pour enfoncer le pilot juſqu'au refus de mouton. Au reſte l'on trouvera ce ſujet traité encore plus exactement dans le premier volume de la ſeconde Partie de l'*Architecture Hydraulique*, page 188.

Application de la méchanique à la conſtruction des magaſins à poudre.

1119. De tous les édifices militaires, il n'y en a point qui ſoient d'une plus grande conſéquence que les magaſins à poudre, & qui demandent plus de précaution pour les bien conſtruire : car comme on les fait toujours voûtés, il faut ſçavoir quelles ſortes de voûtes conviennent le mieux, de la voûte en *plein ceintre*, de celle qui eſt *ſurbaiſſée*, ou de celle qui eſt en *tiers point*, pour être capable de réſiſter le plus à l'effort de la bombe, quand elle tombe deſſus : après cela, il faut ſçavoir proportionner l'épaiſſeur des pieds droits, qui ſoutiennent les voûtes au poids, à la pouſſée, & à la grandeur des mêmes voûtes.

L'opinion de la plûpart des Ingénieurs eſt partagée ſur la maniere de voûter les magaſins à poudre ; les uns prétendent que la voûte en plein ceintre eſt la meilleure de toutes, & les autres au contraire veulent que la voûte en tiers point ſoit

préférable à celle-ci. Ce qu'il y a de certain, c'est que la voûte en tiers point a moins de poussée que celle en plein ceintre, & celle en plein ceintre que celle qui est surbaissée ; ce que l'on peut démontrer même géométriquement, & sans entrer dans une grande théorie ; je vais faire voir comment la voûte en plein ceintre a plus de poussée que celle en tiers point.

Figure 402 & 403. Considérez la figure 402, qui est le profil d'un magasin à poudre, dont la voûte est en plein ceintre, & la figure 403, qui est un autre profil, dont la voûte est en tiers point : dans ces deux figures l'on a divisé en deux également les arcs ED & LD par des lignes tirées de leurs centres. Or si l'on considere la partie supérieure BAGC de la voûte comme un coin qui agit contre les pieds droits, & contre les autres parties de la voûte pour les écarter, l'on verra que plus l'angle ABC sera aigu, & plus le coin aura de force par la loi des méchaniques, ou bien si l'on regarde la ligne AB comme un plan incliné, l'on verra encore que plus il sera incliné, & plus le corps GAB qui tend à glisser dessus aura de force pour descendre, puisque la pesanteur relative sera moindre qu'elle ne le seroit, si le plan incliné approchoit plus d'être horizontal. Or dans la figure 403, si l'on regarde encore TQRS comme un coin, l'on verra que l'angle QSR étant obtus, le coin fera moins d'effort pour écarter les parties RZ & QN, que dans la figure 402 où l'angle du coin est droit; & si l'on considere de plus la ligne QP comme un plan incliné, l'on verra que l'étant beaucoup moins que le plan AB, la partie TQS n'aura pas tant de force pour descendre que la partie GAB; par conséquent tous les voussoirs qui composent la voûte en tiers point étant regardés comme des coins, ou comme des corps qui tendent à glisser successivement sur des plans inclinés, feront moins d'effort que ceux de la voûte en plein ceintre; d'où il s'ensuit que la voûte en plein ceintre a plus de poussée que la voûte en tiers point : & par un semblable raisonnement, on fera voir que la voûte surbaissée a plus de poussée que celle en plein ceintre.

Un autre défaut de la voûte en plein ceintre, est qu'elle oblige à faire le toît fort plat ; ce qui la rend moins capable de résister à la chûte des bombes, qui ne font point tant d'effort quand le plan sur lequel elles tombent est plus incliné, parce qu'alors elles ne font que rouler sans faire de dommage considérable ; & si l'on veut éviter ce défaut, au lieu de faire

le toît comme dans la figure 402, le faire comme dans la figure 404, c'est-à-dire plus roide, l'on est obligé de charger la voûte à l'endroit de la clef, d'une masse de maçonnerie qui oblige absolument de faire les pieds droits plus épais: d'ailleurs un avantage de la voûte en tiers point, c'est que si l'on veut faire un magasin qui ne soit pas fort élevé, l'on peut commencer la naissance de la voûte à 4 ou 5 pieds au dessus du rez-de-chaussée, & le magasin est assez élevé, au lieu que le faisant en plein ceintre, il faut que les pieds droits aient au moins 8 ou 9 pieds de hauteur; ce qui oblige à les faire plus épais: car il n'y a point de doute qu'à mesure qu'on les fait plus élevés, il ne faille leur donner plus d'épaisseur. Enfin je pourrois rapporter encore plusieurs raisons en faveur des voûtes en tiers point; mais je crois que ce que j'en ai dit suffit pour faire voir combien elles sont à préférer à celles qui sont en plein ceintre. *Figure 402 & 404.*

Quoiqu'il soit presque impossible de déterminer l'épaisseur que doit avoir la voûte d'un magasin à poudre pour être à l'épreuve de la bombe, puisque les bombes ne sont pas toutes d'égale pesanteur, & sont sujettes à tomber de différentes hauteurs, cela n'empêche point qu'on ne se soit déterminé à leur donner 3 pieds d'épaisseur à l'endroit des reins, & je crois que cette épaisseur sera suffisante, quand le toit ne sera point trop plat.

Comme il m'a paru qu'il convenoit de donner une regle pour déterminer l'angle que doit avoir le faîte du toit d'un magasin, afin qu'il ne soit ni trop obtus, ni trop aigu, voici comme je m'y prends.

Supposant qu'on veuille faire un magasin à poudre, dont la voûte soit en plein ceintre, je commence par déterminer la largeur du magasin, qui sera, par exemple, la ligne AC, qui doit servir de diametre au demi-cercle de la voûte; ensuite j'éleve sur le centre B la perpendiculaire BG, & je divise en deux également chaque quart de cercle AN & NC par les lignes BM & BE; je donne 3 pieds à chacune des lignes DE & LM, qui déterminent l'épaisseur des reins de la voûte, & puis du centre B je décris un demi-cercle à volonté, qui se trouve divisé en deux également par la perpendiculaire au point G, & dont le diametre est la ligne FI, je tire aussi les cordes FG & GI, & par les points E & M je fais passer les paralleles OH & HK aux cordes qui sont dans le demi-cercle, & ces paral- *Figure 404.*

leles me donnent le toit OHK, qui forme un angle droit en H, parce que l'angle H est égal à l'angle G : ainsi sans tâtonner par cette méthode, il se trouvera toujours que l'angle du faîte d'un magasin à poudre sera droit, & cet angle me paroît convenir mieux qu'un autre, parce qu'il tient un milieu entre l'angle aigu & l'angle obtus, qui conviennent moins que celui-ci : car l'angle obtus, comme je l'ai déja dit, rend le toit trop plat, & l'angle aigu charge trop la clef de la voûte par le grand vuide qu'il laisse au dessus de la clef, qu'on est obligé de remplir de maçonnerie.

Figure 403. Pour tracer la voûte en tiers point, je suppose que les points V & X marquent l'endroit où doit commencer la naissance de la voûte, je tire une ligne de V en X, laquelle je divise en quatre parties égales; & du point P comme centre, & de l'intervalle PV, je décris l'arc VY, & du point O & de l'intervalle OX, je décris l'arc XY, lequel forme avec le précédent l'intradosse VYX de la voûte : après cela je divise chacun de ces arcs en deux également, & je tire les lignes OR & PQ, & je donne à chacune des lignes AQ & BR 3 pieds & 3 pouces, & puis je divise la perpendiculaire LY en trois parties égales, & de l'extrêmité M de la premiere partie, je décris un demi-cercle KTD, & je tire, comme dans la figure précédente, les cordes KN, ND, & par les points Q & R je fais passer deux paralleles aux cordes qui forment le toît de la voûte, dont l'angle du faîte est encore droit.

Si j'ai donné aux lignes AQ & BR 3 pieds 3 pouces, c'est parce qu'elles sont au dessous des reins de la voûte; mais en suivant ce qui vient d'être dit, l'épaisseur des reins de la voûte se trouve dans leur plus foible avoir 3 pieds d'épaisseur : vous pouvez remarquer la différence de la maçonnerie qui se trouve au dessus de la clef de la voûte en tiers point, & celle qui est au dessus de la voûte en plein ceintre, c'est-à-dire que l'une est beaucoup moins chargée que l'autre; car il n'y a que 6 pieds de hauteur de maçonnerie au dessus de la voûte en tiers point, au lieu que dans celle en plein ceintre il y en a plus de 10 : c'est aussi la raison pour laquelle les pieds droits de cette voûte sont bien moins épais que ceux de celles en plein ceintre, parce que d'ailleurs ils sont aussi moins élevés.

Mais pour régler l'épaisseur des pieds droits, tant pour les voûtes en tiers point, que pour les voûtes en plein ceintre,

j'ai jugé à propos de rapporter ici une Table que j'ai calculée, pour proportionner précisément l'épaisseur des pieds droits des voûtes des magasins à poudre par rapport à la largeur dans œuvre qu'on peut leur donner, & à l'élévation des mêmes pieds droits, c'est-à-dire que j'ai cherché un juste équilibre entre leur résistance & l'effort des voûtes ; après quoi j'ai augmenté la poussée d'un quart de ce qu'elle est effectivement pour rendre les pieds droits capables de cette résistance au dessus de l'équilibre : j'ai fait abstraction des contreforts que l'on fait ordinairement pour soutenir les pieds droits, parce qu'en quelque façon on pourroit s'en passer ; mais comme il sembleroit que ce seroit vouloir changer ce qui se pratique ordinairement, je laisse à la discrétion de ceux qui auront la conduite de ces sortes d'ouvrages, d'en faire autant qu'ils le jugeront à propos, & de leur donner les dimensions qui leur conviendront le mieux : car quoiqu'il semble qu'après avoir donné aux pieds droits des épaisseurs suffisantes pour résister à la poussée des voûtes des magasins, il soit inutile d'y ajouter encore des contreforts, cela n'empêche pas qu'ils ne soient très-bien placés, puisqu'il convient même d'en faire aux murs qui n'ont point de poussée.

Il me reste à donner l'usage de la Table suivante, que j'ai calculée pour quatre sortes de magasins à poudre. Dans la premiere colonne l'on voit la largeur des magasins, qui auroient depuis 20 pieds jusqu'à 36 dans œuvre ; & la colonne qui est à côté, marque l'épaisseur qu'il faut donner aux pieds droits des voûtes en plein ceintre de ces magasins ; supposant d'ailleurs que tous les pieds droits de ces différens magasins aient toujours 9 pieds de hauteur depuis le rez-de-chaussée jusqu'à la naissance de la voûte. Ainsi voulant sçavoir quelle épaisseur il faut donner au pied droit d'un magasin, dont la largeur seroit de 30 pieds, & dont les pieds droits auroient 9 pieds de hauteur depuis la fondation jusqu'à la naissance de la voûte, je cherche dans la premiere colonne le nombre 30, & je vois qu'il correspond à 7 pieds 7 pouces, qui est l'épaisseur qu'il faudra leur donner, pour que leur résistance soit au dessus de l'équilibre avec la poussée de la voûte d'un magasin fait à l'épreuve de la bombe.

La seconde Table fait voir l'épaisseur qu'il faut donner aux pieds droits des voûtes des magasins à poudre, qui seroient

faits en tiers point, en supposant que la naissance de la voûte commence à 5 pieds au dessus du rez-de-chaussée, comme on le voit marqué au second profil; & cela pour toutes les largeurs marquées dans la premiere colonne : ainsi pour sçavoir l'épaisseur qu'il faut donner au pied droit d'une voûte en tiers point d'un magasin, dont la largeur dans œuvre seroit de 24 pieds, & dont les pieds droits en dedans ne sont élevés que de 5 pieds au dessus du rez-de-chaussée, il faut chercher dans la premiere colonne le nombre 24, & l'on verra qu'il correspond à 5 pieds 10 pouces, qui est l'épaisseur que l'on cherche.

La troisieme Table sert pour régler l'épaisseur qu'il faut donner aux pieds droits des magasins, qui ont un étage souterrein, & j'ai supposé, en la calculant, que la hauteur des pieds droit seroit de 12 pieds depuis la retraite au dessus de la fondation jusqu'à la naissance de la voûte qui doit être en tiers point.

Enfin la quatrieme Table a été calculée pour les pieds droits des magasins à poudre, qui auroient un étage pratiqué dans la voûte au dessus de celui du rez-de-chaussée, & la hauteur des pieds droits a été supposée de 9 pieds pour tous les magasins, dont la largeur auroit depuis 20 jusqu'à 36 pieds dans œuvre, & dont les voûtes seroient en tiers point.

Le principe qui m'a servi à calculer cette Table, est une suite d'un des plus beaux problêmes d'architecture, que peu de personnes sçavent, non pas même les plus fameux Architectes. Ce problême est de sçavoir donner au pied droit d'une voûte une épaisseur qui met la poussée de la voûte en équilibre avec la résistance des pieds droits; ou, ce qui a encore rapport au même, sçavoir quelle épaisseur il faut donner aux culées des ponts, pour soutenir la poussée des arches. Le P. *Derand* dans son Traité de la coupe des Pierres, M. *Blondel* dans son Cours d'Architecture, & plusieurs autres, ont prétendu donner des regles là-dessus; mais leur principe est faux, en ce qu'ils n'ont point d'égard à la hauteur des pieds droits, ni à l'épaisseur de la voûte. M. de la *Hire* en a donné une parfaite solution dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1712. J'aurois pu rapporter son Mémoire, & en expliquer les endroits qui m'ont paru obscurs, mais je me suis contenté de construire la Table que je rapporte ici, & que l'on trouvera expliquée à fonds dans la Science des Ingénieurs.

TABLE

TABLE

Pour régler l'épaiſſeur qu'il faut donner aux pieds droits des voûtes des magaſins à poudre.

Largeur des Magaſins à poudre.	Epaiſſeur des pieds droits des voûtes en plein ceintre pour les magaſins à un étage.			Epaiſſeur des pieds droits des voûtes en tiers point pour les magaſins à un étage.			Epaiſſeur des pieds droits des voûtes pour les Magaſins qui ont un étage ſouterrein.			Epaiſſeur des pieds droits pour les voûtes des magaſins qui ont un étage au deſſus du rez-de-chauſſée.		
pieds.	*pie.*	*pou.*	*lig.*	*pie.*	*pou.*	*lig.*	*pie.*	*pou.*	*lig.*	*pieds*	*pou.*	*lig.*
20	5	10	0	5	2	0	7	0	0	5	5	6
21	5	11	8	5	3	0	7	2	5	5	8	6
22	6	2	2	5	5	6	7	4	10	5	10	6
23	6	4	6	5	7	4	7	7	3	6	0	10
24	6	6	0	5	10	0	7	9	9	6	2	6
25	6	8	3	6	0	4	8	0	1	6	4	6
26	6	10	0	6	2	0	8	2	6	6	5	11
27	6	11	9	6	5	0	8	4	10	6	8	0
28	7	2	6	6	8	0	8	7	3	6	10	3
29	7	4	9	6	10	6	8	9	8	7	0	0
30	7	7	0	7	1	0	9	0	1	7	2	9
31	7	9	4	7	2	4	9	2	6	7	5	6
32	7	11	10	7	4	9	9	5	11	7	8	0
33	8	2	8	7	7	0	9	8	4	7	10	6
34	8	3	11	7	9	4	9	10	9	8	2	0
35	8	5	9	7	11	0	10	1	2	8	4	2
36	8	8	0	8	0	0	10	3	7	8	6	0

Après avoir parlé des magaſins à poudre, je crois qu'on verra avec plaiſir de quelle maniere ſe fait le choc des bombes qui tombent ſur leurs voûtes, afin qu'on ſente la différence qu'il y a de conſidérer les choſes comme elles nous paroiſſent, ou telles qu'elles ſont en elles-mêmes, & que les Mathématiques donnent ſur ce ſujet des connoiſſances que la pratique des plus habiles Bombardiers ne peut appercevoir.

Application des principes de la méchanique au jet des bombes.

1120. Nous avons fait voir (art. 1118) que pour trouver la force avec laquelle une bombe tomboit ſur un plan, il falloit multiplier ſa peſanteur par la racine quarrée de la hauteur où

elle s'étoit élevée, & nous avons agi comme si la bombe tomboit selon une direction perpendiculaire à l'horizon, & comme si le plan qu'elle choquoit étoit de niveau avec la batterie. Mais comme les bombes ne tombent que rarement par des directions perpendiculaires aux plans qu'elles rencontrent, & que le plus souvent elles tombent sur des surfaces qui sont plus élevées que la batterie, le problême dont je viens de parler, n'est pas absolument juste, parce qu'on y fait abstraction des deux circonstances précédentes; & si on ne les a pas fait entrer, c'est qu'on n'étoit pas encore prévenu du principe de méchanique expliqué ci-devant. Mais comme il ne reste plus rien à desirer à ce sujet, voici comme il faut raisonner.

Si la ligne AB marque l'élévation du mortier sur le plan horizontal AC, & que la parabole AHD ait été décrite par la bombe, la ligne AB qui va rencontrer l'axe prolongé de la parabole, sera la tangente de cette courbe menée du point A, & la ligne BD sera une autre tangente menée du point D: mais quand un corps est jetté par une direction qui n'est pas perpendiculaire à l'horizon, la direction selon laquelle ce corps choque un plan, est marquée par la tangente menée par le point de la parabole, où le corps rencontre le plan: ainsi la bombe qui aura décrit la parabole AHD, choquera le plan AC, selon la direction BD; mais comme cette ligne est oblique au plan AC, si la force de la bombe est exprimée par la ligne FD, elle ne choquera pas le plan avec toute la force FD: car si l'on abaisse FE perpendiculaire sur AC, & qu'on fasse le parallélogramme EG, la force FD sera égale aux forces FG & FE (art. 1039) agissantes ensemble; mais la force FG parallele à l'horizon, n'agit point du tout sur le plan AC: il n'y a donc que la force exprimée par FE, qui choque le plan; ce qui fait voir que le choc de la bombe, selon la direction BD, est au choc de la même bombe, selon la direction perpendiculaire BI, comme FE est à FD, ou comme BI est à BD, c'est-à-dire comme la soutangente est à la tangente, ou bien comme la tangente de l'angle de l'élévation du mortier est à la sécante du même angle, ou encore comme le sinus de l'angle de l'élévation est au sinus total: ainsi supposant que l'angle BAI soit de 50 degrés, l'on peut dire que le choc de la bombe tombant, selon la direction perpendiculaire BI, est au choc par la direction BD, comme 100000 est à 76604.

Pl. XXXII. Figure 404.

A ne considérer que le choc des bombes qui tombent sur un plan horizontal, il semble que ce que l'on vient de dire ne soit pas d'une grande utilité, parce que les bombes que l'on jette dans les ouvrages, soit de la part des Assiégés ou des Assiégeans, font toujours beaucoup plus d'effet par leurs éclats, quand elles crevent, que par le poids de leur chûte; & si le poids avoit lieu dans ce cas-ci, ce ne seroit qu'à l'occasion des souterreins que l'on pratique dans les Places sous les remparts pour les différens usages auxquels ils sont propres: mais comme le choc d'une bombe mérite plus d'attention, lorsqu'elle tombe sur un édifice que les Assiégeans ont intérêt de ruiner, comme un magasin à poudre, dont il s'agit de percer la voûte, qui est un plan incliné à l'horizon, c'est particuliérement la chûte des bombes dans ce cas-ci qu'il nous faut examiner.

Si l'on a un mortier au point A pour jetter une bombe sur le plan incliné KL, & qu'on veuille sçavoir quel est le choc de la bombe, qui après avoir décrit la parabole AHD, viendroit tomber à un point D du plan incliné, je considere que la bombe frappant le point D, agit selon sa direction BD, qui est une tangente menée par le point D de la parabole. Or si l'on prend la ligne FD pour exprimer la force de la bombe, lorsqu'elle est prête à tomber sur le plan incliné, cette force étant oblique au plan, n'exprimera pas la force avec laquelle la bombe choquera ce plan, mais seulement la force de la bombe en elle-même: & si du point F l'on mene la ligne FE perpendiculaire sur KL, elle exprimera la force avec laquelle la bombe choquera le plan incliné: car faisant le parallélogramme GE, l'on aura les côtés FE & FG, qui exprimeront deux forces, lesquelles agissant ensemble, seront égales à la seule FD; mais la force FG étant parallele au plan KL, n'agit point du tout sur ce plan. Il n'y a donc que la ligne FE qui exprime le choc de la bombe: ainsi l'on peut dire que le choc d'une bombe qui tombe obliquement sur un plan incliné, est au choc de la direction perpendiculaire, comme FE est à FD, ou comme le sinus de l'angle FDE est au sinus total, étant tombée de la même hauteur. *Figure* 405.

Si l'on vouloit sçavoir quel est ce rapport, il faudroit chercher l'angle FDE, que l'on trouvera en connoissant la valeur de l'angle KDC, formé par l'horizon & le plan incliné, de

plus l'angle d'inclinaison BAD du mortier, qui est égal à BDA : ainsi supposant l'angle BDA de 50 degrés, & l'angle KCD de 70; si on les ajoute ensemble, l'on aura 120 degrés, qui étant soustraits de deux droits, la différence sera 60 degrés pour la valeur de l'angle FDE, dont le sinus est 86602, par conséquent le rapport du choc de la bombe, selon la direction perpendiculaire, est à celle, selon la direction oblique FD, comme 100000 est à 86602.

Tout le monde croit (& l'on a raison dans un sens) que plus les bombes tombent de haut, & plus le choc sur le plan qu'elles rencontrent est violent. Cependant ceci n'est vrai que quand le plan que la bombe rencontre est de niveau avec la batterie, parce que tombant de fort haut, elle décrit sur la fin une ligne courbe, qui approche fort de la verticale; mais quand le plan est incliné à l'horizon, la chûte par la verticale même est celle qui choque le plan incliné avec moins de violence que par toutes les autres directions possibles, qui seroient entre l'horizontale & la verticale, si les bombes tombent d'une hauteur égale; & ce n'est que quand la tangente menée au point de la parabole qui rencontre le plan incliné, est perpendiculaire à ce plan même, que la bombe choque avec toute sa force absolue. Or pour faire ensorte qu'une bombe tombe sur un plan incliné par une direction perpendiculaire, il faut connoître l'angle d'inclinaison que forme le plan avec l'horizon, & pointer le mortier sous un angle qui soit égal au complément de celui du plan incliné.

Figure 406. Par exemple, si sur le plan incliné KL, on éleve la perpendiculaire BD au point D, qui aille rencontrer la perpendiculaire BE, élevée dans le milieu de l'amplitude AD de la parabole, & qu'on tire la ligne AB, l'angle BAD sera celui qu'il faut donner au mortier pour chasser la bombe au point D; mais cette angle est égal à l'angle BDE, lequel est complément de l'angle KDC, puisque BDK est droit: donc l'angle BAE, complément de l'angle d'inclinaison, est celui qu'il faut donner au mortier, pour que la bombe choque le plan incliné par une direction perpendiculaire au même plan.

Par cette théorie l'on pourroit déterminer quelle est la charge, ou si l'on veut, quels sont les degrés de force que doit avoir un mortier, & l'angle qu'il lui faut donner pour chasser une bombe sur un plan incliné, ensorte que la bombe choque

ce plan avec toute la force qu'il est possible ; démontrer même que lorsque les racines quarrées des différentes hauteurs d'où une bombe tombera sur un plan incliné, seront réciproquement proportionnelles aux sinus des angles d'incidence formés par les différentes directions des bombes, le choc sera toujours égal, & une quantité d'autres choses, qui à la vérité sont plus propres à exercer l'esprit, qu'à être mises en pratique. C'est pourquoi je ne parlerai plus que de deux cas qui me restent à expliquer ; sçavoir quel est le choc des bombes qui seroient tirées d'un lieu plus bas ou plus élevé que le plan incliné qu'elle doit rencontrer : & comme sçachant un de ces cas, il est aisé de concevoir l'autre, voici celui qui regarde le plan incliné plus élevé que la batterie.

Si par les regles du jet des bombes l'on a trouvé l'angle BAI pour donner au mortier une élévation convenable, afin de jetter une bombe au point D d'un plan incliné KL, plus élevé que l'horizon AP, l'on connoîtra l'amplitude AP de la parabole AHP, & par conséquent son axe HI ; & avant cela on aura dû sçavoir l'élévation DQ du point D sur l'horizon AP : mais si la bombe au lieu de tomber en P, tombe en D, menant DO parallele à PA, la vîtesse de la bombe sera exprimée par la racine quarrée de HN. Or si l'on prend la ligne FD pour exprimer cette force, & que l'on tire la ligne FE perpendiculaire au plan KL, le choc de la bombe au point D sera exprimé par la ligne FE, & non pas par la ligne FD, comme on vient de le voir. Or le rapport du choc perpendiculaire au choc oblique étant comme FD est à FE, ou comme le sinus total est au sinus de l'angle FDE, si l'on veut avoir ce sinus pour connoître en nombre le rapport de la ligne FD à la ligne FE, il faut chercher la valeur de l'angle MON, formé par l'ordonnée ON & la tangente OM, qui est l'angle qu'il auroit fallu donner au mortier, si la bombe avoit été tirée de l'endroit O, de niveau avec le point D. Pour le trouver, considérez que l'on connoît l'abscisse HN, qui est la différence de HI à HD, & que par conséquent on connoîtra aussi la soutangente MN, qui est un des côtés du triangle rectangle MNO ; & comme pour trouver l'angle que nous cherchons, il nous faut encore le côté ON, pour le trouver, l'on dira : Comme l'abscisse HI est à l'abscisse HN, ainsi le quarré de l'ordonnée AI est au quarré de l'ordonnée ON, que l'on trou-

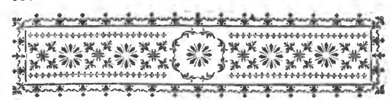
vera par la regle de proportion, dont extrayant la racine quarrée, l'on aura le côté ON, qui donnera avec le côté MN l'angle MON ou MDN son égal; & si l'on ajoute à cet angle la valeur de l'angle EDC, formé par le plan incliné & l'horizon, & que l'on ôte la somme de ces deux angles de la valeur de deux droits, l'on aura pour la différence l'angle FDE, dont le sinus servira à déterminer le choc de la bombe au point D, par rapport au sinus total qui exprime la force absolue.

Figure 408 & 409. L'on peut aussi tirer de tout ceci des regles pour déterminer la force d'un boulet de canon, qui choqueroit une surface, tiré des batteries différemment éloignées de cette surface : par exemple, si l'on a une surface verticale AB, & que du point C l'on tire un boulet, ensorte que l'ame de la piece soit pointée selon la direction CD perpendiculaire à cette surface, le boulet, au lieu de frapper au point D, frappera au point G, plus bas que le point D, parce que sa pesanteur lui fera décrire la parabole CPG, & le choc du boulet se fera selon la direction de la ligne IG tangente à la parabole au point G : ainsi ce sera la ligne IK perpendiculaire à la surface qui exprimera le choc du boulet, & non pas la ligne IG, diagonale du parallélogramme KL. Or si le même boulet, au lieu d'être chassé du point C, est chassé du point E, avec la même force, la distance EF étant plus grande que CA, choquera la surface au point H avec moins de force qu'il ne la choque au point G; ce n'est pas que cette plus grande distance lui ait rien fait perdre de son degré de mouvement (si l'on compte pour rien la résistance de l'air); mais c'est que la parabole E*q*H étant plus grande que CPG, le point H où le boulet aura choqué la surface, sera bien plus éloigné de F que le point G ne l'est de D : par conséquent la tangente MH, que l'on menera à la parabole par le point H, sera plus incliné à la surface AB, que la tangente IG ne l'est à la même surface. Or faisant MH égal à IG, si l'on mene la ligne MN perpendiculaire à la surface AB, elle sera dans la même raison avec la perpendiculaire IK, comme le choc du boulet tiré de l'endroit E sera à celui du boulet tiré de l'endroit C, ou bien comme le sinus de l'angle MHN sera au sinus de l'angle IGK; d'où il s'ensuit que quand on bat avec le canon une surface de fort loin, ce n'est pas que le boulet ait rien perdu de sa force, qui fait qu'il ne choque pas la surface avec autant de violence, que s'il

avoit été tiré de plus près, comme bien des gens le croient; mais au contraire c'eſt que ne frappant la ſurface que par une direction fort oblique, il n'agit pas avec autant d'effort, que s'il la frappoit par une autre direction qui approchât plus d'être perpendiculaire : car ſi un boulet en ſortant de la piece ne rencontroit pas des corps à qui il communique du mouvement qu'il a reçu de l'impulſion de la poudre, que l'air ne lui fît aucun empêchement, & que la peſanteur du boulet ne le fît pas tendre vers le centre de la terre, en un mot, qu'il pût toujours aller en ligne droite, ſa force ſeroit toujours la même, à quelque diſtance qu'il fût porté, puiſqu'il conſerveroit toujours le mouvement qu'il a reçu, s'il n'en perdoit à meſure qu'il en communique aux corps qu'il rencontre, n'y ayant point de raiſon que cela puiſſe être autrement.

Fin du Quinzieme Livre.





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE SEIZIEME.

De l'Hydroſtatique.

Nous allons traiter dans le Livre ſuivant des propriétés des fluides conſidérés par rapport à l'équilibre ; & c'eſt ce que l'on entend par le mot Hydroſtatique. *Cette partie, comme l'on voit, eſt une ſuite de la méchanique, & peut être regardée comme la plus importante. Il ſeroit à ſouhaiter qu'on pût établir une théorie auſſi ſimple ſur les fluides que ſur les corps ſolides que nous avons conſidérés dans le Livre précédent. Mais on voit bientôt qu'il n'eſt pas également facile de traiter cette partie comme la précédente, quoique ce ſoit la même peſanteur qui agiſſe ſur les corps & les fluides pour les faire deſcendre au centre de la terre. Il n'y a, pour ainſi dire, que ce phénomene qui ſoit commun aux uns & aux autres, auquel on peut joindre celui de la force d'inertie, qui eſt toujours proportionnelle aux maſſes. Il ſemble que plus les parties ſujettes aux mathématiques deviennent intéreſſantes, plus elles deviennent obſcures & compliquées. Dans la ſtatique, la ſeule peſanteur des corps reconnue comme une force conſtante, quelle que ſoit la cauſe dont elle provient, a ſuffi pour démontrer géométriquement les propriétés des machines, & le rapport néceſſaire entre tant de forces qu'on voudra, dont les directions étoient déterminées, abſtraction faite des frottemens. La même peſanteur nous a pareillement*

lement conduit à la découverte des courbes que les projectiles décrivent, quelle que soit l'intensité de cette force. Une seule expérience a fixé parmi toutes les courbes possibles celle qu'ils décrivent réellement en conséquence de l'action de la pesanteur auprès de notre globe. Il n'en est pas de même dans l'hydrostatique : la pesanteur seule ne peut nous faire connoître tout ce qui a rapport au choc des fluides à la maniere dont ils produisent l'équilibre entr'eux ou avec les corps solides. Une théorie complette des fluides demanderoit que l'on connût au moins quel est le principe général de la fluidité, & ensuite l'essence des parties de chacun en particulier : mais la nature ne nous laisse pas approcher de si près de ses secrets. La propriété commune à tous les fluides de se mettre de niveau, & de presser également en tous sens, est certainement une suite du principe général de la fluidité ; aussi doit-elle être regardée comme le premier principe de l'hydrostatique ; & c'est delà qu'il faut partir pour découvrir, par la voie la plus naturelle, les autres propriétés des fluides, relativement à l'équilibre : car il est aisé de voir que cette même propriété ne donne rien à connoître sur la figure des parties élémentaires de chacun en particulier. Lorsqu'on aura déduit de cette propriété tout ce que l'analyse peut nous fournir de conséquences, il faut avoir recours aux expériences sur chaque fluide pour connoître ce qui les différencie les uns des autres, & leurs pesanteurs spécifiques. Il y a en général trois parties que nous devons considérer dans l'hydrostatique, 1°. l'équilibre d'une liqueur homogene, ensuite celui des fluides étérogenes, & enfin celui des solides avec les mêmes fluides. Il seroit inutile d'entrer ici dans le détail des avantages qu'on peut retirer de cette théorie. On sera plus en état de les reconnoître lorsqu'on aura étudié ce Traité. Il n'est pas moins essentiel d'examiner la percussion des fluides, les loix de leurs chocs contre les solides, à proportion des vitesses & des masses, ou densités. Quoique l'on ait fait usage des fluides pour se procurer une infinité de commodités & d'avantages, sans connoître à fonds tout ce que l'on a découvert depuis environ un siecle & demi, il ne s'ensuit pas qu'il soit inutile de multiplier continuellement ses recherches sur cette partie. Plus on aura d'expériences bien analysées, plus on aura des vues intéressantes pour les Arts & le bien public qui leur est attaché, plus on sera à portée de connoître les défauts des machines qui ont été exécutées en ce genre, & d'y remédier. Comme nous ne donnons ici que les élémens de l'hydrostatique & de l'hydraulique, on pourra recourir

Gggg

à ce que nous avons donné ſur cette matiere dans le premier volume de l'Architecture Hydraulique ; & ceux qui auront les élémens ſuffiſans pour pouſſer plus loin leurs recherches, ne pourront mieux faire que d'étudier l'Hydraudinamique de MM. Bernouilli *&* d'Alembert.

CHAPITRE PREMIER.

De l'équilibre & du mouvement des liqueurs.

DÉFINITION I.

1121. ON appelle *fluides* les corps dont les parties ſe diviſent & cedent au moindre effort, & ſe réuniſſent enſuite avec la même facilité. Par exemple, l'*air*, la *flamme*, l'*eau*, le *mercure*, & les autres liqueurs ſont des fluides.

REMARQUE I.

1122. Il faut bien remarquer que tout liquide eſt fluide, mais le réciproque n'eſt pas vrai. Pour en ſentir la différence, il faut ſçavoir que l'on appelle *liquide* tout fluide dont la ſurface ſe met de niveau dans le vaſe qui le contient. Or il eſt viſible que cette propriété ne convient pas à la flamme. On entend par une ſurface de niveau celle dont tous les points ſont à égale diſtance du centre de la terre. Il faut encore bien remarquer que parmi les fluides il y en a qui ont du reſſort, & d'autres qui n'en ont pas. Par exemple, on ſçait que l'air ſe dilate & ſe comprime, enſorte que la compreſſion eſt plus plus grande à proportion des poids, au lieu que juſqu'ici on n'a pu parvenir à réduire une certaine quantité d'eau à un moindre volume; ce qui ſeroit pourtant poſſible ſi l'eau avoit une force de reſſort.

REMARQUE II.

1123. La plûpart des Auteurs qui ont écrit ſur la nature des fluides font conſiſter l'eſſence de la fluidité dans un mouvement continuel & réciproque de toutes les parties du fluide dans toutes les directions poſſibles. Ce mouvement leur paroît néceſſaire pour expliquer la diſſolution de certains corps plongés dans un fluide, dont toutes les parties ſont enſuite empregnées du corps qui a été mis en diſſolution. Je ne ſçais pas ſi ce mouvement continuel ne peut pas être regardé comme

une supposition de convenance, même en admettant la matiere subtile de M. *Descartes*, qui les traverse continuellement : car il faudroit, ce me semble, avoir démontré que cette matiere subtile ne peut ainsi passer par les milieux des fluides sans les mettre en mouvement; ce qui est précisément l'état de la question. D'ailleurs il me paroît que pour expliquer d'une maniere aussi satisfaisante les mêmes effets, on n'a besoin que d'une tendance au mouvement, commune à toutes les parties soumises au poids de l'atmosphere. Quant aux différentes dissolutions, ne peuvent-elles pas s'expliquer aussi par la différence des parties de chaque fluide en particulier ? Au reste ce même systême, qui n'est pas nouveau, pourroit nous mener à des discussions trop longues & étrangeres à notre objet. Il nous suffit d'avoir expliqué ici ce que nous entendons par *fluide*, sans vouloir définir la nature de toutes les parties de chaque fluide en particulier, ce qui a plus de rapport à la chymie qu'à l'hydraulique ou l'hydrostatique.

DÉFINITION II.

1124. On appelle *pesanteur spécifique* de deux ou de plusieurs fluides ou corps en général, le poids de chacun de ces corps mesurés sous un même volume. Ainsi si un corps pese 3 livres le pouce cube, & un autre deux livres le pouce cube, les pesanteurs spécifiques de ces corps sont comme 3 à 2.

Quand les volumes sont inégaux, il faut pour connoître les pesanteurs spécifiques les réduire à un même volume : Par exemple, si un corps pese 12 livres sous un volume de 3 pouces cubes, & un autre 16 livres sous un volume de deux pouces; pour avoir les pesanteurs spécifiques de ces mêmes corps, il faudra chercher le poids d'un pouce cube de chacun ; le premier donnera 4 livres le pouce cube, & le second 8 : mais ces nombres sont ceux qui viennent en divisant les poids par les volumes. On peut donc dire en général que les pesanteurs spécifiques de plusieurs corps sont comme les poids divisés par les volumes, ou en raison composée de la raison directe des poids & de la raison inverse des volumes; ce qu'il est fort aisé de reconnoître : car il est évident que plus un corps aura de poids sous un même volume, plus sa pesanteur sera grande, & plus il aura de volume pour le même poids, moins il aura de pesanteur spécifique.

III.

1125. Le plus ou le moins de poids sous un même volume s'appelle *densité* : ainsi l'on peut dire en général que les densités sont comme les pesanteurs spécifiques. Pour épargner de longs raisonnemens sur les rapports des densités des corps ou fluides, nous ferons le poids du premier corps P, son volume V & sa densité D ; pareillement nous ferons p le poids du second corps ; v son volume, & d sa densité : on aura $D : d :: \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$: donc $D : d :: Pv : pV$; d'où l'on tire $DpV = dPv$: donc si l'on suppose que les densités soient égales entr'elles, on aura $pV = Pv$. Donc $p : P :: v : V$, c'est-à-dire que *les poids sont proportionnels aux volumes*.

1126. Si l'on suppose les poids égaux ; ou, ce qui est la même chose, si les masses sont égales, on aura $DV = dv$: donc $D : d :: v : V$, c'est-à-dire que *les densités sont dans la raison inverse des volumes, ou réciproquement les volumes dans la raison inverse des densités*. On déduit encore de la formule $DpV = dPv$; $V : v :: Pd : pD$, c'est-à-dire que *les volumes de deux corps sont dans la raison composée de la directe des poids & de l'inverse des densités* ; ce qui est bien évident, puisque plus les poids seront grands, plus il faudra de volume ; & que plus les densités seront grandes, moins le volume sera considérable.

1127. On peut aussi conclure de la même formule que $p : P :: dv : DV$, c'est-à-dire que *les poids sont en raison composée des directes des densités & des volumes* ; ce qui est encore bien évident, puisque les poids croissent à proportion des volumes & de la masse comprise sous chaque volume. On déduiroit encore un grand nombre de proportions de cette égalité ; mais il suffit de la connoître pour y avoir recours au besoin.

IV.

1128. Les fluides peuvent être *élastiques* ou non *élastiques*. Un fluide est élastique, lorsqu'on peut réduire la même masse à un moindre volume par la compression, & que le corps remplit toujours le même volume, après que la compression a cessée. De tous les fluides, nous ne connoissons que l'air qui ait cette propriété, au moins n'est-elle pas sensible dans les autres.

V.

1129. On dit que la ſurface d'un fluide eſt de *niveau*, lorſque tous les points de cette ſurface ſont à égale diſtance du centre de la terre.

PROPOSITION I.

Théoreme.

1130. *Si on verſe une liqueur dans un vaſe, ſa ſurface ſera de niveau, & toutes ſes parties en équilibre.*

Démonstration.

Si quelque partie du fluide étoit plus élevée que les autres, comme d'ailleurs il n'y a rien qui l'empêche de gliſſer ſur les autres, elle cédera néceſſairement à l'effort de ſa peſanteur qui la ſollicite à deſcendre vers le centre de la terre; d'où il ſuit évidemment que la ſurface du fluide ſera de niveau, parce que l'on feroit le même raiſonnement pour toutes les parties de la ſurface du même fluide. Donc 1°. &c. 2°. Je dis que toutes les parties ſont en équilibre. Pour cela, concevons le fluide partagé en une infinité de tranches verticales d'un même diametre, & faiſons attention que toutes ces colonnes ſe contrebalancent mutuellement, puiſque chacune doit ſoutenir le poids de tout le fluide environnant : car ſi l'on ſuppoſe que l'une de ces colonnes fût plus foible que l'effort des autres qui l'environnent, le poids de ces mêmes colonnes l'obligeroit de s'élever pour céder à leur impreſſion, juſqu'à ce que toutes les autres fuſſent réunies; mais n'étant plus ſoutenue par ces mêmes colonnes, elle ſe diſtribueroit uniformément ſur toute la ſurface, en ajoutant des poids égaux à chaque colonne en particulier, & il y auroit alors équilibre; mais comme il y a toujours même maſſe de fluide, & que d'ailleurs le vaſe n'a pas changé de forme; il s'enſuit que cette colonne eſt remplacée par une autre qui lui eſt parfaitement égale, & qui fait équilibre avec les autres: donc elle-même étoit auſſi en équilibre avec les colonnes environnantes. Et comme on démontrera la même choſe de toutes les colonnes collatérales, il s'enſuit que toutes les parties ſont en équilibre.

COROLLAIRE I.

Figure 411. 1131. Il suit delà que quelle que soit la figure du vase qui contient une liqueur, sa surface sera toujours de niveau, & toutes ses parties en équilibre. De plus, comme l'effort de toutes les colonnes verticales est égal, il s'ensuit que la pression de toutes ces colonnes sur le fond du vase est égale au produit de la même base, par la hauteur de la plus grande colonne verticale. Pour s'en convaincre, imaginons un vase composé de deux cylindres ABCD, EFGH unis ensemble, & que l'on a rempli d'eau jusqu'à la hauteur GH; il est évident que toutes les colonnes, comme LM qui répondent aux côtés AE, FD, sont dans un effort continuel contre les mêmes côtés pour s'élever jusqu'au niveau GH de la liqueur: car la colonne IK étant plus grande que LM, fait effort contre cette liqueur qui cherche à s'échapper par le côté FD; & cet effort est égal à celui que feroit la colonne IN sur la base du cylindre EGHF, s'il étoit séparé de l'autre ABCD.

COROLLAIRE II.

Figure 412. 1132. De même si l'on a un vase de figure conique, & dont les parois soient inclinés à l'horizon, comme les lignes BE, CF, & qu'on remplisse ce vase de liqueur, la pression du fluide sur la base EF sera égale à celle du poids d'un fluide de même pesanteur spécifique qui auroit même base, & dont le volume seroit égal au solide fait sur cette base, & la hauteur EQ: car dans le vase EBADCF, il y a autant de colonnes qu'il y a de points dans la base; de plus, chaque colonne presse cette base avec une force égale à celle de la colonne GH: donc la somme des pressions sur la base est égale au produit de la même base par la hauteur GH.

1133. L'expérience a fait voir aussi que telle direction qu'on puisse donner à l'eau que l'on fait sortir d'un vase par des trous pratiqués sur ses côtés, la force est toujours la même pour des trous horizontaux & verticaux, pourvu que la hauteur du niveau de l'eau au dessus de ces trous soit égale.

COROLLAIRE III.

Figure 411. 1134. Il suit encore delà que l'on peut multiplier considérablement les forces par le moyen des fluides. Supposons, par

exemple, que par le moyen d'un tuyau IN, & d'un piston placé en I, on presse la surface de l'eau avec une force de 10 livres : je dis que cette pression pourra faire équilibre avec un poids de 100 livres, placé sur un trou R, dont le diametre seroit dix fois plus grand que le trou N : car puisque ce trou est dix fois plus grand, il y a dix fois plus de filets d'eau qui font effort contre le poids : de plus, chacun de ces filets étant égal au nombre de filets qui sont en N à une force de dix livres ; donc tous les filets ensemble font équilibre avec 100 livres.

COROLLAIRE. IV.

1135. Si la surface AD du vase cylindrique est cent fois plus grande que l'ouverture du trou que je suppose en N, & qui est pressé par un poids de dix livres, la surface de l'eau fera un effort de mille livres pour écarter cette surface des parois ABCD. C'est par cette propriété, commune à tous les fluides, que l'on rendra raison de certains effets qui paroissent très-surprenans, & qui pourroient en imposer à tout autre qu'à des personnes instruites de ce que nous venons de voir. Le souffle d'un enfant suffit pour enlever des poids considérables, par le moyen d'une ou de plusieurs vessies sur lesquelles ces poids sont placés, & dans lesquelles on introduit l'air par le moyen d'un petit chalumeau. Plus le diametre est petit, plus il a de facilité à enlever les poids. Tout ceci peut encore se démontrer par le principe des vîtesses.

REMARQUE.

1136. Tout ce que nous venons de voir est de la derniere importance dans l'hydrostatique : aussi est-il de la plus grande conséquence de bien saisir le vrai de cette même proposition, que l'on exprime ordinairement ainsi : *Les pressions des fluides sur les bases des vaisseaux qui les contiennent sont en raison des bases multipliées par les hauteurs.* On pourroit objecter à cela, qu'il s'ensuivroit delà que si l'on a un vase conique, & un vase cylindrique de même base & de même hauteur que le premier, l'un & l'autre remplis de la même liqueur, le poids de l'un doit être égal au poids de l'autre, puisqu'il semble que la pression occasionne le poids. Mais on va voir que quoique les pressions contre les bases soient égales, il ne s'ensuit pas que les poids absolus doivent changer. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à

faire attention que quoique dans le tambour d'une montre la force du ressort qui bande la chaîne soit très-considérable, on ne sent pourtant rien de cet effort, qui est détruit par la résistance de la chaîne. Il en est de même de chaque filet, quoiqu'il fasse un effort considérable contre la base inférieure du vase : comme cet effort est détruit par la résistance des parois supérieurs, on ne doit porter que le poids de la somme des filets, c'est-à-dire le poids du volume de fluide contenu dans le vase. Aussi si l'on détruit cette résistance réciproque des parois du vase, en pratiquant un fond mobile, alors l'expérience est d'accord avec la théorie, & nous fait voir qu'il faut une force égale à celle d'un solide qui auroit une base égale à celle du vase, & une hauteur égale à celle de la plus haute colonne. Voyez le premier volume de notre *Architecture Hydraulique*, art. 352, page 141.

PROPOSITION II.

Théoreme.

1137. *Si l'on verse une liqueur, par exemple, de l'eau dans un tuyau recourbé ou siphon, je dis que la surface de cette liqueur se mettra de niveau dans les deux branches du siphon.*

Démonstration.

Figure 413. 1°. Si les deux branches du siphon sont d'égale grosseur, il est aisé de prouver que la surface de la liqueur dans chaque tuyau se trouvera renfermée dans une ligne droite horizontale AB; puisque les colonnes de la liqueur contenues dans chaque tuyau, se trouveront dans le même cas que si elles étoient comprises dans un vase, c'est-à-dire de se contre-balancer également, sans faire plus d'effort l'une que l'autre pour baisser ou hausser: car les côtés LM & NO du tuyau font le même effet pour contenir la liqueur, que le feroient les colonnes LMPQ & RNQO, si les deux colonnes LH & NK étoient, aussi-bien que les précédentes, renfermées dans un seul vase AHBK; mais selon cette supposition, les colonnes LH & NK seroient en équilibre (art. 1130), & auroient leur surface de niveau : par conséquent si l'on supprime toutes les colonnes d'eau qui seroient entre ces deux-ci, & qu'à la place l'on substitue les côtés LM & NO du siphon, l'eau restera de niveau dans les deux tuyaux. C. Q. F. D.

Autre

AUTRE DEMONSTRATION.

Pour démontrer ceci par les vîtesses, supposons que la surface AL soit descendue de A en C, par exemple, de 4 pouces : cela étant, la surface NB sera montée de N en E aussi de 4 pouces, puisque les deux tuyaux sont d'égale grosseur : ainsi la quantité de mouvement du fluide dans le premier tuyau est égale à la quantité du mouvement du fluide dans le second tuyau : par conséquent ils sont en équilibre, & leurs surfaces sont de niveau. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

1138. Il suit delà que si l'on a un siphon, dont la grosseur des branches soit inégale, la liqueur qui sera versée dans le siphon se mettra encore de niveau dans les deux branches : car si, par exemple, la branche IK est trois fois plus grosse que la branche GH, il y aura trois fois plus de liqueur dans la grosse branche que dans la petite. Or si l'on imagine que l'eau de cette branche soit partagée en trois colonnes égales, il y en aura une, comme, par exemple, OLPM, qui sera en équilibre avec celle du petit tuyau, puisqu'on suppose qu'elles ont des bases égales. Or étant en équilibre, leurs surfaces seront de niveau; mais la colonne OLPM est en équilibre avec la colonne NLMF ou NFBK, & par conséquent de niveau entr'elles: elles seront donc aussi de niveau avec la colonne du petit tuyau. *Figure* 414.

Pour prouver ceci par les vîtesses, considérez que si la surface de l'eau du petit tuyau est descendue de A en C de 3 pouces, par exemple, elle sera montée de B en E d'un pouce dans le grand tuyau, puisque la base du grand tuyau est triple de celle du petit : ainsi les vîtesses seront réciproques à leurs masses, & par conséquent l'eau sera en équilibre de part & d'autre, & les surfaces de niveau.

COROLLAIRE II.

1139. Mais si le tuyau avoit une branche perpendiculaire à l'horizon, & l'autre inclinée comme dans le siphon ABC, la liqueur que l'on versera dans l'un des tuyaux, se mettra encore de niveau dans l'autre : car si les deux branches de ce siphon sont d'égale grosseur, & que la ligne EG passe par la *Figure* 415.

surface de la liqueur dans chaque tuyau, l'eau de la branche perpendiculaire sera à celle de la branche oblique, comme EB est à BG; mais l'eau de la branche inclinée n'agit pas sur la base B avec toute sa pesanteur absolue; & considérant que cette liqueur est appuyée sur un plan incliné, l'on pourra dire que la pesanteur relative de la liqueur est à sa pesanteur absolue, comme la hauteur GD du plan incliné est à sa longueur GB; & comme nous avons vu que les liqueurs de chaque tuyau étoient comme EB est à BG, il s'ensuit que les hauteurs EB & GD étant égales, l'eau du siphon est en équilibre, & que par conséquent elle est de niveau; ce que l'on démontrera encore, quand même les branches du siphon seroient d'inégale grosseur.

Corollaire III.

Figure 414. 1140. Il suit encore delà que l'eau qui est dans le canal HSTP fait autant d'effort contre les côtés du même canal pour s'échapper, que l'eau de chaque tuyau en fait sur la base TV, qui seroit celle du cylindre, parce que l'eau des petites colonnes QTRP tend à se mettre de niveau avec la surface de la liqueur de chaque branche; aussi l'expérience montre-t'elle que si l'on fait un petit trou vertical au canal d'un siphon, elle monte presqu'à la hauteur de l'eau des branches.

PROPOSITION III.

Théoreme.

1141. *Si l'on met dans les deux branches d'un siphon des liqueurs de différentes pesanteurs, je dis que les hauteurs de ces liqueurs dans les tuyaux, seront entr'elles dans la raison réciproque de leur pesanteur spécifique.*

Démonstration.

Figure 416. Si l'on verse du mercure dans le siphon ABCH, il se mettra de niveau dans les deux branches, comme toutes les autres liqueurs. Or si l'on suppose que la ligne horizontale DE marque le niveau du mercure, & qu'ensuite l'on verse de l'eau dans la branche AB jusqu'à la hauteur G, il est évident que le mercure de cette branche cessera d'être de niveau avec celui de l'autre branche, aussi-tôt qu'on y aura versé de l'eau, & que s'il est descendu de D en I de 2 pouces dans la premiere bran-

che, il sera monté de E en F aussi de 2 pouces dans la seconde. Présentement si l'on tire la ligne horizontale I L, l'on voit évidemment que le mercure I B de la premiere branche est en équilibre avec le mercure L C de la seconde. Or si l'eau se maintient en repos à la hauteur G, & le mercure à la hauteur F, il s'ensuit que l'eau G I est en équilibre avec le mercure F L, si les branches du siphon sont d'égale grosseur, & que d'autant la colonne G I est plus haute que F L, d'autant la pesanteur spécifique du mercure est plus grande que celle de l'eau, & que par conséquent la pesanteur spécifique de ces deux liqueurs est en raison réciproque de leurs hauteurs.

COROLLAIRE.

1142. Il suit delà que si une des branches A B du siphon étoit plus grosse que l'autre D C, le mercure qui seroit dans la grosse branche, sera encore en équilibre avec l'eau de la petite, si après avoir tiré l'horizontale F G, la hauteur E F du mercure est à la hauteur H K de l'eau dans la raison réciproque de la pesanteur spécifique de ces deux liqueurs : car si l'on imagine une colonne L F de mercure, dont la base soit égale à celle du tuyau D C, cette colonne sera en équilibre avec la colonne d'eau H K. Or si le tuyau A B est cinq fois plus gros que D C, la quantité de mercure E I contiendra cinq colonnes, comme L F, qui seront toutes en équilibre entr'elles, aussi-bien qu'avec la colonne H K : ainsi il en sera de la proposition précédente pour l'équilibre des liqueurs différentes dans des tuyaux d'inégale grosseur, la même chose que dans l'article 1137, soit que la liqueur la plus pesante se trouve dans le gros tuyau, ou dans le petit. *Figure 417.*

PROPOSITION IV.

THÉOREME.

1143. 1°. *Si un corps dur est mis dans un fluide de même pesanteur spécifique, il y demeurera entiérement plongé, à quelque hauteur qu'il se trouve.* *Figure 418*

2°. *S'il est d'une pesanteur spécifique plus grande que celle du fluide, il ira au fond du vaisseau.*

3°. *S'il est d'une pesanteur spécifique moindre que celle du fluide, il n'y aura qu'une partie du corps qui s'enfoncera, & l'autre partie restera au dessus de la surface du fluide.*

Démonstration du premier cas.

Si l'on a un vase ABCD, rempli de telle liqueur que l'on voudra, par exemple, de l'eau, & qu'on y plonge un corps E, dont la pesanteur soit égale à celle du volume d'eau, dont il occupe la place, il est constant que ce corps demeurera en équilibre, c'est-à-dire en repos, sans monter ni descendre, quelque situation qu'on lui donne : car il a autant de force que le volume d'eau qui seroit à sa place, pour tendre au centre de la terre : mais les parties de l'eau sont en équilibre avec toutes celles de la même eau qui les environne : ainsi le corps E tenant lieu d'une certaine quantité d'eau, dont il occupe la place, sera en équilibre avec toute celle du vaisseau, & demeurera entiérement plongé & en repos, à quelque hauteur qu'on le mette. C. Q. F. D.

Démonstration du second cas.

Si le corps F plongé dans le même vase, est plus pesant que le volume d'eau, dont il occupe la place, il est aisé de concevoir qu'il descendra au fond de l'eau : car il tendra avec plus de force au centre de la terre qu'un pareil volume d'eau : ainsi il ne sera plus en équilibre avec les autres parties de l'eau dont il est environné, & ira par conséquent au fond du vaisseau. C. Q. F. D.

Démonstration du troisieme cas.

Si le corps G est plus léger qu'un pareil volume d'eau, l'on voit évidemment qu'il doit arriver tout le contraire du cas précédent, c'est-à-dire qu'au lieu d'aller au fond de l'eau, il doit nager sur la surface, & ne s'enfoncer qu'en partie dedans, qui sera, par exemple, la partie IKMN qui occupe un volume d'eau égal en pesanteur à tout le corps G : car si, par exemple, ce corps ne pese que la moitié d'un pareil volume d'eau, la partie enfoncée sera la moitié du corps, & l'eau que cette moitié occupe étant d'une égale pesanteur que tout le corps, ils tendront également au centre de la terre, & seront par conséquent en équilibre, quoique le corps ne soit pas entiérement plongé dans l'eau. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

1144. Il suit du premier cas, que si une puissance Q vouloit sortir de l'eau un poids E attaché à une corde, si le poids est égal à la pesanteur spécifique de l'eau, la puissance ne s'appercevra de la pesanteur du poids, que lorsqu'il commencera à sortir de l'eau, puisque tant qu'il sera plongé dedans, elle n'en soutiendra aucune partie; & c'est la raison qui fait que lorsque l'on tire de l'eau d'un puits, la puissance ne fait presque point d'effort pour soutenir le vaisseau plein d'eau, tant qu'il est plongé dedans, parce qu'elle ne soutient aucune partie de l'eau qui est dans le vaisseau, & que le vaisseau lui-même, quand il est de bois, est à peu près égal à la pesanteur spécifique de l'eau, au lieu qu'étant entiérement dehors, l'effort de la puissance devient égal au poids de l'eau & de celui du vaisseau.

COROLLAIRE II.

1145. Il suit du second cas, que si une puissance Q soutient un corps O plongé dans l'eau, & que la pesanteur spécifique du corps soit plus grande que celle de l'eau, cette puissance ne soutiendra qu'une partie de la pesanteur du corps, qui sera la différence de sa pesanteur spécifique à celle du volume d'eau dont il occupe la place; parce que ce corps pese moins dans l'eau que dans l'air, du poids d'un pareil volume d'eau : ainsi l'on peut dire en général que les corps plus pesans que l'eau perdent de leur pesanteur, lorsqu'ils sont plongés dedans; & cela dans la raison de la gravité spécifique du corps à celle de l'eau, qui est un principe dont nous avons déja parlé dans l'art. 901.

COROLLAIRE III.

1146. Il suit du troisieme cas, que quand un corps est plus léger qu'un pareil volume d'eau, la pesanteur spécifique de l'eau est à celle du corps, comme le volume de tout le corps est à sa partie enfoncée : ainsi supposant que le corps G soit un cube ou un parallelépipede, la pesanteur spécifique de l'eau sera à celle de ce corps, comme HK est à IK.

COROLLAIRE IV.

1147. Il suit aussi qu'un corps s'enfonce différemment dans

les liqueurs dont les pesanteurs spécifiques sont différentes ; étant certain qu'il s'enfoncera davantage dans une liqueur d'une certaine pesanteur spécifique, que dans une autre qui seroit plus pesante : par exemple, l'on voit qu'un vaisseau chargé s'enfonce plus dans une riviere que dans la mer, parce que l'eau des rivieres est moins pesante que celle de la mer : ainsi il ne faut pas s'étonner s'il est arrivé quelquefois qu'un vaisseau, après avoir cinglé heureusement en pleine mer, s'est perdu & a coulé à fond en arrivant à l'embouchure de quelque riviere d'eau douce.

COROLLAIRE V.

1148. L'on peut encore remarquer que quoique les métaux soient plus pesans que l'eau, cela n'empêche pas qu'ils ne puissent nager sur l'eau : car s'ils composent des corps creux, dont la pesanteur spécifique soit moindre que celle du volume d'eau dont ils occupent la place, ils surnageront sans couler à fond.

REMARQUE.

1149. Nous avons déja dit dans l'art. 901, que les métaux perdoient de leur pesanteur, lorsqu'ils étoient plongés dans l'eau : & comme c'est ici l'endroit d'en faire voir la raison, l'on remarquera qu'il n'y en a pas d'autre que celle qui fait qu'un corps étant plongé dans l'eau, est plus léger qu'il n'étoit dans l'air de toute la pesanteur spécifique de l'eau dont il occupe la place. Ainsi l'on pourra toujours trouver la raison de la pesanteur spécifique d'un métal avec celle de l'eau, ou de toute autre liqueur, en pesant dans l'air avec des justes balances une piece de métal ; ensuite on l'attachera à l'un des bras ou bassins de la balance avec un fil de soie, pour voir après que le métal sera plongé dans l'eau, combien il pesera de moins ; & la différence sera celle de la pesanteur spécifique de ce métal à celle de l'eau.

C'est en suivant ce que l'on vient de dire, qu'on a trouvé que l'or perd dans l'eau environ la dix-neuvieme partie de son poids, le mercure la quinzieme, le plomb la douzieme, l'argent la dixieme, le cuivre la neuvieme, le fer la huitieme, & l'étain la septieme.

En suivant le même principe, on peut sçavoir aussi le rapport des pesanteurs spécifiques des liqueurs entr'elles, & des

métaux entr'eux, & par conséquent des liqueurs avec les métaux, par exemple, le rapport du poids d'un pouce cube d'or avec celui d'un pouce cube de mercure ; & c'est ainsi que l'on a trouvé la pesanteur d'un pouce cube des métaux & des liqueurs contenus dans la Table suivante.

Poids d'un pouce cube.

Matieres.	*on.*	*gros.*	*gr.*	*Matieres.*	*on.*	*gros.*	*gr.*
Or.	12	2	17	Marbre blanc.	1	6	0
Mercure.	8	6	8	Pierre de taille.	1	2	24
Plomb.	7	3	30	Eau de Seine.	0	5	12
				Vin.	0	5	5
Matieres.	*on.*	*gros.*	*gr.*	*Matieres.*	*on.*	*gros.*	*gr.*
Argent.	6	5	26	Cire.	0	4	65
Cuivre.	5	6	36	Huile.	0	4	43
Fer.	5	1	27	Chêne sec.	0	4	22
Etain.	4	6	14	Noyer.	0	3	6

L'on peut encore par ce principe mesurer la solidité d'un corps irrégulier : car si ce corps pese 90 livres dans l'air, & que dans l'eau il n'en pese que 80, c'est une marque que le volume d'eau, dont il occupe la place, pese 10 livres : ainsi il ne s'agit que de sçavoir combien 10 livres d'eau valent de pouces cubes ; ce que l'on trouvera, en disant : Si 70 livres valent un pied cube d'eau, ou 1728 pouces, combien vaudront 10 livres ? l'on trouvera 246 pouces & $\frac{6}{7}$ pour la solidité du corps.

Application des principes précédens à la navigation.

1150. Quand on fait des transports de munitions de guerre par des bateaux, comme cela arrive souvent, lorsqu'on a la commodité des rivieres ou des canaux, & que ces munitions peuvent être accompagnées de gros fardeaux : par exemple, comme du canon, des affûts, en un mot tout ce qui compose un équipage d'Artillerie, & qu'un Officier qui a un peu de détail, n'ignore pas le poids des munitions dont il est chargé, il faut faire voir ici comme il pourra estimer la charge que les bateaux peuvent porter, afin de sçavoir combien il lui en faudra, si l'on n'avoit égard qu'aux poids des munitions, sans s'embarrasser du volume.

Comme le pied cube d'eau douce pese environ 70 livres, & qu'un pied cube de bois de chêne ne pese qu'environ 58, l'on voit qu'un bateau pourroit être rempli d'eau, sans pour cela couler à fond, parce que l'eau qui seroit dedans est en équilibre avec celle du dehors, & que la pesanteur spécifique du bois qui compose le bateau, est plus petite que celle de l'eau. L'on peut donc mettre dans le bateau un poids équivalent à celui de l'eau qu'il peut contenir. Or si l'on mesure la capacité du bateau, & qu'on la trouve, par exemple, de 4000 pieds cubes, ce bateau pourra porter 4000 fois 70 livres, parce que nous avons dit qu'un pied cube d'eau pesoit 70 livres: ainsi le bateau portera 280000 livres; mais comme l'usage sur les ports de mer est d'estimer la charge des vaisseaux par tonneaux, & la charge des bateaux sur les rivieres par quintaux, l'on sçaura que le tonneau est un poids de 2000 livres, & que le quintal est un poids de 100 livres: ainsi quand l'on dit en terme de Marine, qu'un vaisseau porte 100 tonneaux, ou est de 100 tonneaux, cela veut dire qu'il peut porter 200000 livres, ou 2000 quintaux.

Nous avons déja dit que l'eau de la mer étoit plus pesante que celle des rivieres; & comme on pourroit avoir besoin de connoître son poids, l'on sçaura que le pied cube pese 73 livres, qui est 3 livres de plus par pied cube que l'eau douce.

Nous allons encore faire voir dans la proposition suivante un principe de l'équilibre des liqueurs, qui est plus curieux qu'utile dans la pratique: c'est pourquoi je n'en ai pas parlé plutôt; mais comme il ne conviendroit pas de le passer sous silence, voici de quoi il est question.

PROPOSITION V.

Théoreme.

1151. *Si l'on a un vase plus gros par un bout que par l'autre rempli d'une liqueur quelconque; cette liqueur aura autant de force pour sortir par une ouverture égale à sa base, que si cette ouverture étoit égale à celle d'en haut.*

Démonstration.

Figure 411. Si l'on a un vase comme dans la figure 411, plus large par la base BC que par le haut GH, il est aisé de concevoir que l'eau

l'eau qui pese sur la base BC fait autant d'effort, que si elle étoit chargée de toute l'eau du volume BOPC : car nous avons fait voir que toutes les colonnes d'eau, comme LM (art. 1137), tendoient à monter à la hauteur GH ou OP, qui est la même chose, & que l'effort qu'elle faisoit étoit exprimé par le poids de la petite colonne IN : mais l'effort exprimé par IN, se fait également à l'endroit M de la base qu'à l'endroit L, à cause de la mobilité respective des parties qui composent les colonnes d'eau ; & toutes les colonnes, comme LM, indépendamment de l'effort exprimé par IN, font encore effort de tout le poids de leur hauteur LM : d'où il suit que la colonne LM pese autant sur la base que la colonne IK, & que par conséquent la base est autant pressée par l'eau, qui est dans le vase, que si elle étoit chargée de tout le volume BOPC. C. Q. F. D.

Si le vase a ses côtés inclinés, comme dans la figure 412, l'on démontrera de même que l'eau fait autant d'effort sur la base EF, que si elle étoit chargée de toute celle qui seroit contenue dans le volume cylindrique EQRF, qui a pour hauteur celle de l'eau du vase. *Figure* 412.

L'expérience prouve ceci encore mieux que tout le raisonnement que l'on peut faire : car si l'on a un vase plus large par en bas que par en haut, & que le fond soit fermé par un piston qui ait la liberté de se mouvoir, sans cependant que l'eau puisse se répandre ; l'on voit, dis-je, que la puissance qui soutient ce piston, a besoin d'une force égale au poids de l'eau qui seroit contenue dans ce vase, s'il étoit aussi large par en haut que par en bas, à cause de l'effort que les petites colonnes d'eau font pour se mettre au niveau des plus grandes : mais quand l'eau vient à être gelée, & que ces parties ne sont plus en mouvement, elles ne font plus d'effort contre les côtés du vase, & la puissance n'a plus besoin d'une si grande force, parce que pour lors elle ne soutient plus que la pesanteur absolue de l'eau gelée.

1152. Mais si le vaisseau étoit plus large par en haut que par en bas, comme est le vase ABCD, si on le remplit de liqueur, elle ne fera pas plus d'effort contre la base BD, que si la largeur d'en haut étoit égale à celle d'en bas : car si l'on imagine le cylindre d'eau BDEF, il sera aisé de juger que comme l'eau pese perpendiculairement, il n'y a que celle qui est contenue *Figure* 419.

dans le cylindre qui fait effort contre la base BD, parce que celle qui est contenue autour du cylindre, ne pese pas sur la base, mais seulement sur les côtés inclinés du vase.

COROLLAIRE.

1153. Il suit de cette proposition, que quelque forme que puissent avoir plusieurs vaisseaux perpendiculaires à l'horizon, & d'égales hauteurs, si ces vaisseaux ont des bases égales, & qu'ils soient remplis d'eau, les bases seront également chargées.

REMARQUE.

Figure 420. 1154. L'effort des liqueurs se mesure à la livre comme celui des poids dans la méchanique; & comme on peut sçavoir la pesanteur d'un pied cube de toutes sortes de liqueurs, particuliérement de celui de l'eau, qui pese 70 livres, l'on trouvera toujours l'effort de l'eau sur le fond d'un vase, en multipliant la capacité du fond par la hauteur perpendiculaire de l'eau du vase: ainsi ayant un vase ABC perpendiculaire à l'horizon, & rempli d'eau jusqu'à l'ouverture A, voulant sçavoir l'effort que fait l'eau sur la base BC, nous supposerons que cette base vaut 4 pieds quarrés, & que la hauteur perpendiculaire AD est de 40 pieds: ainsi multipliant 40 par 4, l'on aura 160 pieds cubes, qui étant multipliés par 70 livres, qui est la pesanteur d'un pied cube d'eau, il viendra 11200 livres, qui est l'effort que l'eau du vase ABC fait sur la base BC; & ce qu'il y a de surprenant, c'est que si tout le vase ne contenoit qu'un pied cube d'eau, qui est équivalent au poids de 70 livres, il faudroit que la puissance Q qui voudroit soutenir le fond CD (supposant qu'il fût détaché du reste), eût une force de 11200 liv. pour être en équilibre avec l'effort de l'eau sur la base BC.



CHAPITRE II.

De la vîtesse des fluides qui sortent par des ouvertures faites aux vases qui les contiennent.

PROPOSITION I.

THÉOREME.

1155. *Si l'on a un tuyau* ABCD *perpendiculaire à l'horizon, & rempli d'une liqueur quelconque, la vîtesse de cette liqueur par l'ouverture* CD *de la base sera exprimée par la racine quarrée de la hauteur.* Figure 421.

DÉMONSTRATION.

Si l'on suppose d'abord que l'ouverture de la base est égale à la même base du cylindre, il est visible que rien ne s'opposant au passage du fluide renfermé dans le vase, toutes les parties de la tranche inférieure CD doivent partir avec la même vîtesse; toute la difficulté consiste à sçavoir quelle doit être la vîtesse de cette tranche au premier instant du mouvement. Je dis que cette vîtesse est égale à celle qu'auroit acquise la premiere tranche supérieure AB en tombant de la hauteur BD. Pour cela, faites attention que la vîtesse d'un corps qui tombe augmente à chaque instant dans le rapport des momens qui se sont écoulés, & par conséquent la force de ce corps, que l'on peut toujours exprimer par des poids, augmente dans le même rapport. Cela posé, si nous imaginons que le tems est représenté par la hauteur AC, il y aura autant de tranches égales à la premiere qui presseront la derniere, qu'il y a d'instans pour la chûte de la premiere tranche ABEG: donc cette derniere tranche reçoit du côté du poids de la colonne qui la presse une force égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de B en D: d'ailleurs cette force seroit exprimée par la racine quarrée de la hauteur. Donc, &c. C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THÉOREME.

1156. 2°. *Si le trou* D *fait à la base du vase qui renferme la liqueur, n'est pas égal à la même base, je dis que la vîtesse, au sortir* Figure 422 & 423.

de cette ouverture, sera encore exprimée par la racine quarrée de la hauteur. On suppose que le vase est toujours entretenu à la même hauteur.

DEMONSTRATION.

Je considére d'abord que les quantités de fluides écoulées sont dans la raison des vîtesses pour une même ouverture, étant évident qu'une vîtesse double donnera une masse double, & ainsi de suite. Cela posé, concevons deux vases A B C & E F G percés chacun à leur base d'une même ouverture, & dont les hauteurs soient différentes. Il est clair que les vîtesses seront différentes, quel que soit leur rapport, & par conséquent les masses ou quantités de fluides le seront aussi dans le même rapport. Soit V la vîtesse du premier vase, & u celle du second ; M la masse de fluide écoulé dans un certain tems, & m celle du fluide écoulé par le second vase dans le même tems ; on aura $M : m :: V : u$; donc $m = \frac{uM}{V}$. Soit F le poids de la colonne A D, & f celui de la colonne E H. Ces poids ou colonnes seront dans la raison des hauteurs, puisqu'elles ont des bases égales, & que le fluide est le même pour chaque vase : on aura donc $F : f :: AD : EG$. De plus, les forces étant comme les quantités de mouvement qu'elles produisent, c'est-à-dire comme les produits des masses ou quantités écoulées par les vîtesses, on aura encore $F : f :: MV : \frac{Mu^2}{V}$: donc $F : f :: MV^2 : Mu^2 :: V^2 : u^2$: donc $AD : EG :: V^2 : u^2$: donc enfin $V : u :: \sqrt{AD} : \sqrt{EG}$. C. Q. F. D.

REMARQUE.

1157. On voit par-là que le principe que nous avons établi précédemment devient général, c'est-à-dire que les vîtesses seront toujours exprimées par les racines quarrées des hauteurs, quelle que soit l'ouverture, égale ou plus petite que la base du vase qui renferme le fluide ; & quelle que soit d'ailleurs la figure du vase droit ou oblique, pourvu qu'il soit entretenu plein à la même hauteur. C'est en vain qu'on a tenté d'expliquer ce principe par l'accélération des vîtesses, causée par la pesanteur. La premiere tranche arrivée en bas du vase ne peut pas avoir acquis de vîtesse plus grande que celle de la derniere, puisqu'elle ne peut passer qu'après elle, & ainsi de toutes les

autres ſucceſſivement. Il faut avoir recours à d'autres démonſtrations, tirées de la maniere dont les fluides agiſſent ſur leurs parties. On eſt redevable à M. *Varignon* de la démonſtration complette que nous venons d'apporter. Ce principe pouvoit être regardé avant lui comme douteux, puiſque l'on ne l'avoit point démontré par une raiſon convenable à la nature des fluides, & qu'au contraire on avoit eu recours à des cauſes qui ne peuvent avoir lieu.

1158. 2°. Dans le cas où l'ouverture eſt égale au diametre de la baſe, quelques Auteurs prouvent que la vîteſſe de l'eau, au ſortir de cette baſe, doit être égale à la racine quarrée de la hauteur, en conſidérant le fluide qui tombe tout entier dans le même tems comme un morceau de glace. Je vois bien que dans cette hypotheſe, lorſque la tranche AB ſera venue en CD, elle aura acquiſe une vîteſſe exprimée par la racine de cette hauteur : mais je ne vois nullement que la derniere tranche CD, au premier inſtant de la chûte, ait la même vîteſſe; ce qui eſt pourtant l'état de la queſtion. Ainſi cette preuve ne peut être admiſe, d'autant plus qu'il n'y a aucune comparaiſon à faire entre un corps cylindrique de glace & une colonne de fluide de même baſe & de même hauteur. La raiſon en eſt, que dans ce cylindre de glace, la tranche CD étant attachée fortement avec toute la maſſe, ne peut reſſentir l'impreſſion des parties ſupérieures ; au lieu que cette impreſſion nulle dans un ſolide, a néceſſairement lieu dans un fluide. *Figure* 421.

COROLLAIRE I.

1159. Il ſuit delà que la vîteſſe d'un fluide, à la ſortie du vaſe qui le contient, eſt égale à celle qu'un corps auroit acquis en tombant d'une hauteur égale à celle de la ſurface de l'eau au deſſus du fond du vaſe : car cette vîteſſe eſt auſſi exprimée par la racine quarrée de la hauteur. *Figure* 421.

COROLLAIRE II.

1160. Nous venons de voir que ſi un fluide s'échappe par une ouverture égale à celle de ſa baſe, la vîteſſe qu'il a eſt égale à celle d'un corps qui ſeroit tombé librement de la hauteur de cette colonne de fluide. De plus avec cette vîteſſe, le corps dans la moitié du tems de la chûte par BD parcourt le même eſpace BD : donc avec la vîteſſe que le fluide a au ſortir

du vase, il lui faudra, pour vuider le vase entiérement, un tems égal à la moitié du tems qu'un corps grave employeroit à parcourir la même hauteur BD.

COROLLAIRE III.

Figure 422. 1161. Comme la vîtesse est la même, lorsque le trou est plus petit que la base, il s'ensuit que dans la moitié du tems qu'un corps mettroit à parcourir AC, il passera une quantité d'eau égale à la colonne AD : par conséquent dans le tems de la chûte, par AD, il sortira une colonne double de la même colonne AD, pourvu que le vaisseau soit toujours entretenu plein à la même hauteur, pour conserver l'égalité de vîtesse. On peut donc dire en général, *que la dépense d'un tuyau ou réservoir, pendant le tems qu'il faudroit à un corps pour tomber de la hauteur du niveau de l'eau au dessus du fond, est égale à une colonne qui auroit pour base l'orifice, & pour hauteur une ligne égale à celle que le corps parcourroit uniformément pendant le même tems avec la vîtesse acquise, c'est-à-dire une colonne double.*

COROLLAIRE IV.

1162. Il suit encore delà que l'on peut aisément connoître la dépense d'un tuyau dans un certain tems, si l'on connoît le diametre de l'ouverture, & la hauteur de l'eau au dessus du fond, que nous supposons toujours la même. Pour cela, il n'y aura qu'à chercher le tems de la chûte d'un corps par la hauteur de l'eau au dessus de la base, ensuite chercher combien de fois ce tems est contenu dans le proposé, & multiplier après par le quotient une colonne double de celle qui auroit pour base l'orifice, & pour hauteur celle de l'eau au dessus de l'orifice. Ce procédé suit évidemment du corollaire précédent: car puisque dans le tems de la chûte, par la hauteur de l'eau, il s'écoule une colonne double de la même hauteur, si le tems donné est décuple du tems de la chûte par cette hauteur, il s'écoulera une colonne dix fois double, ou vingt fois plus grande que la proposée, pourvu, comme on le suppose, que la hauteur soit toujours la même.

COROLLAIRE V.

1163. Si l'on a des vases qui aient des hauteurs inégales, & des orifices aussi différens, mais semblables, comme des cercles

ou des quarrés, les quantités d'eau écoulées ou les dépenses seront dans la raison composée des racines quarrées des hauteurs, & des quarrés des diametres, pourvu que ces mêmes vases soient toujours entretenus à la même hauteur d'eau : donc si l'on appelle D & d les dépenses, H & h les hauteurs, L & l les largeurs ou diametres des orifices, on aura $D : d :: \sqrt{H} \times L^2 : \sqrt{h} \times l^2$: donc $D \times \sqrt{h} \times l^2 = d\sqrt{H} \times L^2$. Si les dépenses sont égales, on aura $\sqrt{h} \times l^2 = \sqrt{H} \times L^2$: donc $\sqrt{H} : \sqrt{h} :: l^2 : L^2$, c'est-à-dire que les orifices sont dans la raison réciproque des racines quarrées des hauteurs, ou des vîtesses qui sont exprimées par ces racines. Si au lieu des dépenses on met les produits des bases par les vîtesses qui leur sont égaux, on aura $V \times L^2 \times \sqrt{h} \times l^2 = u \times l^2 \times \sqrt{H} \times L^2$, ou $V \times \sqrt{h} = u\sqrt{H}$, d'où l'on tire comme ci-devant, $V : u :: \sqrt{H} : \sqrt{h}$.

Corollaire VI.

1164. Comme l'eau contenue dans un vase fait un effort égal de tous côtés pour s'échapper, il suit encore delà que si l'on a un vase, comme AD, rempli d'eau, toujours entretenue à la même hauteur, & qu'on pratique deux ouvertures en B & C, les vîtesses de l'eau, à la sortie, seront comme les racines quarrées des hauteurs AB & AC, soit que l'eau, à la sortie des ouvertures, soit poussée suivant une direction verticale, horizontale, ou inclinée à l'horizon. Il est cependant à remarquer que cela ne se trouve pas exactement vrai, c'est-à-dire que les vîtesses de l'eau, suivant des directions inclinées, ne sont pas si grandes en sortant, que selon des directions horizontales ou des directions verticales, lorsqu'elle coule de haut en bas. Cette différence vient de ce que les parties de l'eau ne s'échappent pas si aisément, suivant des directions obliques, que suivant des directions horizontales, ni si facilement selon des directions horizontales, que suivant des directions verticales. *Figure 424.*

Corollaire VII.

1165. Il suit encore delà que si l'eau sort suivant une direction horizontale, le jet décrira une parabole, dont le sommet sera en B : car nous avons démontré dans le Traité du Mouvement, que si l'on a un demi-cercle AFC, dont le dia- *Figure 425.*

metre AC soit vertical, & qu'on pousse un corps quelconque suivant une direction BD avec une force exprimée par la racine de AB, qui est celle qu'il auroit acquise en tombant de A en B, ce corps décrira une parabole BGE, dont l'amplitude CE seroit double de la perpendiculaire BF: donc si l'on considere les parties de l'eau comme une infinité de petits corps poussés suivant la direction BD avec une force exprimée par la racine quarrée de AB, on verra qu'ils décrivent pareillement la parabole BGE.

Figure 426. De même si l'eau sort suivant une direction CG avec une vîtesse exprimée par la racine quarrée de la hauteur AC, que je suppose être celle du niveau de l'eau au dessus de la base, le jet décrira la parabole CEF, dont le sommet sera le point E, puisque nous avons fait voir que tout corps poussé suivant une direction CG oblique à l'horizon, avec une force exprimée par $\sqrt{AC}$, qui est la force de l'eau à sa sortie, doit décrire une parabole.

Corollaire VIII.

Figure 417. 1166. Il suit encore delà que si l'on a un réservoir ABCD, au bas duquel il y ait une ouverture D, & un tuyau recourbé à cette ouverture de D vers E, l'eau montera dans ce tuyau DE avec la vîtesse acquise jusqu'à la hauteur dont elle est descendue: car nous avons vu que si un corps est poussé avec la force qu'il a acquise en tombant d'une certaine hauteur, il doit remonter à la même hauteur. Ce principe est d'un grand usage dans la conduite des eaux, & dans les différentes distributions. Lorsqu'on veut sçavoir si l'on peut mener de l'eau d'un endroit à un autre, il faut d'abord s'assurer si celui où se trouve la source est plus élevé que l'endroit où l'on veut la conduire, ce que l'on reconnoîtra par un nivellement exact. Si cette source est tant soit peu plus élevée que le lieu auquel on veut conduire de l'eau, alors par le moyen des canaux pratiqués entre les deux endroits, on peut se la procurer. Sur quoi il est à remarquer que lorsqu'il faut que l'eau monte pour arriver au lieu de sa destination, après avoir descendu, comme cela peut arriver par l'inégalité du terrein qui se trouve entre deux, il faut que la source soit de quelque chose plus élevée que le lieu où on conduit ses eaux, sans quoi l'on s'exposeroit à une dépense inutile, parce que plusieurs causes concourent

courent à altérer la vîtesse de l'eau dans le tuyau, & par conséquent diminuent la force qu'elle a pour monter.

COROLLAIRE IX.

1167. C'est aussi à peu près la même raison qui fait que *Figure* 428.
dans un jet d'eau l'eau ne monte pas tout-à-fait à la même hauteur de celle du réservoir qui fournit le même jet. L'air résistant aux parties de l'eau à mesure qu'elles sortent de l'ajutage, qui est en C, diminue leur vîtesse, & les empêche de s'élever jusqu'à la surface du niveau de l'eau du réservoir. M. *Mariotte* dans son Traité du Mouvement des Eaux a fait plusieurs observations pour sçavoir suivant quel rapport diminuent les hauteurs auxquelles s'élevent différens jets qui ont mêmes ajutages, & des réservoirs inégaux. Il a trouvé que cette diminution suivoit le rapport des racines quarrées des hauteurs; d'où l'on voit que si l'on sçait la hauteur à laquelle un jet d'eau s'éleve, & de plus la hauteur du réservoir qui la fournit, on pourroit connoître, par une seule proportion, la hauteur à laquelle un jet d'eau d'un réservoir donné de hauteur, peut s'élever par un ajutage de même diametre. De plus, les dépenses étant toujours à proportion des vîtesses, il s'ensuit que si l'on connoît la dépense d'un réservoir d'une hauteur donnée par un ajutage donné, on connoîtra aussi la dépense d'un autre réservoir de hauteur aussi donnée par telle ouverture que ce soit aussi donnée.

M. *Mariotte* a trouvé qu'ayant un réservoir toujours rempli d'eau, & dont la hauteur AB étoit de 13 pieds, & le diametre de l'ajutage de 3 lignes, il sort pendant une minute, par le même ajutage, 14 pintes, mesure de paris; la pinte pesant deux livres: ainsi il n'en faut pas davantage pour résoudre le problême suivant.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

1168. *Trouver la dépense d'un jet d'eau pendant une minute par un ajutage de 4 lignes de diametre, l'eau du réservoir étant de 40 pieds de hauteur.*

SOLUTION.

Nous sçavons que lorsque les ajutages sont égaux, la dé-

penſe des eaux eſt dans la raiſon des racines quarrées des différentes hauteurs de l'eau; & que quand les ajutages ſont différens, les dépenſes ſont dans la raiſon compoſée des racines quarrées des hauteurs, & des quarrés des diametres des ajutages: ainſi en faiſant uſage de l'expérience de M. *Mariotte*, nous dirons: Si le produit du quarré de 3 lignes, qui eſt 9, par la racine de 13, donne 14 pintes pour la dépenſe de l'eau pendant une minute, combien donnera le produit du quarré du diametre 4 de l'ajutage, qui eſt 16, par la racine quarrée de 40, pour la dépenſe que l'on demande pendant le même tems? Le quatrieme terme de cette Regle de Trois fera trouver le nombre de pintes que l'on cherche. C. Q. F. D.

Corollaire.

1169. Si les tems n'étoient pas égaux, on pourroit toujours trouver par une ſeule Regle de Trois la dépenſe pendant un tems donné; car les dépenſes ſont toujours dans la raiſon compoſée des racines quarrées des hauteurs, des quarrés des diametres, & de la raiſon ſimple des tems: enſorte que ſi l'on a un réſervoir, dont la hauteur ſoit H, la dépenſe D par un ajutage dont le diametre ſoit F, pendant un tems T; & un autre réſervoir, dont la hauteur ſoit h, la dépenſe d par un ajutage dont le diametre ſoit f, pendant un tems t; on aura cette proportion, $D : d :: FFT\sqrt{H} : fft\sqrt{h}$; d'où l'on tire $Dfft\sqrt{h} = dFFT\sqrt{H}$; & l'on peut faire uſage de cette formule pour déterminer tous les cas qui ont rapport aux différentes queſtions que l'on peut propoſer ſur les dépenſes des réſervoirs, ſelon les différentes combinaiſons des tems, des hauteurs, & des diametres.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

Pl. xxxiii. Figure 422. 1170. *Si un vaſe cylindrique plein d'eau ſe déſemplit par une ouverture* D, *beaucoup plus petite que le fond de la baſe, les quantités d'eau qui s'écouleront dans des tems égaux ſeront comme les nombres impairs pris dans un ordre renverſé, c'eſt-à-dire comme la ſuite des nombres* 11, 9, 7, 5, *&c.*

Démonstration.

Concevons le vaſe coupé par des plans paralleles, dont les

hauteurs CL, CM, CF, ON soient comme les quarrés 1, 4, 9, 16, &c. des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. Quand l'eau commencera à couler, sa vîtesse étant exprimée par la racine quarrée de la hauteur, sera comme 4; & quand le niveau de l'eau sera descendu en EF, la vîtesse deviendra comme racine de 9, qui est 3. Pareillement lorsque le niveau sera en M*m*, sa vîtesse sera comme 2, & enfin lorsqu'elle sera en L*l*, la vîtesse sera exprimée par 1. Présentement faisons attention que les cylindres, dont les hauteurs sont CL, CM, CF, CN, ayant des bases égales, sont entr'eux comme les mêmes hauteurs, c'est-à-dire comme 1, 4, 9, 16. Et si l'on suppose pour un instant que la vîtesse de N jusqu'en F a été uniforme, que celle de F jusqu'en M l'a été aussi, les quantités NF, FM, ML, LC, écoulées pendant des tems égaux, lesquelles ne sont que les différences des cylindres 7, 5, 3, 1, sont précisément dans la raison inverse des nombres impairs 1, 3, 5, 7. Présentement si l'on fait attention que quoique la vîtesse de N en F ait diminué continuellement, cependant on peut trouver une vîtesse moyenne, qui regardée & supposée constante, ait donné la même dépense, & ainsi des autres; il s'ensuit nécessairement que les quantités d'eaux écoulées pendant des tems égaux, sont comme les nombres 7, 5, 3, 1. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

1171. Il est aisé de voir que dans ce cas le diametre de l'ouverture doit être beaucoup plus petit que celui de la base: car alors l'eau tomberoit comme une seule masse, de maniere que les parties inférieures n'auroient pas plus de vîtesse que les supérieures. C'est ce que l'on peut remarquer aisément par un grand entonnoir qui se forme tout d'un coup à la surface de l'eau, & qui prouve incontestablement que l'eau du milieu sort avec une plus grande vîtesse dans ce cas que dans les autres.

COROLLAIRE II.

1172. Il suit encore delà que l'on peut connoître les quantités d'eau écoulées pendant un certain tems donné, si l'on connoît le tems total qu'un vase a employé à se vuider. Supposons, par exemple (*fig.* 421) que le vase ait été six heures de tems à se désemplir par une ouverture beaucoup plus petite que la base. Je conçois le vase coupé par 36 tranches égales entr'elles.

Cela fait, je divise encore le nombre 36 en six autres parties inégales entr'elles, dont la premiere contienne 11 de ces parties égales, la seconde 9, la troisieme 7, & ainsi de suite. De cette maniere on verra que dans la premiere heure de l'écoulement il est sorti du vase un cylindre égal à 11 parties égales, c'est-à-dire les $\frac{11}{36}$ de l'eau contenu dans le même vase: à la deuxieme heure il en sera sorti $\frac{9}{36}$ ou $\frac{1}{4}$, & ainsi des autres; ce qui est bien évident, puisque la somme des nombres 11, 9, 7, 5, 3, 2, 1 fait précisément 36, & que par le théorême dont il s'agit, les quantités écoulées dans des tems égaux suivent le rapport des mêmes nombres.

Corollaire III.

1173. Il suit delà que puisque la vîtesse de l'eau sortant d'un vase qui se vuide est continuellement retardée, si le vase avoit toujours été entretenu à la même hauteur d'eau, comme la vîtesse auroit été toujours uniforme, aussi, suivant la loi de *Galilée*, la quantité d'eau écoulée uniformément pendant le tems que le vase se désemplit, sera double de l'eau qui étoit dans le vase.

Corollaire. IV.

1174. Il suit encore delà que si des vases qui se désemplissent ont des hauteurs & des ouvertures égales, avec des bases inégales, les tems qu'ils mettront à se vuider entiérement seront dans la raison des bases: car les tems que ces vases emploient à se vuider sont égaux au tems qu'il faudroit pour qu'il s'écoulât, par un mouvement uniforme, une quantité double de l'eau qui est dans chaque vase, en les supposant entretenus toujours à la même hauteur (art. 1173). Et dans ce dernier cas, les tems des écoulemens sont proportionnels aux bases: donc aussi lorsque les vases se désemplissent totalement, les tems doivent suivre la même raison.

Corollaire. V.

1175. Si les vases ont toujours même hauteur, & des bases avec des ouvertures inégales, il est évident que les tems qu'ils mettront à se vuider seront dans la raison composée de la directe des bases, & de l'inverse des ouvertures ou des quarrés des diametres de ces ouvertures, si elles sont des figures semblables.

COROLLAIRE VI.

1176. Il n'est pas moins évident que les tems seront encore dans la raison composée de la directe des racines quarrées des hauteurs, si ces hauteurs sont inégales, de la directe des bases & de l'inverse des quarrés des diametres des ouvertures; ensorte que si l'on appelle H la hauteur de l'eau dans un vase, B la base du même vase, D le diametre de l'ouverture, & T le tems qu'il met à se vuider, pareillement *h* la hauteur de l'eau dans un autre vase, *d* le diametre de l'ouverture, *b* sa base, & *t* le tems qu'il emploie à se vuider, on aura $T : t :: \frac{B\sqrt{H}}{DD} : \frac{b\sqrt{h}}{dd}$, ou $T : t :: Bdd\sqrt{H} : bDD\sqrt{h}$; d'où l'on tire $TbDD\sqrt{h} = tBdd\sqrt{H}$; & l'on se serviroit de cette formule comme des précédentes.

CHAPITRE III.

Du cours des rivieres, & du choc des fluides en mouvement contre les surfaces des corps qu'elles rencontrent.

DEFINITIONS.

I.

1177. Le *lit* d'un fleuve ou d'une riviere est le canal dans lequel il coule.

II.

1178. Si l'on conçoit un plan vertical qui coupe cette riviere dans toute son étendue en largeur, & perpendiculairement à son cours, la figure qui en résulte est appellée *profil* ou *section du fleuve.* Comme la ligne du terrein qui termine cette figure est assez irréguliere, on la réduit en rectangle pour avoir une mesure plus aisée à déterminer.

PROPOSITION I.

THÉOREME.

1179. *Toute riviere ou fleuve qui n'est point arrêté dans son mouvement est mu d'une vîtesse accélérée.*

DÉMONSTRATION.

Figure 429. Ou bien le fond du lit de la riviere est horizontal, ou bien il est incliné à l'horizon. Dans le premier cas, on concevra d'abord le lit du fleuve, dont la hauteur est BC, représenté par la ligne CD, & le fleuve divisé en une infinité de tranches paralleles. Il est visible que chacune de ces tranches coule avec une vîtesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur correspondante ; car chaque tranche étant pressée par le poids des tranches supérieures, se trouve dans le cas de l'art. 1155. De plus, comme elle est toujours soumise à l'action des tranches supérieures, il s'ensuit qu'elle acquiert de nouveaux degrés de vîtesse : donc elle est mue d'un mouvement accéléré. Dans le second cas, c'est-à-dire lorsque le lit est incliné à l'horizon indépendamment de cette premiere accélération, causée par la pression de chaque tranche sur celle qui est au dessous, & modifiée par l'inclinaison du lit de la riviere ; toute la masse tombant sur un plan incliné, acquiert à chaque instant de nouveaux degrés de vîtesse, comme les corps qui tombent le long des plans inclinés C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

1180. Il suit delà que quelle que soit la position du lit d'un fleuve, la vîtesse sera d'autant plus grande que le fleuve sera plus éloigné de sa source ; parce que dans le cas d'un lit horizontal, chaque tranche aura agi d'autant plus qu'il y a plus de distances entre le point où l'on examine la vîtesse du fleuve, & la source du même fleuve ; & dans le cas d'un lit incliné à l'horizon, la hauteur de la source au dessus du même point sera d'autant plus grande.

COROLLAIRE II.

1181. Il suit delà que les vîtesses de deux rivieres différentes à leurs embouchures, en supposant leur pente égale, sont d'autant plus grandes que ces mêmes embouchures sont plus éloignées de leurs sources : en général les vîtesses des fleuves dépendent de la pente de leur lit, de la hauteur de leurs eaux, & de la distance de ces mêmes eaux à la source.

COROLLAIRE III.

1182. Il suit encore delà que les vîtesses des différentes tranches sont d'autant plus grandes qu'elles sont plus proches du fond. Si cette vérité ne se trouve pas entiérement confirmée par l'expérience, cela vient de ce que le fond des rivieres est toujours rempli de corps inégaux, dont le frottement, avec les dernieres couches, ralentit nécessairement le mouvement de ces mêmes couches. De plus, il est visible que les vîtesses de chaque tranche étant exprimées par les racines quarrées des hauteurs, ces vîtesses peuvent être représentées par les ordonnées d'une parabole AMOP, puisque l'on a LM; *Figure* 429.
$NO : DP :: \sqrt{AL} ; \sqrt{AN} : \sqrt{AD}$.

DÉFINITION.

1183. Si l'on conçoit une vîtesse uniforme qui soit telle qu'il s'écoule pendant le même tems la même quantité d'eau que celle qui s'écoule par la somme des vîtesses inégales : cette vîtesse est appellée *vîtesse moyenne*.

COROLLAIRE I.

1184. Il suit delà que la vîtesse moyenne est les deux tiers *Figure* 429.
de la vîtesse de la derniere tranche, dans le cas où la section du fleuve est un parallélogramme : car il est évident que les quantités d'eau qui s'écoulent par chaque tranche ou élément de la section, sont proportionnelles à la largeur de ces élémens & aux vîtesses : mais dans l'hypothese présente, toutes les largeurs sont égales, donc les quantités d'eau qui s'écoulent par chaque tranche, suivent le rapport des vîtesses, c'est-à-dire qu'elles vont en diminuant comme les ordonnées d'une parabole qui auroit pour hauteur AD : donc si DP exprime la vîtesse de la derniere tranche, la quantité d'eau écoulée par la surface du parallélogramme sera les deux tiers de celle qui se seroit écoulée, si toutes les vîtesses étoient égales : donc pour avoir la vîtesse moyenne, il n'y a qu'à prendre les deux tiers de la derniere vîtesse DP : car en multipliant la hauteur AD, par cette vîtesse on aura la même quantité d'eau écoulée.

COROLLAIRE II.

1185. Il suit encore delà que la vîtesse moyenne varie selon

les différentes figures de la section de la riviere; & la regle générale pour la trouver est de diviser la quantité d'eau écoulée par la hauteur : cette opération est la plus aisée. Celle qui demande plus d'adresse est de trouver la quantité d'eau écoulée pendant un certain tems, en faisant usage de ce principe, que les quantités d'eau qui s'écoulent sont en raison composée de la directe des racines quarrées des hauteurs, & de la directe des élémens de la section. Ceux qui auront connoissance du calcul différentiel, pourront voir dans l'Architecture Hydraulique différentes solutions de ce problême, & pourront trouver les vîtesses moyennes correspondantes par le moyen du principe que j'expose ici.

Corollaire III.

1186. Il suit delà que la vîtesse moyenne répond aux $\frac{4}{9}$ de la hauteur AD : car en supposant que NO soit cette vîtesse, on aura $NO = \frac{2}{3} DP$: donc $DP^2 : \frac{4}{9} DP^2 :: AD : \frac{4}{9} \frac{AD \times DP^2}{DP^2} = \frac{4}{9} AD$: donc si l'on connoît la hauteur AD, & la largeur de la section, que nous supposons parallélogrammique, avec la quantité d'eau écoulée dans un certain tems, on connoîtra la vîtesse de la derniere tranche comme il suit. Soit q la quantité d'eau écoulée par cette section dans une minute; a, la hauteur AD; on aura $\frac{2}{3} \sqrt{a}$ pour la vîtesse moyenne (art. 1184) : donc la vîtesse de la derniere tranche est connue; puisque celle-ci en est les deux tiers : on fera donc $\frac{2}{3} : 1 :: \frac{q}{a} : \frac{3}{2}\frac{q}{a}$, c'est-à-dire que l'on connoîtra la vîtesse de la derniere tranche, en divisant le triple de la quantité d'eau écoulée par le double de la hauteur.

Corollaire IV.

1187. Il suit delà que si l'on connoît la vîtesse de la derniere tranche & la vîtesse moyenne avec la quantité d'eau qui s'est écoulée, on connoîtra aussi la hauteur de la section, & partant dans ce cas, comme dans le précédent, on déterminera facilement le parametre de la parabole.

Du choc des fluides contre les solides en repos ou en mouvement.

1188. Dans le choc des fluides, comme dans celui des solides

lides, pour en estimer la force, il faut avoir égard à la densité & à la vîtesse du fluide dont elle dépend : mais comme les fluides agissent tout autrement que les solides, aussi les loix de leur choc ne sont pas les mêmes ; la principale différence consiste en ce que lorsqu'un corps solide vient en choquer un autre, il n'y a que la surface antérieure de ce solide qui frappe le premier, au lieu que dans les fluides toutes les lames élémentaires viennent frapper chacune avec la même vîtesse.

PROPOSITION II.

Théoreme.

1189. *Si un fluide choque avec différentes vîtesses des surfaces égales, exposées perpendiculairement à son courant, les forces du choc seront comme les quarrés des vîtesses.*

Démonstration.

Puisque les surfaces sont égales, & chacune perpendiculaire au courant ou à la direction du fluide, le nombre des filets qui agissent contre elles est le même : il est donc évident que le choc du courant contre ces surfaces seroit égal, si les vîtesses étoient égales ; & la différence ne peut venir que de l'inégalité des vîtesses. Il faut donc faire voir que le rapport de ces forces est celui des quarrés des vîtesses. Pour cela, supposons que la premiere vîtesse soit 1, & la seconde 3 : donc dans le même tems le plan opposé à la plus grande vîtesse est frappé trois fois davantage, puisque la masse d'eau est trois fois plus grande ; & de plus, comme chaque partie de cette masse d'eau égale à celle qui a un degré de vîtesse, a (*par hypothese*) une vîtesse triple, la surface qui lui est opposée recevra donc trois fois plus de mouvement de chacune de ces trois parties : donc la quantité de mouvement reçue, où la force du choc sera exprimée par 9, quarré de 3 ; pendant que le choc, contre la premiere surface, ne sera exprimé que par 1, quarré de la premiere vîtesse : donc les forces du choc d'un fluide de même densité sont comme les quarrés des vîtesses, contre des surfaces égales, & exposées perpendiculairement à son courant. C. Q. F. D.

Scholie.

1190. Il faut bien remarquer que l'on suppose ici que toutes

les tranches horizontales du fluide ont une même vîteſſe : ſi cela n'étoit pas, il faudroit connoître le rapport ſuivant lequel elles augmentent ou diminuent, pour déterminer les vîteſſes moyennes ; & les forces du courant contre ces ſurfaces ſeroient entr'elles comme les quarrés de ces vîteſſes moyennes.

COROLLAIRE I.

1191. Si les vîteſſes des fluides étant inégales, on ſuppoſe de plus que les fluides ont des denſités inégales, & qu'ils choquent perpendiculairement des ſurfaces inégales ; alors il eſt évident que les forces du choc contre ces ſurfaces eſt en raiſon compoſée des ſurfaces choquées, des denſités des fluides & des quarrés des vîteſſes : donc ſi l'on appelle F la force du premier fluide, V ſa vîteſſe, D ſa denſité, & S la ſurface qu'il rencontre ; & pareillement f la force d'un ſecond fluide, dont la denſité eſt d, la vîteſſe v, & qu'il rencontre une ſurface s ; on aura cette analogie, $F : f :: SV^2D : su^2d$, d'où l'on tire cette égalité, $Fsu^2d = fSV^2D$ qui pourra ſervir à déterminer les différens rapports des forces du choc, ſelon les rapports des denſités des vîteſſes & des ſurfaces : toujours dans le cas où les tranches horizontales du fluide ont la même vîteſſe, comme nous le ſuppoſons ici : on avertira lorſque nous ferons d'autres ſuppoſitions.

COROLLAIRE II.

1192. Si les ſurfaces expoſées aux différens fluides ont des vîteſſes particulieres, il eſt évident que dans le cas où ces vîteſſes ſeroient vers le même point, elles doivent être moindres que celles des fluides, & alors les forces des fluides contre ces ſurfaces ſeront en raiſon compoſée de la denſité de ces mêmes fluides, de celle des ſurfaces & des quarrés des différences des vîteſſes de chaque fluide à la ſurface choquée. Si les ſurfaces choquées ont des vîteſſes particulieres, & directement oppoſées à celle des fluides ; les forces du choc contre ces ſurfaces ſeront dans la raiſon compoſée des ſurfaces choquées, des quarrés des ſommes des vîteſſes du fluide, & de la ſurface contre laquelle il choque, & des denſités de ces mêmes fluides.

COROLLAIRE III.

1193. Si le fluide eſt ſuppoſé en repos, & que la ſurface

meuve dans ce même fluide avec une certaine vîtesse, les résistances qu'elle éprouvera seront comme les quarrés des vîtesses: car il est évident que c'est précisément la même chose de supposer le fluide en repos, & la surface en mouvement, ou la surface en repos, choquée par un fluide qui auroit la même vîtesse.

PROPOSITION III.

Théoreme.

1194. *Si deux surfaces égales sont exposées à un courant, dont toutes les tranches horizontales sont supposées avoir la même vîtesse, l'une perpendiculairement, & l'autre obliquement au même fluide, les chocs du fluide contre ces surfaces seront comme le quarré du sinus total au quarré du sinus de l'angle d'inclinaison.*

Démonstration.

Soit une surface T V, exposée au courant, représenté dans cette figure, & perpendiculaire à ce même courant; & soit une autre surface T M inclinée à la direction du fluide, & que l'on suppose égale à la précédente; ayant décrit l'arc M V, & abaissé la perpendiculaire M Q sur T V, il est visible que T Q sera le sinus de l'angle d'inclinaison T M V : il faut donc démontrer que le choc du fluide contre T V est au choc du fluide contre T M, comme le quarré TV^2 du sinus total est au quarré TQ^2 du sinus de l'angle d'inclinaison. *Figure* 430.

On peut concevoir le fluide composé d'une infinité de lames horizontales qui choquent toutes avec la même force. Cela posé, il est évident que la force du choc dépend de la maniere dont chacune agit directement, ou obliquement, & du nombre de ces tranches; il n'est pas moins visible que le nombre des tranches qui choquent la surface T V est au nombre des tranches qui choquent la surface T M, comme T V est à T Q. Mais les tranches qui frappent la surface T M ne la choquent pas directement, puisque cette surface est oblique au courant: ainsi la force du choc contre cette surface doit encore diminuer dans la raison du sinus total au sinus de l'angle d'inclinaison : car si l'on suppose que la force absolue d'une lame soit représentée par P F, égale au sinus total, cette force doit se décomposer en deux autres, l'une P H parallele au plan T M, & l'autre perpendiculaire F H : or il est évident que

PF : FH :: TM : TQ :: TV : TQ, à cause des triangles semblables PHF, TMQ : donc la force du choc contre TV est à celle contre TM, comme $TV^2 : TQ^2$, c'est-à-dire comme le quarré du sinus total est au sinus de l'angle d'inclinaison. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

1195. Si le nombre des filets étoit égal de part & d'autre, ce qui arriveroit si la surface TM étoit prolongée en N jusqu'à la ligne horizontale NV, alors l'inégalité du choc ne vient que de l'obliquité du fluide, & par conséquent le choc contre TV est au choc contre TN, comme le sinus total au sinus de l'angle d'inclinaison, car la vîtesse est la même, & comme la hauteur est aussi la même, il y a même nombre de tranches qui choquent les surfaces TV, TN, que l'on suppose d'ailleurs avoir une largeur égale.

COROLLAIRE II.

1196. Il suit encore delà que les chocs de deux fluides différens en densité contre des surfaces inégales, & inégalement inclinées, sont dans la raison composée des quarrés des sinus des angles d'inclinaisons, des densités, & des surfaces exposées à ces différens fluides, & des quarrés des vîtesses : car les sinus de chacun des angles d'inclinaison mesurent le nombre de lames horizontales qui choquent les surfaces proposées ; ils mesurent aussi l'intensité du choc, selon le plus ou le moins d'inclinaison de ces surfaces : donc les chocs sont 1°. comme les quarrés des sinus des angles d'inclinaison. 2°. Il est évident que plus elles seront grandes, plus il y aura de tranches qui les choqueront. 3°. Il est encore visible qu'à vîtesse égale plus les fluides seront denses, plus le choc sera grand, à cause de la masse, toujours proportionnelle aux densités ; 4°. les chocs seront comme les quarrés des vîtesses : car nous avons démontré (art. 1188) que les chocs suivent ce rapport pour les fluides. Donc si l'on appelle D la densité d'un fluide, V la vîtesse comme à toutes les tranches (*hyp.*), S le sinus de l'angle d'inclinaison du plan, dont la surface est représentée par E, & F la force du fluide contre cette surface ; pareillement si l'on nomme *d* la densité d'un autre fluide, dont la vîtesse est *v*, & qui choque un plan, dont le sinus

d'inclinaison est s, & dont la surface est e; que l'on appelle f, du choc résultant contre cette surface, on aura $F:f::DV^2S^2E : dv^2s^2e$; d'où l'on tire $Fdv^2s^2e = fDV^2S^2E$. On pourra déduire de cette proposition, & de la formule qui a été construite sur ce que l'on vient de démontrer tout ce dont on pourra avoir besoin dans les différentes circonstances qui peuvent avoir lieu dans le choc des fluides contre des surfaces en repos. On pourroit même l'appliquer au choc des fluides contre des surfaces en mouvement, & exposées obliquement au courant, en prenant pour les vîtesses V & v la différence ou la somme des vîtesses du plan & du fluide, selon que ces vîtesses ont des directions dans le même sens, ou dans des sens opposés.

COROLLAIRE III.

1197. Pour faire voir quelques applications de cette formule, nous supposerons que les vîtesses sont proportionnelles aux densités & aux surfaces qu'elles rencontrent, c'est-à-dire que $V:v::D:d$, & que $V:v::E:e$: donc en multipliant par ordre, on aura $V^2:v^2::DE:de$: donc en substituant ces rapports dans la proportion $F:f::DV^2S^2E:dv^2s^2e$, on aura celle-ci, $F:f::D^2E^2S^2:d^2e^2s^2$, ou $F:f::V^4S^2:v^4s^2$, c'est-à-dire que les forces sont comme les produits des quarrés des densités, des surfaces, & des sinus des angles d'inclinaison, ou dans la raison composée des quatriemes puissances des vîtesses & des quarrés des sinus des angles d'inclinaison.

COROLLAIRE IV.

1198. Si les vîtesses sont réciproques aux racines quarrées des espaces, & les densités réciproques aux quarrés des sinus des angles d'inclinaison, les forces du choc seront égales: car puisque $V:v::\sqrt{e}:\sqrt{E}$, on a $V^2:v^2::e:E$: donc $V^2E = v^2e$: donc $F:f::DS^2:ds^2$; mais par hypothese $D:d::s^2:S^2$: donc $DS^2 = ds^2$: donc $F = f$, & ainsi des autres cas qu'il seroit inutile de détailler ici davantage. C'est aux Commençans à s'exercer à trouver eux-mêmes des suppositions, pour connoître par la formule ce qui doit arriver dans ces circonstances; mais ce qu'ils doivent étudier avec le plus de soin, ce sont les raisons métaphysiques des résultats qu'ils tireront de la formule, sans quoi ils les auront aussitôt oubliés

que découverts, & contracteroient la pernicieuse habitude de ne raisonner que par formules, lorsqu'ils sont en état de le faire par le jugement.

Scholie.

1199. Dans ce qui précede, nous avons supposé que toutes les tranches du fluide qui choque une surface perpendiculaire ou oblique à son courant, étoient toutes mues avec une égale vîtesse; mais comme il y a un grand nombre de cas où les vîtesses des tranches ne sont pas égales, & suivent différens rapports, nous allons examiner dans la proposition suivante quelles doivent être les forces du choc, lorsque les vîtesses de chaque tranche sont comme les racines quarrées des hauteurs, comme cela arrive dans les rivieres & autres courans qui ont une certaine profondeur.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

Figure 432. 1200. *Si deux surfaces égales sont exposées au courant d'un fluide, dont toutes les tranches ont différentes vîtesses qui suivent la progression des racines des hauteurs, & que l'une de ces surfaces soit exposée perpendiculairement, & l'autre obliquement au même fluide, le choc contre la premiere est au choc sur la seconde surface, comme le cube du sinus total est au cube de celui de l'angle d'inclinaison.*

Démonstration.

Supposons que les lignes égales AB, AF représentent le profil de chacune de ces surfaces, l'une AB perpendiculaire à la direction du fluide, & l'autre AF oblique au même fluide; AB sera le sinus total, & AG le sinus de l'angle d'inclinaison: de plus, comme on suppose que les vîtesses croissent comme les racines quarrées des hauteurs, il est évident que la plus grande vîtesse des tranches qui répondent au plan oblique AF sera exprimée par $\sqrt{AG}$, & la plus grande vîtesse qui réponde au plan perpendiculaire AB sera exprimée par $\sqrt{AB}$. On sçait par ce qui précéde, que le choc de ces différentes tranches contre les surfaces qu'elles rencontrent perpendiculairement, est comme le produit de ces surfaces par les quarrés des vîtesses

moyennes, lesquelles sont comme les racines quarrées des hauteurs correspondantes AB, AG, dont elles sont les $\frac{2}{3}$ (art. 1184). Ainsi en appellant F le choc du fluide contre AB, *f* celui du même fluide contre AG, on aura $F : f :: AB \times AB : AG \times AG$: car les surfaces ayant une même largeur, sont comme les hauteurs AB & AG, & de plus les quarrés des vîtesses moyennes correspondantes sont comme AB & AG, puisque AB est le quarré de $\sqrt{AB}$, & AG celui de $\sqrt{AG}$.

Présentement pour avoir le choc des tranches mesurées par AG contre la surface oblique AF, il faut faire attention que le choc direct est au choc oblique, comme le sinus total est au sinus de l'angle d'inclinaison, ou comme AB est à AG : donc en appellant f la force du choc oblique, on aura $f : f :: AB : AG$; mais nous avions ci-devant $F : f :: AB^2 : AG^2$: donc en multipliant par ordre, & divisant les deux premiers termes par *f*, il viendra $F : f :: AB^3 : AG^3$; d'où il suit évidemment que dans cette hypothese, les forces du courant contre les surfaces égales AB & AF sont comme les cubes du sinus total & celui de l'angle d'inclinaison. C. Q. F. D.

Corollaire I.

1201. Si l'on a une autre inclinaison pour le même plan, comme AK, on aura encore $F : \varphi :: AB^3 : AL^3$: donc les forces contre la même surface différemment inclinée dans un fluide homogene, sont comme les cubes des sinus des angles d'inclinaison : car il est évident que puisque l'on a $F : f :: AB^3 : AG^3$, & que les antécédens de ces deux proportions sont les mêmes, les conséquens doivent aussi former une proportion : donc $f : \varphi :: AG^3 : AL^3$.

Corollaire II.

1202. Si les surfaces sont inégales & différemment inclinées dans un fluide de même densité, les forces du fluide contre ces mêmes surfaces, sont comme les produits de ces surfaces par les produits des cubes des sinus des angles d'inclinaison, par les quarrés des vîtesses moyennes correspondantes.

Pour démontrer ce corollaire, soient représentées les surfaces inégales par les lignes AF, *af*, & soient prises les lignes $AB = AF$, & $ab = af$, chacune perpendiculaire au courant. Soit F la force qui agit perpendiculairement contre la surface *Figure 432 & 433.*

AB, V la vîtesse moyenne, & aa la surface représentée par AB ou AF; soit pareillement f la force du courant contre la surface ab; v la vîtesse moyenne correspondante, & bb la surface représentée par ab ou af son égale. Soit de plus R le sinus total, S le sinus d'inclinaison du plan AF, & s le sinus d'inclinaison du plan af; on aura par la présente proposition $R^3 : S^3 :: F$ ou $(aa \times V^2) : \frac{aa \times V^2 \times S^3}{R^3}$, & ce quatrieme terme est la force qui agit contre la surface oblique AF; puisque la force qui agit contre AB est présentée par le produit de la surface par le quarré de la vîtesse. De même on a $R^3 : s^3 :: f$ ou $(bb \times vv) : \frac{bb \times vv \times s^3}{R^3}$. Les forces qui agissent contre les surfaces inégales & différemment inclinées, seront donc comme les deux derniers termes de ces deux proportions qui les expriment : donc si l'on appelle ces forces f & φ, on aura $f : \varphi :: \frac{aa \times V^2 \times S^3}{R^3} : \frac{bb \times vv \times s^3}{R^3} :: aa \times V^2 \times S^3 : bb \times vv \times s^3$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

1203. Si les densités D & d sont inégales, il faudroit encore multiplier les deux derniers termes des proportions précédentes par les mêmes densités, pour avoir le rapport des forces qu'ils expriment. On pourroit de cette proportion déduire une formule générale, pour déterminer tous les cas qui ont rapport aux différentes suppositions que l'on peut faire dans l'hypothese présente : mais il seroit inutile d'entrer dans le détail de tous ces cas particuliers, que l'on ne doit rechercher que lorsque l'on en a besoin.

REMARQUE I.

1204. Il faut bien remarquer que dans cette proposition & tous ses corollaires, on a supposé que les surfaces, par rapport auxquelles on estimoit le choc des fluides où elles étoient plongées, répondent toutes à la même tranche supérieure, que l'on suppose être la premiere du fluide, sans quoi le théorême ne seroit pas vrai, & alors on parviendroit aisément à fixer le choc, en déterminant la vîtesse moyenne comme nous l'avons fait (art. 1184). On remarquera encore que l'on pourroit trouver le choc des fluides de même ou de différentes densités, contre

contre des surfaces différemment inclinées, en supposant, par exemple, que les vîtesses de ces tranches croissent comme les hauteurs. Je me suis arrêté à la premiere hypothese, parce que c'est celle qui a lieu dans la nature des fluides.

REMARQUE II.

1205. M. *Mariotte* ayant fait plusieurs expériences pour mesurer le choc de l'eau, a trouvé que l'eau ayant un pied de vîtesse par seconde, fait un effort d'une livre & demie contre une surface d'un pied quarré. Or pour se servir de cette expérience à l'égard du choc que l'eau fait contre une surface, il faut avoir une pendule ou une montre qui marque les minutes bien exactement; ensuite attacher au bout d'un fil de soie un corps fort leger, comme, par exemple, un morceau de liege, qu'il faudra faire surnager dans le milieu du courant de l'eau, marquer un piquet à l'endroit où le corps aura commencé à suivre le courant, & faire ensorte d'accompagner ce corps le long du bord de l'eau; & quand on aura parcouru une longueur raisonnable, on prendra garde combien il se sera écoulé de minutes depuis le moment qu'on sera parti jusqu'à l'endroit où l'on aura cessé d'accompagner ce corps; & supposant qu'on ait mis 3 minutes, on mesurera bien exactement le chemin qu'à fait le corps pendant ce tems, que je suppose être, par exemple, de 120 toises. Or pour sçavoir le chemin que le corps a parcouru pendant une seconde, je multiplie 60 par 3, pour avoir 180 secondes (parce qu'une minute vaut 60 secondes), & voulant connoître la vîtesse de l'eau pendant une seconde, je réduis les toises en pieds pour avoir 720 pieds, que je divise ensuite par 180 secondes, qui donnent 4 au quotient: ainsi la vîtesse de l'eau pendant une seconde sera de 4 pieds.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

1206. *Connoissant la vîtesse de l'eau, trouver le choc de cette eau contre une surface donnée.*

Nous servant de l'expérience de M. *Mariotte*, rapportée dans la remarque précédente, on demande quel est le choc de l'eau contre une surface de 20 pieds quarrés, en supposant que cette

eau a 4 pieds de vîteſſe par ſeconde. Pour cela, il faut ſe rappeller que les chocs de l'eau avec des vîteſſes différentes contre des ſurfaces inégales & perpendiculaires au courant, ſont comme les produits des quarrés des vîteſſes par les ſurfaces oppoſées. L'on pourra donc dire : Si le quarré d'une ſeconde, qui eſt 1, multiplié par une ſurface d'un pied, qui eſt encore 1, donne une livre & demie pour l'effort de l'eau contre la ſurface d'un pied quarré, que donnera le produit du quarré de la vîteſſe de 4, qui eſt 16, par la ſurface de 20 pieds quarrés, qui eſt 320 pour le choc de l'eau contre la ſurface de 20 pieds? l'on trouvera 480 : ce qui fait voir que la ſurface doit faire un effort de 480 livres, pour être en équilibre avec le choc de l'eau.

APPLICATION.

1207. Si l'on vouloit trouver l'effort de l'eau contre les aubes d'un moulin, expoſées perpendiculairement à ſon courant, il faut connoître d'abord la vîteſſe de l'eau, & la grandeur des aubes : ainſi ſuppoſant que la vîteſſe de l'eau ſoit de 5 pieds par ſeconde, & les aubes de 6 pieds quarrés, l'on dira : Si le produit du quarré de la vîteſſe d'un pied par un pied quarré, fait un effort d'une livre & demie en une ſeconde, que fera le produit du quarré de la vîteſſe de 5 pieds par la ſurface de 6 pieds ? l'on trouvera pour l'effort que l'on cherche 225 livres.

PROPOSITION VI.

THÉOREME.

Figure 434. 1208. *Si l'on a un vaiſſeau rempli d'eau, qui ſoit toujours entretenu à la même hauteur, je dis que les chocs de l'eau, à la ſortie de deux ajutages égaux, ſeront dans la raiſon des hauteurs de l'eau au deſſus du centre des deux ajutages.*

DÉMONSTRATION.

Si le vaiſſeau ABCD eſt rempli d'eau, & qu'elle ſorte par les deux ajutages E & F, les vîteſſes de l'eau ſeront comme $\sqrt{BE}$ eſt à $\sqrt{BF}$; & ſi les ajutages ſont égaux, les quantités d'eau qui ſortiront dans le même tems, ſeront encore comme $\sqrt{BE}$ eſt à $\sqrt{BF}$: mais ces quantités d'eau peuvent être regardées comme les maſſes, & les racines de BE & BF comme leurs vîteſſes; par conſéquent le choc dont l'eau ſera capable,

à la sortie des deux ajutages, sera égal au produit de $\sqrt{BE} \times \sqrt{BE}$ & à $\sqrt{BF} \times \sqrt{BF}$, c'est-à-dire comme le quarré des racines des hauteurs de l'eau au dessus du centre des ajutages; mais ces deux produits ne sont autre chose que BE & BF: par conséquent les chocs de l'eau, à la sortie des ajutages égaux, sont comme les hauteurs de l'eau au dessus du centre des ajutages.

COROLLAIRE.

1209. Il suit delà que si les ajutages sont de différentes grandeurs, les chocs de l'eau à leurs sorties, seront comme les produits des quarrés des diametres des ajutages par la hauteur de l'eau qui répond à leur centre, s'ils sont circulaires; mais s'ils sont de toute autre figure, il faudra multiplier leur capacité par la hauteur de l'eau qui répond au centre.

DISCOURS

SUR LA NATURE ET LES PROPRIETÉS DE L'AIR, pour servir d'introduction à la Physique, servant aussi à rendre raison de l'effet des machines hydrauliques.

Quoique les Anciens nous aient laissé beaucoup de belles connoissances, il semble qu'on pourroit leur reprocher de n'avoir point assez étudié la nature, surtout quand on fait réflexion aux idées fausses qu'ils avoient de l'air: ce n'est pourtant pas manque qu'ils n'aient eu assez de tems pour en découvrir les propriétés; mais apparemment qu'il en étoit de ceci comme d'une infinité d'autres choses qui étoient reservées aux découvertes de notre tems: & pour ne parler que de l'air, nous allons faire voir qu'il a de la pesanteur, qu'il a du ressort, & qu'il est capable d'être condensé & dilaté.

Avant M. *Descartes* & M. *Pascal*, si l'on demandoit aux Philosophes pourquoi, en tirant le piston d'une seringue ou d'une pompe, l'eau monte & suit comme si elle adhéroit; pourquoi quand on remplit d'eau un siphon, & qu'on met chaque jambe dans un vaisseau plein d'eau, si un des vaisseaux est un peu plus élevé que l'autre, l'eau monte par le siphon, sort du vaisseau qui est le plus élevé, pour descendre dans celui

qui est un peu plus bas, tant que toute l'eau de celui d'en haut soit entrée dans celui d'en bas; ils répondoient que la nature avoit de l'horreur pour le vuide, ou bien que la nature abhorroit le vuide, comme si elle étoit capable de passion, pour avoir de l'horreur pour quelque chose: car à leur sens ils parloient comme si la nature faisoit de grands efforts pour éviter le vuide, quoiqu'on voie parfaitement qu'elle ne fait aucune chose pour l'éviter, ni pour le rechercher, & que le vuide ou le plein lui sont fort indifférens.

Il est bien vrai que l'eau monte dans une pompe, quand il n'y a point de jour par où l'air puisse entrer, & qu'ainsi il y auroit du vuide, si l'eau ne suivoit pas le piston, & même qu'elle n'y monte pas, quand il y a des fentes par où l'air peut entrer pour la remplir. De même si l'on fait une petite ouverture au haut d'un siphon, par où l'air puisse s'introduire, l'eau de chaque branche tombe dans son vaisseau, & le tout demeure en repos: d'où l'on a conclu que la nature avoit de l'horreur pour le vuide, puisqu'aussitôt qu'il n'y avoit point d'air dans un tuyau, l'eau montoit d'elle-même, & que l'air survenant, l'eau se remettroit dans son premier état; ce qui a fait croire qu'elle n'y montoit que pour empêcher le vuide.

Mais si l'on fait voir que ces effets (de même que plusieurs autres que nous expliquerons dans la suite) ne sont causés que par la pesanteur de l'air, on n'aura plus lieu de douter que la nature n'a point d'horreur pour le vuide, qu'elle suit les loix de la méchanique, aussi-bien par rapport à l'air, que par rapport aux liqueurs de différentes pesanteurs, & que ce qu'on peut dire de l'air n'est qu'une suite des principes que l'on a démontrés dans le Traité précédent.

Pour être convaincu de la pesanteur de l'air par une expérience dont il est aisé de se convaincre, prenez un tuyau de verre de 20 ou 24 pouces, bien bouché par une de ses extrêmités, après qu'on l'aura rempli de mercure; bouchez ensuite le bout qui est ouvert avec le doigt, & soutenez le tuyau perpendiculairement, ensorte que le bout ouvert soit en bas: si vous plongez dans un vase où il y aura du mercure le bout que vous aurez bouché avec le doigt, & qu'après cela vous laissiez la liberté au mercure de descendre, vous verrez que bien loin qu'il retombe dans le vase pour se mêler avec l'autre, il demeurera suspendu de lui-même. La raison de cet effet vient

de la pesanteur de l'air, qui presse le mercure qui est dans le vase, & qui ne presse pas celui qui est dans le tuyau, qui est moins pesant qu'une colonne d'air qui aura la même base : ainsi c'est le poids de l'air qui force le mercure de rester dans le tuyau ; & pour en être plus certain, il n'y a qu'à ouvrir le bout d'en haut qu'on a bouché, & aussitôt vous verrez le mercure descendre, & se mêler avec celui qui est dans le vase.

Si l'on prend encore un tuyau de 20 ou de 24 pouces, rempli de mercure, bouché par une de ses extrêmités, & que l'autre extrêmité soit recourbée, vous verrez que le mercure, quoique le tuyau ne soit pas plongé dans un vase, se maintiendra suspendu sans sortir par le bout recourbé, à cause que le poids de l'air qui pese sur le mercure du bout recourbé, est plus pesant que le mercure qui est dans le tuyau.

Si au lieu d'un tuyau de 20 ou 24 pouces l'on se sert d'un qui ait 25 ou 26 pieds, & qu'au lieu de le remplir de mercure, on le remplisse d'eau, l'on verra que l'eau demeurera suspendue comme le mercure, quoique le tuyau soit plus grand : car comme l'eau est beaucoup plus legere que le mercure, on en mettra une bien plus grande hauteur dans un tuyau que de mercure : car nous sçavons que les hauteurs de différentes liqueurs sont comme les poids des mêmes liqueurs.

Cependant quoique la pesanteur de l'air soutienne suspendus le mercure & l'eau dans des tuyaux de la grandeur que nous venons de dire, il ne faut pas croire que si l'on remplissoit d'eau un tuyau qui auroit beaucoup plus de 25 ou 26 pieds, comme, par exemple, de 40 pieds, que l'eau y demeurera toute suspendue : car l'air ne peut pas soutenir un plus grand poids que le sien ; & c'est par le moyen des tuyaux remplis de mercure ou d'eau que l'on mesure la pesanteur de l'air, comme on le va voir.

Si l'on a un tuyau de verre de 40 pouces, que l'on remplisse de mercure, ensorte qu'il y ait toujours une de ses extrêmités bouchée, & que l'autre bout auquel on aura mis le doigt, soit plongé dans un vase où il y ait du mercure, ou que ce bout soit seulement recourbé, & qu'on le soutienne perpendiculairement dans l'air ou dans le mercure, car cela ne fait rien ; l'on verra qu'aussitôt qu'on aura ôté le doigt qu'on avoit appliqué sur le bout ouvert, le mercure baissera tant qu'il sera parvenu à la hauteur de 28 pouces, qui est la hauteur où une

colonne de mercure est en équilibre avec la colonne d'air qui lui répond.

Si l'on prend un tuyau de 40 pieds, conditionné comme ceux dont nous avons parlé, l'on vetra que l'ayant rempli d'eau, elle descendra tant qu'elle soit à la hauteur de 31 pieds, parce qu'une pareille colonne d'eau est en équilibre avec celle de l'air qui lui répond, ou bien avec une colonne de vif-argent de 28 pouces: mais comme nous sçavons qu'un pied cube d'eau pese 72 livres, si l'on multiplie 31 par 72, l'on aura 2232, qui est la quantité de livres que pese une colonne d'air, qui auroit un pied quarré de base, & pour hauteur celle de l'atmosphere *.

* L'on nomme atmosphere l'étendue de l'air qui est renfermé dans le tourbillon de la terre.

Cette épreuve est encore confirmée par les pompes aspirantes & les seringues: car aussitôt qu'on tire le piston d'une pompe, l'eau suit le piston; & si l'on continue à lever le piston, l'eau suivra toujours, mais non pas à la hauteur que l'on voudra, puisqu'elle ne passe pas 31 pieds: car aussitôt qu'on veut la tirer plus haut, le piston ne tire plus l'eau, & elle demeure immobile & suspendue à cette hauteur, où elle se trouve en équilibre avec le poids de l'air qui pese au dehors du tuyau sur l'eau qui l'environne. L'on peut remarquer ici, pour désabuser ceux qui croient que l'eau monte dans les pompes, parce que la nature a de l'horreur pour le vuide, que quand on a haussé le piston au-delà de 31 pieds, l'eau demeure à cette hauteur, & il se trouve un intervalle entre l'eau & le piston, où il n'y a point, ou très-peu d'air que l'eau ne peut remplir, ne pouvant être poussée plus haut par l'air extérieur. Si nos Philosophes avoient pris garde à cela, ils auroient sans doute été fort étonnés de voir que la nature cesse d'avoir de l'horreur pour le vuide au-delà de 31 pieds de hauteur, & ils auroient pu l'accuser d'avoir du caprice, puisqu'à une certaine hauteur elle ne peut supporter le vuide, & qu'après cela le vuide lui devient indifférent.

Si l'on se sert d'une seringue longue de 3 pieds ou de 3 pieds & demi, l'on vetra encore que mettant le bout du tuyau, qui est ouvert dans un vase de vif-argent, qu'en tirant le piston, le vif-argent montera à la hauteur de 28 pouces, & qu'inutilement on levera le piston pour faire monter le vif-argent plus haut, qu'il demeurera toujours à la hauteur qui le met en équilibre avec le poids de l'air: ainsi l'eau, le vif-argent & l'air demeurent en équilibre, quand les hauteurs sont entr'elles

comme leurs poids ; & cela de quelque grosseur que soient les tuyaux, parce que les liqueurs ne pesent pas selon la grandeur de leurs bases, mais selon leurs hauteurs.

Pour expliquer comme la pesanteur de l'air fait monter l'eau dans les siphons, nous supposerons un siphon dont une des jambes soit environ haute d'un pied, & l'autre d'un pied un pouce. Si on le remplit d'eau, & qu'on bouche bien les deux ouvertures, pour qu'elle ne puisse pas sortir, & qu'après cela l'on ait deux vaisseaux, dont l'un soit un peu plus élevé que l'autre, & que le plus élevé soit rempli d'eau; mettant la plus courte jambe du siphon dans le vaisseau plus élevé, & la plus longue dans celui qui est un peu plus bas, la courte jambe trempant dans l'eau, aussitôt qu'on aura débouché les ouvertures, l'eau qui est dedans, au lieu de descendre, cherchera à monter : car l'eau qui est dans les deux vaisseaux étant pressée par l'air, & non pas celle qui est dans le siphon, la forcera d'y entrer pour monter bien plus haut, s'il se pouvoit, puisqu'elle ne montera que d'un pied, au lieu que le poids de l'air est capable de la faire monter de 31 pieds.

D'où il arrive que l'eau de chaque jambe étant poussée au haut du siphon, elle se combat à cet endroit ; de sorte qu'il faut que celle qui a le plus de force l'emporte sur celle qui en a moins : mais comme l'air a plus de hauteur d'un pouce sur le vaisseau plus bas que sur le vaisseau plus élevé, il pousse en haut l'eau de la longue jambe plus fortement que celle qui est dans l'autre ; d'où il semble d'abord que l'eau doit être poussée de la plus longue jambe dans la plus courte ; mais le poids de l'eau de chaque jambe, quoiqu'il résiste à l'air, ne résiste pas également : car comme l'eau de la longue jambe a plus de hauteur d'un pouce que celle de la petite, elle résiste plus fortement de la force que lui donne la hauteur d'un pouce d'eau. Or elle n'est poussée en haut plus que celle de l'autre jambe, que par la hauteur d'un pouce d'air ; mais le pouce d'eau qui est dans la plus longue jambe, a plus de force pour descendre que le pouce d'air n'en a pour le faire monter ; puisqu'un pouce d'eau est plus pesant qu'un pouce d'air : ainsi l'eau de la plus courte jambe est poussée en haut avec plus de force que celle de la plus grande ; ce qui fait qu'elle monte pour passer dans l'autre vaisseau, & continuera à monter tant qu'il y aura de l'eau dans le vaisseau qui lui répond.

C'eſt ainſi que toute l'eau du vaiſſeau le plus élevé, montera & ſe rendra dans le plus bas, tant que la branche du ſiphon, qui y trempe, ſera au deſſous d'une hauteur de 31 pieds: car comme nous l'avons dit, le poids de l'air peut bien hauſſer & tenir ſuſpendue l'eau à cette hauteur; mais dès que la branche qui trempe dans le vaiſſeau élevé excédera cette hauteur, il arrivera que le ſiphon ne fera plus ſon effet, j'entends que l'eau du vaiſſeau élevé ne montera plus en haut du ſiphon pour ſe rendre dans l'autre, parce que le poids de l'air ne peut pas l'élever au-delà de 31 pieds; de ſorte que l'eau ſe diviſera au haut du ſiphon; & tombera de chaque jambe dans ſon vaiſſeau, juſqu'à ce qu'elle ſoit reſtée à la hauteur de 31 pieds au deſſus de chaque vaiſſeau, où elle demeurera en repos ſuſpendue à cette hauteur par le poids de l'air qui la contre-peſe.

Il arrive pluſieurs autres choſes dans la nature, que les Anciens ont toujours attribuées à l'horreur du vuide, mais qui n'ont cependant d'autre cauſe que la peſanteur de l'air: par exemple, ſi deux corps fort polis ſont appliqués l'un contre l'autre, l'on trouve une extrême réſiſtance à les ſéparer, & cette réſiſtance même eſt ſi grande, que l'on a cru qu'il n'y avoit point de force humaine qui puiſſe les déſunir. Cependant ſi l'on fait attention que n'y ayant point d'air entre ces deux corps, ſi l'on tient celui d'en haut avec la main, il doit arriver que celui d'en bas demeurera ſuſpendu, puiſqu'il eſt preſſé par tout le poids de l'air qui le touche par deſſous, & qui fait qu'on ne peut les ſéparer qu'on n'emploie une force plus grande que celle du poids de l'air; tellement que ſi ces deux corps ſont, par exemple, chacun d'un pied cube, & qu'ils en aient la figure, ils ſeront preſſés l'un contre l'autre par une force de 2232 livres, qui eſt le poids d'une colonne d'air, qui auroit un pied quarré de baſe: ainſi pour vaincre la force de l'air, afin de ſéparer ces deux corps, il faut employer une force plus grande que celle de 2232 livres, & pour lors ces deux corps ſe déſuniront ſans aucune difficulté, puiſqu'il importe fort peu à la nature qu'ils ſoient ſéparés ou non.

L'expérience nous fait voir encore qu'un ſoufflet, dont toutes les ouvertures ſont bien bouchées, eſt très-difficile à ouvrir, trouvant de la réſiſtance, comme ſi les aîles étoient collées: ſi on demande la cauſe de cet effet, on n'en trouvera pas d'autre que celle de la peſanteur de l'air: car comme il preſſe les aîles du

du soufflet, sans pouvoir s'introduire dedans, l'on ne peut lever une des aîles sans lever aussi toute la masse de l'air qui est au dessus, qui résistera d'autant plus, que les aîles du soufflet auront de capacité, tellement que si elles avoient un pied & demi de superficie, il faudroit une force plus grande que celle de 3348 livres, qui est égale au poids de l'air qui répond à un plan d'un pied & demi de superficie; mais dès que l'on fait une ouverture au soufflet, l'air qui entre dedans fait équilibre avec celui de dehors; & l'on ne trouve plus de difficulté à l'ouvrir.

De même si l'on demande pourquoi en mettant la bouche sur l'eau, elle monte lorsque l'on aspire, comme cela arrive aussi avec un chalumeau de paille, il n'y a qu'à considérer que l'eau est pressée de toutes parts par le poids de l'air, excepté à l'endroit de la bouche, où le chalumeau est appliqué, parce qu'en aspirant il arrive que les muscles de la respiration élevant la poitrine, font la capacité du dedans plus grande; ce qui donne à l'air du dedans plus de place à remplir qu'il n'avoit auparavant, & lui donne moins de force pour empêcher l'eau d'entrer dans la bouche, que l'air du dehors n'en a pour l'y faire monter: ce qui devient le même cas que celui qui fait que l'eau monte dans les pompes & dans les seringues.

Comme la pesanteur de l'air n'est pas toujours la même, & qu'elle varie selon qu'il est plus ou moins chargé de vapeurs, ses effets varient aussi continuellement dans un même lieu; & c'est ce qu'on remarque par le barometre, où le mercure s'éleve quelquefois au dessus de 28 pouces, & quelquefois descend & se met au dessous; quelque tems après il remonte, & toujours dans une vicissitude continuelle qui suit celle de l'air. La même chose arrive par conséquent dans les pompes où l'eau monte quelquefois dans un tems à 31 pieds & demi, puis elle revient à 31 pieds, puis elle baisse, & n'est plus qu'à la hauteur de 30 pieds & quelques pouces, étant assujetties, comme le barometre, aux différentes pesanteurs de l'air.

Comme l'air sur les montagnes fort élevées, ne pese pas tant que sur le bord de la mer, que nous prendrons pour le lieu le plus bas de la terre, l'expérience fait voir que les pompes qui sont sur les lieux fort élevés ne font pas monter l'eau si haut; l'on a même remarqué que sur une montagne élevée de 600 toises, l'eau, au lieu de monter à 31 pieds, comme nous

l'avons dit, ne montoit qu'à 26 pieds quelques pouces: le même changement arrive dans les lieux qui sont fort bas, où l'eau monte quelquefois jusqu'à 32 ou 33 pieds; mais ces changemens s'observent bien mieux avec le barometre, qui peut servir non seulement à connoître la pesanteur de l'air dans les lieux différemment élevés, mais encore à mesurer la hauteur des montagnes, & même celle de l'atmosphere.

Car si on est au pied d'une montagne, & que le mercure à cet endroit soit élevé de 28 pouces, l'on verra qu'à mesure que l'on montera pour en gagner le sommet, le mercure au lieu de rester à la hauteur de 28 pouces, baissera, parce qu'étant soutenu par une moindre colonne d'air, il faut nécessairement qu'il baisse pour se mettre en équilibre avec cette colonne: ainsi il demeure suspendu à une hauteur d'autant moindre, qu'on le porte à un lieu plus élevé; de sorte que s'il étoit possible d'aller jusqu'au haut de l'atmosphere pour en sortir entiérement dehors, le vif-argent tomberoit, sans qu'il en restât aucune partie, puisqu'il n'y auroit plus aucun air pour le contrepeser.

L'on a fait plusieurs belles expériences sur la pesanteur de l'air. La premiere a été faite sur une des plus hautes montagnes d'Auvergne, proche Clermont, que l'on nomme *la montagne du Puy de Dome*, & a fait voir qu'ayant un tuyau plein de mercure, bouché par un bout, & recourbé par l'autre, le mercure étant à la hauteur de 26 pouces 5 lignes au pied de la montagne, que partant delà pour aller au sommet, à 10 toises le mercure étoit descendu d'une ligne, qu'à 20 toises il étoit descendu de 2 lignes, qu'à 100 toises il étoit descendu de 9 lignes, & qu'étant monté de 500 toises, il étoit descendu de 3 pouces 10 lignes; & l'on a trouvé qu'en descendant, pour venir au pied de la montagne, à chaque endroit où le mercure étoit descendu, il est remonté à la même hauteur, & s'est retrouvé à 26 pouces 5 lignes, au pied de la montagne, à l'endroit d'où l'on étoit parti. Il ne faut pas être surpris si, après avoir dit ail leurs que la hauteur du mercure étoit ordinairement de 28 pouces pour être en équilibre avec l'air, on ne la trouve que de 26 pouces 5 lignes au plus bas lieu de la montagne du Puy de Dome, c'est que cet endroit-là est apparemment plus élevé que le bord de la mer, où effectivement le mercure est à la hauteur de 28 pouces: mais quand le barometre se trouve

dans un lieu plus élevé que le bord de la mer, le mercure est toujours au dessous de 28 pouces, selon que la colonne d'air qui y répond, est moindre que sur le bord de la mer.

Ceux qui ne raisonnent pas ont de la peine à s'imaginer que l'air ait de la pesanteur, parce qu'ils n'en sentent pas le poids; mais si on leur fait remarquer qu'un animal qui est dans l'eau a la liberté de se mouvoir sans sentir le poids de l'eau, à cause qu'il en est pressé également de toutes parts, ils ne s'étonneront plus si on ne s'apperçoit pas du poids de l'air qui nous presse aussi également de toutes parts, & qui est en équilibre avec celui que nous avons dans les poulmons & dans le sang, & avec celui qui est généralement répandu par tout le corps.

Si l'on a cru si long-tems que l'air étoit léger, c'est parce que les anciens Auteurs l'ont dit, & que ceux qui font profession de les croire, les suivoient aveuglément, aux dépens même de la vérité & de la raison : l'on a même été si éloigné de penser que la pesanteur de l'air fût la cause de l'élévation de l'eau dans les pompes, qu'on a cru qu'il suffisoit de tirer l'air avec un piston pour faire monter l'eau aussi haut que l'on voudroit, & qu'on pouvoit faire passer l'eau d'une riviere par dessus une montagne pour la faire rendre dans le vallon opposé, pourvu qu'il soit un peu plus bas que la riviere, par le moyen d'un siphon placé sur la montagne, dont l'une des jambes répondroit dans la riviere, puisque pour cela il ne faudroit que pomper l'air du siphon, & il n'y a pas plus de 100 ans que l'on étoit dans cette erreur.

L'air a encore la propriété de pouvoir être extrêmement condensé & dilaté, & de conserver toujours une vertu de ressort, par laquelle il fait effort pour repousser les corps qui le pressent, jusqu'à ce qu'il ait repris son existence naturelle. L'air se dilate aussi très-facilement par la chaleur, & se condense par le froid, comme on le remarque dans le thermometre, où l'on voit que l'air qui est dans l'esprit de vin fait monter cette liqueur à vue d'œil dans le tuyau, quand on l'approche du feu, ou quand le soleil donne dessus; & au contraire on s'apperçoit qu'elle baisse beaucoup, quand il fait fort froid, ou quand on met le tuyau dans l'eau froide.

L'air qui est proche de la surface de la terre, est fort condensé, parce qu'il n'a pas son étendue naturelle : car puisque

celui qui est au dessus est pesant, & qu'il a une vertu de ressort, celui que nous respirons étant chargé du poids de tout l'atmosphere, est plus condensé que celui qui est tout au haut : par conséquent celui qui est entre ces deux extrémités, doit être moins condensé que celui qui touche la terre, & moins dilaté que celui qui est au haut de l'atmosphere. Mais pour avoir une idée claire de ceci, supposons un grand amas de laine cardée de la hauteur de 80 ou 100 toises; il est constant que la laine qui est en bas étant chargée de toute la pesanteur de celle qu'elle porte, ne sera pas si étendue que celle qui est tout au haut, & celle qui est dans le milieu ne sera pas si comprimée que celle qui est au dessous, ni si étendue que celle qui est au dessus. Or si l'on prend une poignée de la laine qui est en bas, & qu'on la porte au dessus, en la tenant toujours pressée de la même façon qu'elle l'étoit dans l'endroit d'où on l'a tirée, elle s'élargira d'elle-même, & prendra la même étendue que celle qui est tout en haut; & au contraire si on prend dans la main de celle qui est en haut, en lui laissant son étendue naturelle, sans la presser aucunement, l'on verra que la mettant sous celle qui est en bas, elle se comprimera de la même façon que celle qui est en bas. L'on peut dire la même chose de l'air : car si l'on prend une vessie bien séche, soufflée à la moitié de la grosseur qu'elle devroit avoir, si on l'avoit bien remplie d'air, si après l'avoir bien fermée, on la porte au haut d'une montagne fort élevée, l'on verra qu'à mesure que l'on montera, la vessie deviendra plus enflée qu'elle n'étoit auparavant, & lorsqu'on sera parvenu au sommet, on la verra ronde & toute aussi enflée qu'elle eût été au pied de la montagne, si on l'avoit soufflée autant qu'on fait ordinairement pour la rendre sphérique. Cependant il est à remarquer que l'air qui est dans la vessie est toujours le même qu'il étoit au pied de la montagne, n'étant point augmenté ni diminué; tout le changement qui lui est arrivé, c'est de s'être dilaté considérablement, c'est-à-dire qu'il occupe un bien plus grand espace qu'auparavant; & il est à présumer que si on avoit porté cette vessie au haut d'une montagne beaucoup plus élevée que celle que je suppose ici, l'air se seroit dilaté jusqu'au point de crever la vessie par la force de son ressort. La raison de cette dilatation vient sans doute de ce que l'air qu'on a mis dans la vessie au pied de la montagne, étant pressé par le poids de l'air

extérieur, celui de dedans n'a pas plus de liberté de prendre ſon étendue naturelle que celui de dehors, puiſqu'ils ſont également chargés du poids de l'atmoſphere; mais quand la veſſie ſe trouve au haut de la montagne, l'air qui eſt à cette hauteur n'étant point ſi chargé que celui d'en bas, ne preſſe pas tant les corps qu'il environne; ce qui fait que celui qui eſt dans la veſſie ne trouvant pas une ſi grande réſiſtance pour s'étendre qu'auparavant, ſe dilate & occupe un bien plus grand eſpace que celui où il étoit renfermé dans le lieu d'où on l'a ſorti.

Il arrive tout le contraire, ſi on remplit, autant qu'il eſt poſſible, une veſſie au ſommet d'une haute montagne : car ſi l'on deſcend pour venir dans un lieu beaucoup plus bas, l'on voit que la veſſie de bien tendue qu'elle étoit auparavant, devient flaſque & molle à meſure que l'on deſcend, tant qu'il ne paroît preſque pas qu'elle ait été enflée; ce qui ne peut manquer d'arriver par les raiſons que nous venons de dire : car l'air qui eſt dans la veſſie ſe trouvant comprimé de tous côtés par celui qui l'environne, qui eſt beaucoup plus peſant que ſur la montagne, il eſt forcé de ſe ramaſſer, c'eſt-à-dire de ſe condenſer pour occuper un plus petit eſpace que celui qu'il tenoit dans l'endroit d'où on l'a tiré.

C'eſt ſans doute à la dilatation & à la condenſation que l'air prend, quand il eſt porté dans un lieu plus élevé ou plus bas que celui d'où il eſt ſorti, qu'on doit attribuer l'incommodité que reſſentent ceux que le beſoin conduit ſur des hautes montagnes : car comme ils ont dans les poulmons & dans le ſang un air plus condenſé que celui de l'endroit où ils ſe trouvent, les chairs n'étant plus preſſées ſi fortement par l'air que de coutume, laiſſent à celui qui eſt dans le corps la liberté de ſe dilater; ce qui ne peut ſe faire ſans déranger le tempérament de ceux à qui cela arrive. L'on pourra expliquer par un raiſonnement tout contraire à celui-ci la peine que reſſentent ceux qui d'un lieu haut viennent habiter un lieu bas.

La raréfaction de l'air eſt très-conſidérable par les conſéquences que l'on a tirées de pluſieurs expériences; & M. *Mariotte*, qui en a fait plus que perſonne, fait voir qu'un certain volume d'air, que nous reſpirons, peut ſe raréfier de 4000 fois pour être dans ſon étendue naturelle, c'eſt-à-dire que s'il étoit poſſible de porter un pied cube d'air de deſſus la ſurface de la terre au haut de l'atmoſphere, il occuperoit un eſpace

de 4000 pieds cubes, & peut-être même d'une bien plus grande étendue. Si cette estimation approche de la vérité, il en sera la même chose de la raréfraction de l'air naturel, c'est-à-dire de l'air qui est au haut de l'atmosphere, sur la surface de la terre, que lorsqu'il sera comprimé par l'air du dehors; il occupera un volume quatre mille fois plus petit, pour devenir semblable à celui que nous respirons : mais comme l'expérience fait voir que celui-ci peut être extrêmement condensé, celui du haut de l'atmosphere qui se seroit condensé de quatre mille fois, pour devenir pareil au nôtre, peut donc l'être bien davantage de quatre mille fois, pour devenir aussi serré que le nôtre peut être réduit.

Nous avons fait voir que quand on portoit un barometre du pied d'une montagne au sommet, à mesure que l'on montoit, le mercure baissoit pour se mettre en équilibre avec la colonne d'air, qui devient d'autant moindre, que la montagne est plus élevée; & en parlant de l'expérience qui a été faite sur le Puy de Dome, nous avons dit qu'étant monté de 10 toises, le mercure étoit descendu d'une ligne; qu'étant monté de 20 toises, il étoit descendu de 2 lignes; qu'étant monté de 100 toises, il étoit descendu de 9 lignes; enfin qu'étant monté de 500 toises, il étoit descendu de 8 pouces 10 lignes, ou autrement de 46 lignes, où l'on peut remarquer que la diminution du mercure n'est pas dans la raison des différentes hauteurs où le barometre a été porté sur la montagne : car pour que cela fût ainsi, il faudroit qu'à 100 toises le mercure fût descendu de 10 lignes, & qu'à 500 toises il fût descendu de 50 lignes : pour lors l'on auroit deux progressions arithmétiques, l'une pour le barometre, & l'autre pour les différentes hauteurs sur lesquelles il seroit porté; les termes de la premiere progression se surpasseroient d'une unité, & les termes de la seconde se surpasseroient de 10 toises; ce qui seroit fort commode pour mesurer la hauteur des montagnes & celle de l'atmosphere, puisque le mercure descendant d'une ligne de 10 toises en 10 toises, l'on n'auroit qu'à observer de combien de lignes il seroit descendu en allant du pied de la montagne au sommet; ensuite multiplier cette quantité de lignes par 10 toises, & le produit donneroit la hauteur de la montagne au dessus du vallon qui seroit au pied : de même pour sçavoir la hauteur de l'atmosphere, il n'y auroit qu'à multiplier 356

lignes, qui est la hauteur du mercure sur le bord de la mer, par 10 toises, l'on auroit 3360 toises pour la hauteur de l'atmosphere : mais comme la pesanteur de l'air ne suit point une semblable progression, & qu'elle en suit une autre toute différente, voici ce que MM. *Cassini* & *Maraldi* ont fait pour la trouver, que j'ai tiré des Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'année 1703.

Ils prirent d'abord géométriquement la hauteur des montagnes qui se trouverent sur le chemin de la Méridienne ; & quand ils purent se transporter jusqu'au haut, ils observerent quelle étoit la descente du barometre. Ils avoient fait le même jour, lorsqu'il avoit été possible, une observation du barometre sur le bord de la mer, ou dans un lieu dont ils connoissoient l'élévation sur le niveau de la mer, où en tout cas ils ne pouvoient manquer de trouver à leur retour des observations perpétuelles du barometre qu'on fait à l'Observatoire, que l'on sçait être plus haut que la mer de 46 toises.

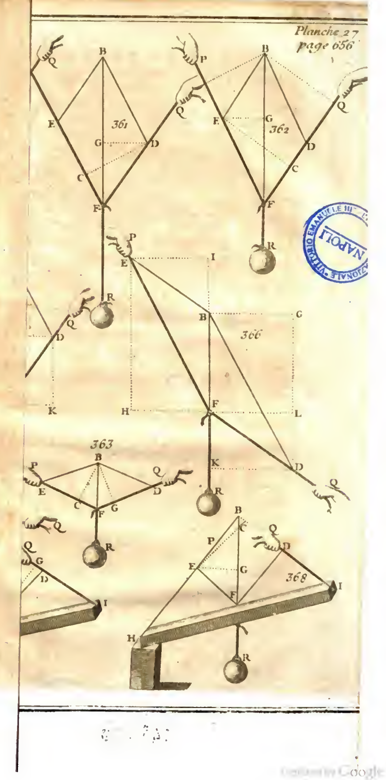
Par les comparaisons des différentes hauteurs des montagnes, avec les différentes descentes du mercure sur ces montagnes, ces Messieurs jugerent que la progression, suivant laquelle les colonnes d'air qui répondoient à une ligne de mercure, qui vont en augmentant des hauteurs, quand on descend de la montagne, pouvoient être telles que la premiere colonne ayant 61 pieds, la seconde en eût 62, la troisieme 63, & ainsi toujours de suite, du moins jusqu'à la hauteur d'une demi-lieue ; car ils n'avoient pas observé sur des montagnes plus élevées.

En observant cette progression, ils retrouverent toujours, à quelques toises près, par la descente du mercure sur une montagne, la même hauteur de cette montagne qu'ils avoient eue immédiatement après l'opération géométrique.

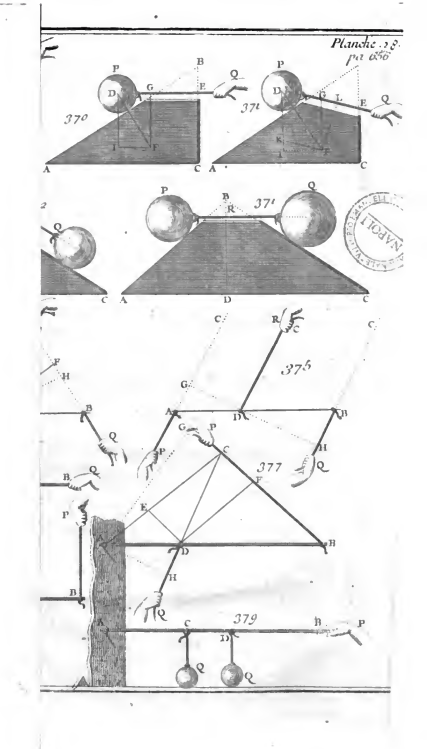
On peut donc, en admettant cette progression, mesurer par un barometre, qu'on portera sur une montagne, combien elle sera élevée sur le niveau de la mer, pourvu qu'on puisse sçavoir à quelle hauteur étoit à peu près en même tems le barometre sur le bord de la mer, ou dans un lieu dont l'élévation au dessus de la mer soit connu ; & cette méthode réussira le plus souvent, quand même la montagne seroit fort éloignée de la mer ; que si cette progression régnoit dans tout l'atmosphere, il seroit bien facile d'en trouver la hauteur : car les

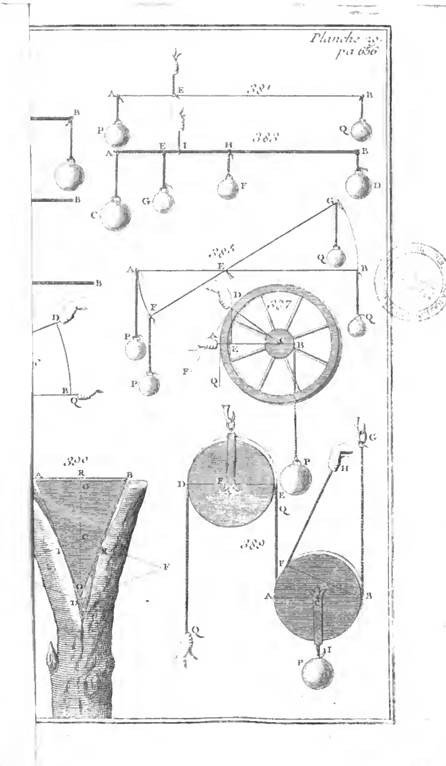
28 pouces de mercure étant la même chose que 336 lignes, on auroit une progression arithmétique de 336 termes, dont la différence seroit l'unité, & le premier terme de 61 : mais comme l'on n'est pas sûr que la pesanteur de l'air suive une semblable progression, le principe paroît trop incertain pour qu'on puisse en rien conclure pour la hauteur de l'atmosphere, qui ne se trouveroit que de six lieues & demie, selon cette progression, au lieu que M. *Mariotte* a fait voir par une nouvelle maniere de calculer la hauteur de l'atmosphere, qu'elle avoit environ 25 lieues, qui est la hauteur que tous les Physiciens lui donnent présentement : mais la progression précédente peut être fort utile pour mesurer la hauteur d'une montagne qui ne passe point 1200 toises.

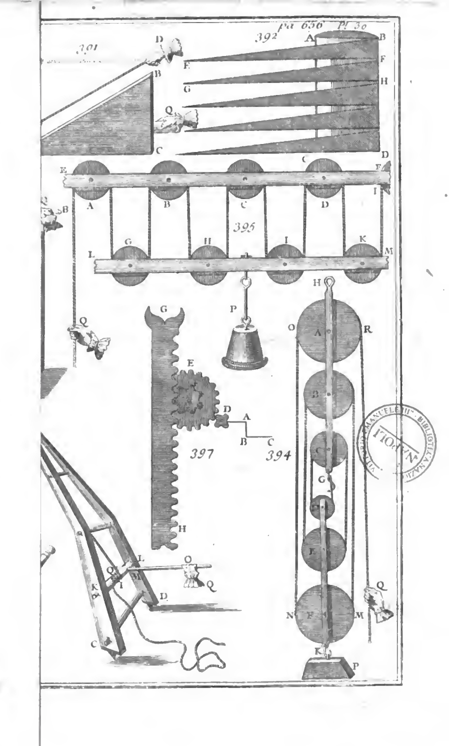
Fin du Cours de Mathématique.


361
362
363
366
368


Digitized by Google


Planche 18.
370
371
375
377
379
P
Q
A
B
C
D
E
F
G
H


Planche 29.
pa 656
381
383
385
387
389
390


pa. 656 Pl. 30
391
392
395
397
394
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
P
Q
R

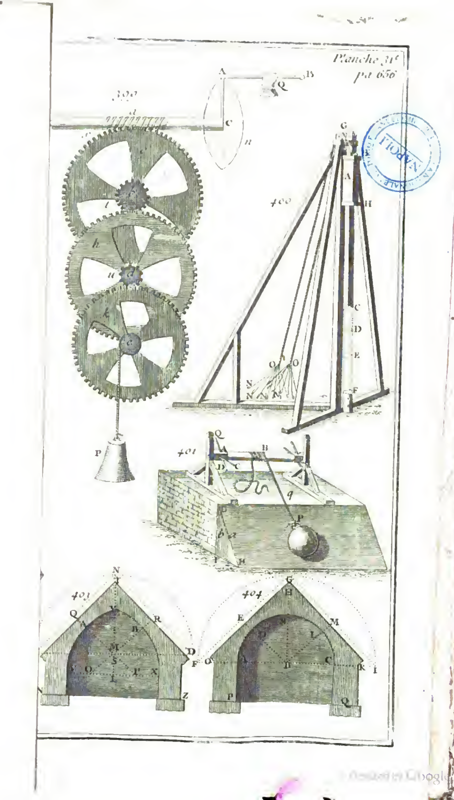
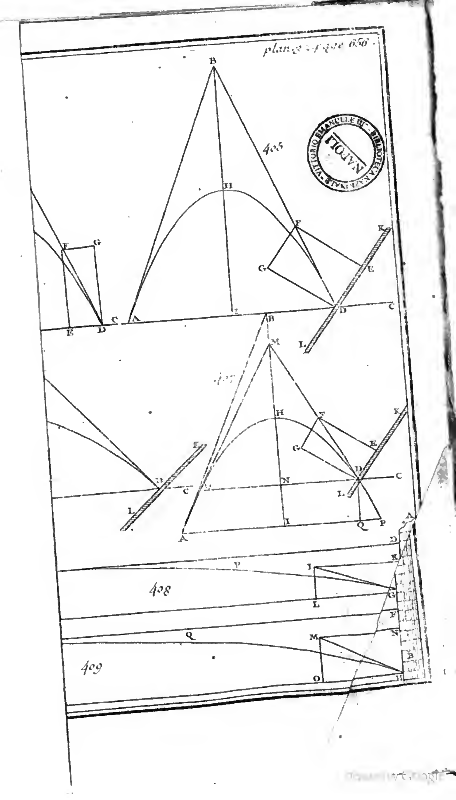
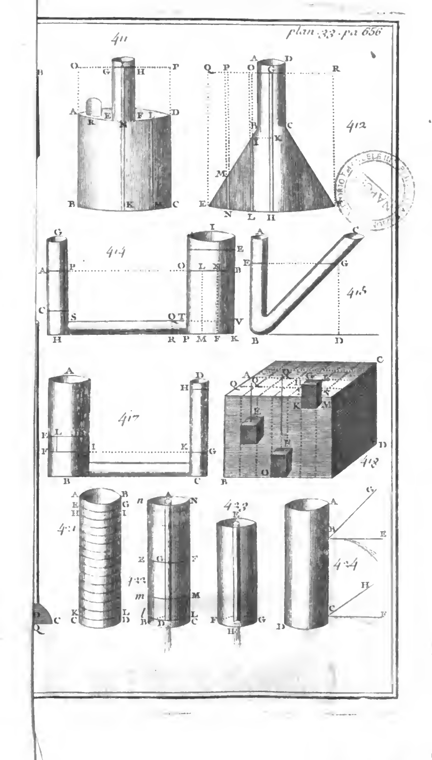
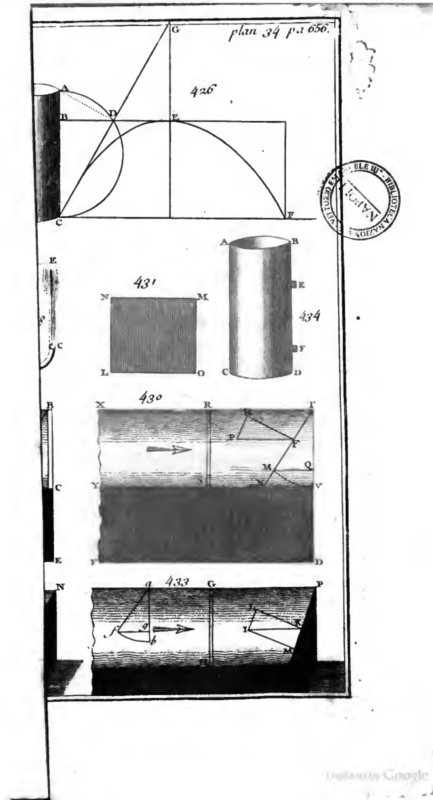


Planche 31e
pa. 656
399
400
401
403
404


planche 4 page 656
406
407
408
409
B
H
F
G
K
E
D
C
A
I
L
M
N
Q
P
O




plan. 33. pa 656
411
412
414
415
417
418
421
422
423
424


plan 34 p.a 656.
426
A
B
C
D
E
F
G
431
N
M
L
O
434
A
B
E
F
C
D
430
X
R
T
P
F
M
Q
N
Y
S
V
F
D
433
G
N
P
a
f
g
b
L
K
I
M
H
B
C
E







